ПРОГРАММА
обязательного курса для студентов кафедры математической логики и теории алгоритмов.

1 Аксиоматическая теория множеств

1. Понятие множества. Равенство множеств. Аксиома объемности. Противоречивость полного принципа свёртывания (парадокс Рассела). Множества и классы.

2. Аксиомы пары, объединения, степени. Упорядоченные пары (по Куратовскому), декартово произведение множеств и его существование. Бинарные отношения, функции и их простейшие свойства.

3. Натуральный ряд. Аксиома бесконечности и формальное определение множества натуральных чисел (по фон Нейману). Принцип математической индукции. Его вывод из определения натурального ряда. Принцип Дирихле и его обоснование.

4. Сравнение мощностей множеств. Счётные и несчётные множества. Теорема Кантора–Бернштейна. Счётность множества вещественных алгебраических чисел. Теорема Кантора (множество $P(X)$ не равномощно X), несчётность $\mathbb{R}$.

5. Частично упорядоченные множества. Терминология: строгий и нестрогий порядок, линейный порядок, максимальный элемент, наибольший элемент, верхняя грань множества, цепь в частично упорядоченном множестве. Операции суммы и произведения линейно упорядоченных множеств.

6. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку. Из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.

7. Ординалы. Построение изоморфизма между вполне упорядоченными множествами и ординалами.

8. Трансфинитная индукция и рекурсия.

9. Аксиома выбора. Теорема Цермело (всякое множество может быть вполне упорядочено). Лемма Цорна. Доказательство их эквивалентности. Следствие о том, что любые два множества сравнимы по мощности.

10. Кардиналы. Теорема о мощности произведения двух бесконечных множеств.

2 Классическое и интуиционистское исчисление высказываний

1. Аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний. Выводы из гипотез. Лемма о дедукции и производные правила вывода.

2. Теорема о полноте классического исчисления высказываний.

3. Интуиционистский подход к основаниям математики. Интерпретация Брауэра–Гейтинга–Колмогорова связок интуиционистской логики.

4. Аксиомы и правила вывода интуиционистского исчисления высказываний. Модели Крипке для интуиционистской логики. Примеры классических тавтологий, невыводимых в интуиционистской логике.

5. Теорема о полноте интуиционистской логики высказываний по Крипке. Полнота относительно конечных деревьев.

6. Следствия теоремы о полноте: теорема Гливенко, свойство дизъюнктивности, отсутствие конечнозначной семантики.

3 Логика первого порядка

1. Язык логики первого порядка. Теории первого порядка и их модели.

2. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Лемма о дедукции. Полные теории, лемма Линденбаума–Тарского.

3. Теории со свойством Хенкина. Лемма о расширении непротиворечивой теории первого порядка до полной теории со свойством Хенкина. Теорема о существовании модели непротиворечивой теории первого порядка (в сигнатуре произвольной мощности). Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов.

4. Теорема Мальцева о компактности и ее следствия. Неаксиоматизируемость теории класса конечных групп, теории полей характеристики 0 и т.д.. Существование нестандартных моделей арифметики.

5. Изоморфизм моделей, категоричность в данной мощности. Изоморфизм произвольных счетных плотных линейных порядков без минимального и максимального элемента. Элементарная эквивалентность моделей. Элементарные подмодели. Теорема Лёвенгейма–Сколема о понижении мощности. Теорема о существовании элементарных расширений данной бесконечной модели произвольной большей мощности.

6. Элиминация кванторов в теориях упорядоченных множеств натуральных и рациональных чисел.

7. Теорема Тарского–Зайденберга (элиминация кванторов в упорядоченном поле вещественных чисел).

8. 17 проблема Гильберта (всякая неотрицательная рациональная функция над полем вещественных чисел есть сумма квадратов некоторых рациональных функций над этим полем).

4 Теоремы о неполноте

1. Язык арифметики Пеано, стандартная модель, Σ_n и Π_n-формулы. Перечислимость любого Σ_1-выразимого множества. Теории Q, $I\Sigma_n$, PA.

2. Примитивно рекурсивные функции. Замкнутость класса примитивно рекурсивных функций (отношений) относительно ограниченных сумм, произведений, булевых операций и ограниченных кванторов, возвратной рекурсии. Существование тотальной вычислимой, но не примитивно рекурсивной, функции. Функция Аккермана.

3. Примитивно рекурсивное кодирование синтаксиса. Примитивно рекурсивные определения множеств гёделевых номеров термов и формул данного языка. Функция подстановки терма вместо свободных вхождений данной переменной в терм и формулу. Примитивно рекурсивное определение предиката доказательств, гёделевская формула доказуемости.

4. Бета-функция Геделя. Σ_1-определимость любого примитивно рекурсивного отношения в стандартной модели арифметики.

5. Разрешимость предикатов и представимость функций в теории. Разрешимость любой Δ_0-формулы в арифметике Робинсона Q. Представимость любой вычислимой функции в Q (без доказательства). Доказуемо рекурсивные функции в теории. Доказуемая рекурсивность любой примитивно рекурсивной функции в теории $I\Sigma_1$.

6. Теорема о неподвижной точке в арифметике. Теорема Тарского об определении истинности в арифметике. Первая теорема Гёделя о неполноте. Теорема Гёделя–Россера. Неразрешимость исчисления предикатов в арифметическом языке.

7. Условия Гильберта–Бернайса–Лёба. Их обоснование в теории $I\Sigma_1$ (без подробностей). Вторая теорема Геделя о неполноте. Теорема Лёба.

Список литературы

[1] С.К. Клини. Введение в метаматематику, Изд-во иностранной литературы, 1957. Пер. с англ. А.С. Есенина–Вольпина под ред. В.А. Успенского

[2] А. И. Мальцев. *Алгоритмы и рекурсивные функции, изд. 2-е.* М.: Наука, 1986.

[3] Э. Мендельсон. *Введение в математическую логику, изд. 3-е.* М.: Наука, 1984.

[4] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Языки и исчисления. Москва: изд-во МЦНМО, 2008.

[5] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Вычислимые функции. Москва: изд-во МЦНМО, 2008.

[6] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Теория множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 2008.

[7] Дж. Булос, Р. Джеффри. Вычислимость и логика. М: Мир, 1994.

[8] David Marker. Model theory: An introduction. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 217, 2002.