Упрощённое доказательство теоремы об арифметической полноте для логики доказуемости **GLP**

Л.Д. Беклемишев*

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
ул. Губкина 8, Москва 119991, Россия
e-mail: bekl@mi.ras.ru

10 ноября 2010 г.

Аннотация

Мы даём упрощённое доказательство теоремы Г. Джапаридзе об арифметической полноте для полимодальной логики доказуемости **GLP**. Упрощение достигается за счёт использования фрагмента **J** теории **GLP**, имеющего более удобную семантику Крипке, чем фрагмент, рассматриваемый в работах Игнатьева и Булоса. Это, в частности, позволяет упростить используемую в доказательстве конструкцию арифметической неподвижной точки, приблизив её к стандартной конструкции Соловея.

УДК: 510.652+510.643
Ключевые слова: логика доказуемости, формальная арифметика

1 Основные понятия

Логики GLP и J. Полимодальная логика доказуемости **GLP** формулируется в языке исчисления высказываний, обогащённом новыми одноместными связками [0], [1], [2], ..., называемыми связками *модальности*. Двойственные связки $\langle n\rangle$ для всех $n \in \mathbb{N}$ рассматриваются как сокращения: $\langle n\rangle\varphi$ означает $\neg[n]\neg\varphi$.

Логика **GLP** задаётся следующими схемами аксиом и правилами вывода.

Схемы аксиом: (i) Тавтологии исчисления высказываний;

(ii) $[n](\varphi \to \psi) \to ([n]\varphi \to [n]\psi)$;

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, Совета по грантам ведущих научных школ и Российско–швейцарской программы научно-технической кооперации STCP–CH–RU, проект “Вычислительная теория доказательств”.

(iii) $[n]([n]\varphi \to \varphi) \to [n]\varphi$ (аксиома Лёба);

(iv) $\langle m\rangle\varphi \to [n]\langle m\rangle\varphi$, для $m < n$;

(v) $[m]\varphi \to [n]\varphi$, для $m \leqslant n$ (аксиома монотонности);

Правила вывода: modus ponens, $\vdash \varphi \ \Rightarrow \vdash [n]\varphi$.

Таким образом, для каждой модальности $[n]$ логика **GLP** содержит аксиомы (i)–(iii) и правила вывода логики доказуемости Гёделя–Лёба **GL**, а схемы (iv) и (v) связывают между собой различные модальности. Известным следствием аксиом (i)–(iii) является *схема транзитивности*

$$[n]\varphi \to [n][n]\varphi.$$

Система **J** получается из **GLP** заменой схемы аксиом монотонности (v) на следующие две схемы аксиом, легко выводимые в **GLP** с использованием схемы транзитивности:

(vi) $[m]\varphi \to [n][m]\varphi$, для $m < n$;

(vii) $[m]\varphi \to [m][n]\varphi$, для $m < n$.

В отличие от логики **GLP**, логика **J** является полной относительно некоторого естественного класса конечных шкал Крипке, описываемого ниже.

Шкалы Крипке. *Шкалой Крипке* для языка полимодальной логики называем структуру вида $(W; R_0, R_1, \ldots)$, где W — непустое множество, а R_k — бинарные отношения на W. Элементы множества W принято называть *мирами*. Шкалу называем конечной, если конечно множество W и $R_k = \varnothing$ для всех $k \geqslant 0$ за исключением конечного числа.

Оценка переменных v на шкале W сопоставляет каждой пропозициональной переменной p некоторое подмножество $v(p) \subseteq W$, называемое множеством истинности переменной p. *Моделью Крипке* называем шкалу Крипке вместе с заданной на ней некоторой оценкой переменных.

Пусть $\mathcal{W} = (W, v)$ — модель Крипке. Индукцией по построению формулы φ определим отношение *истинности формулы* φ *в мире* x *модели* $\mathcal{W}$ (записываем $\mathcal{W}, x \vDash \varphi$).

1. $\mathcal{W}, x \vDash p \iff x \in v(p)$, если p — переменная;
2. $\mathcal{W}, x \vDash (\varphi \wedge \psi) \iff (\mathcal{W}, x \vDash \varphi$ и $\mathcal{W}, x \vDash \psi)$,
   $\mathcal{W}, x \vDash \neg\varphi \iff \mathcal{W}, x \nvDash \varphi$ и аналогично для других булевых связок;
3. $\mathcal{W}, x \vDash [n]\varphi \iff \forall y \in W\ (xR_ny \Rightarrow \mathcal{W}, y \vDash \varphi)$.

Пишем $\mathcal{W} \vDash \varphi$, если $\forall x \in W\ \mathcal{W}, x \vDash \varphi$.

Для того, чтобы аксиомы логики **J** были истинны в данной шкале Крипке при любой оценке переменных, мы накладываем некоторые условия на отношения R_k. Транзитивное бинарное отношение R на множестве W называется *нётеровым*, если не существует бесконечной цепочки элементов

W вида $a_0Ra_1Ra_2\ldots$ Отметим, что для конечных множеств W условие нётеровости отношения R на W равносильно условию его иррефлексивности.

Шкалу $(W; R_0, R_1, \ldots)$ называем **J**-*шкалой*, если

1. для каждого $k \geqslant 0$ отношение R_k транзитивно и нётерово;
2. $\forall x, y\,(xR_ny \Rightarrow \forall z\,(xR_mz \Leftrightarrow yR_mz))$ для $m < n$;
3. $\forall x, y, z\,(xR_my$ и $yR_nz \Rightarrow xR_mz)$ для $m < n$.

J-*моделью* называем любую модель Крипке, шкала которой является **J**-шкалой. Индукцией по длине вывода формулы φ легко установить следующую лемму.

Лемма 1. *Для любой формулы φ, если $\mathbf{J} \vdash \varphi$, то $\mathcal{W} \vDash \varphi$ для любой* **J**-*модели $\mathcal{W}$.*

Обратное утверждение, то есть теорема о полноте логики **J** относительно класса (конечных) **J**-моделей, доказано в [4].

Предложение 1. *Для любой формулы φ, если $\mathbf{J} \nvdash \varphi$, то найдётся конечная* **J**-*модель $\mathcal{W}$ такая, что $\mathcal{W} \nvDash \varphi$.*

Назовём *корнем* **J**-шкалы $(W; R_0, R_1, \ldots)$ такой элемент $r \in W$, что

$$\forall x \in W\ \exists k \geqslant 0\ rR_kx.$$

Стандартные рассуждения показывают, что предложение 1 можно усилить до следующего утверждения.

Предложение 2. *Для любой формулы φ, если $\mathbf{J} \nvdash \varphi$, то найдётся конечная* **J**-*модель $\mathcal{W}$ с корнем r такая, что $\mathcal{W}, r \nvDash \varphi$.*

Доказательство. Допустим $\mathbf{J} \nvdash \varphi$ и рассмотрим **J**-модель $\mathcal{W}$ и точку $x_0 \in W$, для которых $\mathcal{W}, x_0 \nvDash \varphi$. Пусть $\mathcal{W}_0$ — подмодель, порождённая точкой x_0, то есть ограничение модели $\mathcal{W}$ на подмножество W_0, состоящее из всех тех точек $y \in W$, куда можно придти из точки x_0, двигаясь по отношениям R_k (включая саму x_0). Более формально, $y \in W_0$, если существует конечная последовательность элементов W вида

$$x_0R_{n_0}x_1R_{n_1}x_2R_{n_3}\ldots R_{n_k}x_{k+1} = y.$$

Нетрудно проверить следующие свойства.

1. $\mathcal{W}_0$ есть **J**-модель;
2. $\forall x \in W_0\,(\mathcal{W}, x \vDash \psi \iff \mathcal{W}_0, x \vDash \psi)$ для любой формулы ψ;
3. $\forall y \in W_0 \setminus \{x_0\}\ \exists k\ x_0R_ky$.

Последнее утверждение легко доказать индукцией по длине пути из точки x_0 в y, исходя из следующего свойства **J**-шкал:

$$uR_mvR_nz \ \Rightarrow\ uR_{\min(m,n)}z.$$

Тем самым x_0 является корнем модели $\mathcal{W}_0$ и $\mathcal{W}_0, x_0 \nvDash \varphi$. $\dashv$

Формальная арифметика и предикаты доказуемости. Арифметическими теориями мы будем называть теории первого порядка в сигнатуре $(0,', +, \cdot, =)$, содержащие аксиомы арифметики Пеано PA. Известно, что в языке PA можно определить термы для каждой примитивно рекурсивной функции. Δ_0 означает класс арифметических формул, все вхождения кванторов в которые ограничены, то есть имеют вид

$$\begin{aligned} \forall x{\leqslant}t\,\varphi \quad &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x\,(x \leqslant t \to \varphi), \\ \exists x{\leqslant}t\,\varphi \quad &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists x\,(x \leqslant t \wedge \varphi), \end{aligned}$$

где терм t не содержит переменной x.

Классы Σ_n и Π_n-формул определяются индуктивно: Δ_0-формулы считаем как Σ_0, так и Π_0-формулами. Σ_{n+1}-формулы суть формулы вида $\exists\vec{x}\,\varphi(\vec{x},\vec{y})$, где φ — Π_n-формула; Π_{n+1}-формулы суть формулы вида $\forall\vec{x}\,\varphi(\vec{x},\vec{y})$, где φ — Σ_n-формула.

Мы предполагаем фиксированной некоторую естественную примитивно рекурсивную гёделеву нумерацию языка арифметики. Гёделев номер объекта τ (терма, формулы, и т.д.) обозначается $\ulcorner\tau\urcorner$. Мы будем также рассуждать о гёделевых номерах термов и формул в рамках самой формальной арифметики. При этом мы пользуемся следующими соглашениями.

В языке PA натуральное число n обозначается нумералом $\overline{n} = 0'\ldots'$ (n раз); для данной формулы φ выражение $\ulcorner\varphi\urcorner$ понимается как соответствующий нумерал $\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}$.

Мы будем также рассматривать внутри PA примитивно рекурсивные семейства формул φ_n, зависящих от параметра $n \in \mathbb{N}$. В этом случае выражение $\ulcorner\varphi_x\urcorner$ понимается как примитивно рекурсивный определимый терм (со свободной переменной x), значением которого при каждом n является гёделев номер формулы φ_n. В частности, $\ulcorner\varphi(\overline{x})\urcorner$ есть терм для функции, вычисляющей по n гёделев номер результата подстановки нумерала $\overline{n}$ в формулу φ. Следуя Булосу [5], мы будем использовать сокращение $\varphi[\psi]$ вместо $\varphi(\ulcorner\psi\urcorner)$, и $\varphi[\psi_x]$ вместо $\varphi(\ulcorner\psi_x\urcorner)$. Интуитивный смысл этих выражений состоит в том, что формула ψ (соответственно, ψ_x) обладает свойством φ.

Нам будет также удобно считать, что в языке арифметики выделен новый сорт переменных $\alpha, \beta, \ldots$ по гёделевым номерам арифметических формул. Формулы с переменными α, β, $\ldots$ мы рассматриваем как сокращения для их естественных переводов в стандартный язык арифметики PA. Для семейств формул, параметризованных новым сортом переменных, мы используем обозначения $\ulcorner\varphi_\alpha\urcorner$ и $\varphi[\psi_\alpha]$ в том же смысле, что и для числовых параметров.

Пусть T — арифметическая теория, а $\mathrm{Pr}(\alpha)$ — арифметическая формула с единственной свободной переменной α. Следуя [6], называем Pr *предикатом доказуемости уровня n над T*, если для любых арифметических предложений φ, ψ

1. $\mathrm{Pr} \in \Sigma_{n+1}$;

2. $T \vdash \varphi$ влечёт $T \vdash \mathrm{Pr}[\varphi]$;

3. $T \vdash \mathrm{Pr}[\varphi \to \psi] \to (\mathrm{Pr}[\varphi] \to \mathrm{Pr}[\psi])$;

4. $\varphi \in \Sigma_{n+1}$ влечёт $T \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}[\varphi]$.

Заметим, что из условий 1 и 4 следует так называемое третье условие Лёба:

$$T \vdash \mathrm{Pr}[\varphi] \to \mathrm{Pr}[\mathrm{Pr}[\varphi]].$$

Напомним, что теория T называется *корректной*, если $T \vdash \varphi$ влечёт $\mathbb{N} \vDash \varphi$ для любого арифметического предложения φ. Аналогично, предикат доказуемости Pr называется *корректным*, если $\mathbb{N} \vDash \mathrm{Pr}[\varphi]$ влечёт $\mathbb{N} \vDash \varphi$.

Если теория T корректна, то в силу условий 2 и 3 множество

$$U = \{\varphi : \mathbb{N} \vDash \mathrm{Pr}[\varphi]\}$$

является дедуктивно замкнутым множеством предложений, содержащим T. Можно считать, что формула Pr выражает доказуемость в (вообще говоря, неперечислимой) теории U.

Последовательность π формул Pr_0, Pr_1, ... назовём *сильной последовательностью предикатов доказуемости над* T, если для некоторой последовательности натуральных чисел $r_0 < r_1 < r_2 < \cdots$ для любого $n \geqslant 0$

1. Pr_n — предикат доказуемости уровня r_n над T;

2. $T \vdash \mathrm{Pr}_n[\varphi] \to \mathrm{Pr}_{n+1}[\varphi]$ для любого предложения φ.

Напомним два стандартных примера сильных последовательностей предикатов доказуемости над PA.

Известно, что для каждого $n \geqslant 1$ для класса Π_n-формул существует Π_n-определение истинности в PA, то есть арифметическая Π_n-формула $\mathrm{Tr}_{\Pi_n}(\alpha)$, естественным образом выражающая предикат «α есть гёделев номер истинного арифметического Π_n-предложения».

Пусть $\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}$ — гёделевский предикат доказуемости в PA (уровня 0). Положим $\mathrm{Pr}_0 = \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}$ и $\mathrm{Pr}_n(\alpha) = \exists\beta\,(\mathrm{Tr}_{\Pi_n}[\beta] \wedge \mathrm{Pr}_0[\beta \to \alpha])$ для $n > 0$. Заметим, что Pr_n выражает доказуемость в теории, аксиоматизируемой над PA множеством всех истинных Π_n-предложений, и имеет уровень n.

Другая сильная последовательность определяется замыканием PA относительно n-кратного применения ω-правила. Положим $\mathrm{Pr}_0 = \mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}$ и

$$\mathrm{Pr}_{n+1}(\alpha) = \exists\beta\,(\forall x\,\mathrm{Pr}_n[\beta(\overline{x})] \wedge \mathrm{Pr}_n[\forall x\,\beta(x) \to \alpha]).$$

Отметим, что уровень предиката Pr_n равен $2n$.

С каждым предикатом доказуемости уровня n можно связать аналог формулы доказательств, то есть Π_n-формулу $\mathrm{Prf}(\alpha, y)$ такую, что

$$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{Pr}(\alpha) \leftrightarrow \exists y\,\mathrm{Prf}(\alpha, y).$$

Без ограничения общности мы можем также считать, что в смысле Prf любое число y является доказательством не более одной формулы α, и любая доказуемая формула имеет сколь угодно большие доказательства. Эти свойства являются доказуемыми в PA.

Арифметическая интерпретация логики GLP. Зафиксируем теперь некоторую сильную последовательность π предикатов доказуемости относительно T. Назовём *арифметической оценкой* любое отображение f, сопоставляющее каждой пропозициональной переменной p языка логики **GLP** некоторое арифметическое предложение $f(p)$. Для фиксированной π любая арифметическая оценка однозначно продолжается до отображения f_π, определённого на множестве всех модальных формул, следующим образом:

1. $f_\pi(p) = f(p)$ для любой переменной p;
2. $f_\pi(\varphi \wedge \psi) = (f_\pi(\varphi) \wedge f_\pi(\psi))$, $f_\pi(\neg\varphi) = \neg f_\pi(\varphi)$ и аналогично для других булевых связок;
3. $f_\pi([n]\varphi) = \mathrm{Pr}_n(\ulcorner f_\pi(\varphi) \urcorner)$ для каждого $n \geqslant 0$.

Арифметическую формулу $f_\pi(\varphi)$ называем *переводом* модальной формулы φ при оценке f. Индукцией по длине вывода формулы φ легко установить корректность логики **GLP** при арифметической интерпретации относительно любой сильной последовательности предикатов доказуемости.

Лемма 2. *Если* $\mathbf{GLP} \vdash \varphi$, *то* $T \vdash f_\pi(\varphi)$ *для любой арифметической оценки* f.

Доказательство. Единственный нетривиальный момент в доказательстве этой леммы состоит в выводимости перевода аксиомы Лёба при любой арифметической оценке. Этот вывод получается на основе леммы о неподвижной точке аналогично доказательству теоремы Лёба для стандартного предиката доказуемости в PA. $\dashv$

Обратное утверждение, верное при достаточно широком предположении о корректности рассматриваемых предикатов доказуемости над T, составляет содержание теоремы Джапаридзе об арифметической полноте для логики **GLP** [2, 6].

2 Теорема об арифметической полноте

Теорема 1. *Пусть теория* T *и все предикаты доказуемости* Pr_n *сильной последовательности* π *корректны. Тогда для любой модальной формулы* φ *такой, что* $\mathbf{GLP} \nvdash \varphi$, *найдётся арифметическая оценка* f, *для которой* $T \nvdash f_\pi(\varphi)$.

Таким образом, **GLP** является логикой доказуемости для любой сильной последовательности корректных предикатов доказуемости. Оставшаяся часть работы посвящена доказательству этой теоремы.

Наше доказательство теоремы 1 следует общей схеме, предложенной ещё в работе Соловея [7], и использует дополнительные идеи из [2, 6].

Для данной модальной формулы φ обозначим через $M(\varphi)$ формулу

$$\bigwedge_{i<s} \bigwedge_{m_i<j\leqslant n} ([m_i]\varphi_i \to [j]\varphi_i),$$

где $[m_i]\varphi_i$ при $i < s$ пробегает все подформулы φ вида $[k]\psi$ и $n = \max_{i<s} m_i$. Далее положим

$$M^+(\varphi) = M(\varphi) \wedge \bigwedge_{i \leqslant n} [i]M(\varphi).$$

Очевидно, $\mathbf{GLP} \vdash M^+(\varphi)$.

Теорема 1 вытекает из следующего утверждения, которое также характеризует логику **GLP** в терминах моделей Крипке.

Теорема 2. *Для любой модальной формулы φ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\mathbf{GLP} \vdash \varphi$;

(ii) $\mathbf{J} \vdash M^+(\varphi) \to \varphi$;

(iii) *для любой конечной* **J**-*модели* $\mathcal{W}$ $\mathcal{W} \vDash M^+(\varphi) \to \varphi$;

(iv) *для любой арифметической оценки* f $T \vdash f_\pi(\varphi)$.

Отметим, что импликация (iii)⇒(ii) следует из предложения 1, импликация (i)⇒(iv) следует из леммы 2, а (ii)⇒(i) очевидна. Таким образом, для доказательства теоремы 2 достаточно установить импликацию (iv)⇒(iii).

Мы рассуждаем от противного и зафиксируем формулу φ и конечную **J**-модель $\mathcal{W}_0$ с корнем r такую, что $\mathcal{W}_0, r \nvDash M^+(\varphi) \to \varphi$. Поскольку $\mathcal{W}_0, r \vDash M^+(\varphi)$ и r — корень, мы можем заключить, что

$$\mathcal{W}_0 \vDash [k]\psi \to [j]\psi$$

для любой подформулы $[k]\psi$ формулы φ и любого $j > k$.

Так же как и в стандартной конструкции Соловея, для погружения модели $\mathcal{W}_0 = (W_0; R_0^\circ, R_1^\circ, \dots, v_0)$ в арифметику мы будем считать, что $W_0 = \{1, 2, \dots, N\}$ для некоторого N, и добавим новый корень 0 к модели $\mathcal{W}_0$, то есть определим шкалу $(W; R_0, R_1, \dots)$, где $W = W_0 \cup \{0\}$, $R_0 = R_0^\circ \cup \{\langle 0, x\rangle : x \in W_0\}$ и $R_k = R_k^\circ$ для $k > 0$. Положим также $v(p) = v_0(p)$ для всех переменных p. Очевидно, в модели $\mathcal{W} = (W; R_0, R_1, \dots, v)$ мы имеем $\mathcal{W}, r \nvDash \varphi$ и $\mathcal{W}, x \vDash [k]\psi \to [j]\psi$ для любой подформулы $[k]\psi$ формулы φ, любого $j > k$ и любого $x \neq 0$.

Обозначим

$$\begin{aligned} R_k(x) &= \{y \in W : xR_ky\}, \\ R_k^*(x) &= \{y \in W : xR_iy \text{ для некоторого } i \geqslant k\}, \\ \widetilde{R}_k(x) &= R_k^*(x) \cup \bigcup \{R_k^*(z) : x \in R_{k+1}^*(z)\}. \end{aligned}$$

Арифметическую оценку f определим, сопоставляя каждому миру $x \in W$ некоторое предложение S_x и полагая

$$f(p) = \bigvee_{x \in v(p)} S_x. \qquad (*)$$

Нам будет необходимо, чтобы предложения S_x удовлетворяли следующим условиям.

(S1) $T \vdash \bigvee_{x \in W} S_x$; $\quad T \vdash \neg(S_x \wedge S_y)$ для всех $x \neq y$;

(S2) $T \vdash S_x \to \neg \mathrm{Pr}_k[\neg S_y]$ для любых $x R_k y$;

(S3) $T \vdash S_x \to \mathrm{Pr}_k[\bigvee_{y \in \widetilde{R}_k(x)} S_y]$ для любого $x \neq 0$;

(S4) $\mathbb{N} \vDash S_0$.

Допустим, что выполнены условия (S1)–(S3) и оценка f определена согласно $(*)$.

Лемма 3. *Для любой подформулы θ формулы φ и любого $x \in W_0$*

(a) *если $\mathcal{W}, x \vDash \theta$, то $T \vdash S_x \to f_\pi(\theta)$;*

(b) *если $\mathcal{W}, x \nvDash \theta$, то $T \vdash S_x \to \neg f_\pi(\theta)$.*

Доказательство. Докажем (a) и (b) совместной индукцией по построению формулы θ. Если θ — переменная, имеет вид $\theta_1 \wedge \theta_2$ или $\neg\theta_1$, то утверждения получаются из определения f и условия (S1).

Допустим $\theta = [k]\psi$. Для доказательства (b) допустим, что $\mathcal{W}, x \nvDash [k]\psi$. Тогда найдётся $y \in W_0$ такой, что $x R_k y$ и $\mathcal{W}, y \nvDash \psi$. По предположению индукции $T \vdash S_y \to \neg f_\pi(\psi)$. Отсюда следует $T \vdash f_\pi(\psi) \to \neg S_y$ и $T \vdash \mathrm{Pr}_k[f_\pi(\psi)] \to \mathrm{Pr}_k[\neg S_y]$. По условию (S2) $T \vdash S_x \to \neg \mathrm{Pr}_k[\neg S_y]$, откуда $T \vdash S_x \to \neg \mathrm{Pr}_k[f_\pi(\psi)]$.

Для доказательства (a) допустим $\mathcal{W}, x \vDash [k]\psi$. Сначала установим, что $\forall w \in \widetilde{R}_k(x)\, \mathcal{W}, w \vDash \psi$.

Пусть $w \in \widetilde{R}_k(x)$, тогда для некоторого z имеем $x \in R^*_{k+1}(z) \cup \{z\}$ и $w \in R^*_k(z)$. Очевидно, $\forall y \in R_k(x)\, \mathcal{W}, y \vDash \psi$, но так как $R_k(z) = R_k(x)$, то $\mathcal{W}, z \vDash [k]\psi$. По построению $\mathcal{W}_0$ мы также имеем $\mathcal{W}, z \vDash [k]\psi \to [m]\psi$ для любого $m > k$, откуда $\mathcal{W}, z \vDash [m]\psi$ для всех $m \geqslant k$. Поскольку $w \in R^*_k(z)$ отсюда следует $\mathcal{W}, w \vDash \psi$.

В силу $\forall w \in \widetilde{R}_k(x)\, \mathcal{W}, w \vDash \psi$ по предположению индукции получаем $T \vdash S_w \to f_\pi(\psi)$ для всех $w \in \widetilde{R}_k(x)$ и тем самым $T \vdash (\bigvee_{w \in \widetilde{R}_k(x)} S_w) \to f_\pi(\psi)$. По свойствам формулы доказуемости $T \vdash \mathrm{Pr}_k[\bigvee_{w \in \widetilde{R}_k(x)} S_w] \to \mathrm{Pr}_k[f_\pi(\psi)]$, откуда по условию (S3) $T \vdash S_x \to \mathrm{Pr}_k[f_\pi(\psi)]$. $\dashv$

Как следствие этой леммы мы получаем $T \vdash S_r \to \neg f_\pi(\varphi)$. Если при этом $T \vdash f_\pi(\varphi)$, то $T \vdash \neg S_r$. Отсюда следует $T \vdash \mathrm{Pr}_0[\neg S_r]$, а значит $T \vdash \neg S_0$ по условию (S2). В силу корректности T получаем $\mathbb{N} \nvDash S_0$, что противоречит условию (S4). Таким образом, наше предположение $T \vdash f_\pi(\varphi)$ неверно, то есть из леммы 3 следует утверждение теоремы.

Нам осталось построить арифметические предложения S_x, удовлетворяющие условиям (S1)–(S4). Назовём число m *рангом* модели $\mathcal{W}$, если для всех $k > m$ $R_k = \varnothing$. Для каждого $k \leqslant m$ мы построим арифметические функции $h_k : \mathbb{N} \to W$ с помощью арифметической теоремы о неподвижной точке. Говоря неформально, функция h_0 представляет собой «обычную» функцию

Соловея для шкалы (W, R_0) и предиката Pr_0, а функции h_{k+1} представляют собой её аналоги для шкал (W, R_{k+1}) и предикатов Pr_{k+1}. При этом для всех $k < m$ значение $h_{k+1}(0)$ полагается равным пределу функции h_k.

Более формально, обозначим через ℓ_k предел функции h_k. Предложение S_x определяется как формализация утверждения $\ell_m = \overline{x}$, то есть

$$S_x \overset{\text{def}}{\iff} \exists n_0\, \forall n \geqslant n_0\, H_m(n, \overline{x}),$$

где $H_m(n, x)$ выражает утверждение $h_m(n) = x$. Отметим, что $\ulcorner S_x \urcorner$ является примитивно рекурсивной функцией от x и $\ulcorner H_m \urcorner$.

Мы хотим построить функции h_k, удовлетворяющие (доказуемо в T) следующим условиям для всех $k \leqslant m$:

$$h_0(0) = 0 \text{ и } h_k(0) = \ell_{k-1}, \text{ если } k > 0; \tag{1}$$

$$h_k(n+1) = \begin{cases} z, & \text{если } h_k(n) R_k z \text{ и } \mathrm{Prf}_k(\ulcorner \neg S_z \urcorner, n), \\ h_k(n), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Непосредственная формализация условий (1) и (2) приводит к последовательности арифметических формул A_k, $k \leqslant m$, задающих систему уравнений с неизвестными $H_0, \ldots, H_m$:

$$\begin{cases} T \vdash H_0(n, x) \leftrightarrow A_0(\ulcorner H_m \urcorner, n, x), \\ T \vdash H_{k+1}(n, x) \leftrightarrow A_{k+1}(\ulcorner H_m \urcorner, \ell_k, n, x), \text{для всех } k < m. \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что ℓ_k формально выражается через H_k и тем самым через $A_k(\ulcorner H_m \urcorner, \ell_{k-1}, n, x)$. Значит, последовательно подставляя каждое уравнение системы (3), начиная с первого, в следующее, мы исключаем все определения ℓ_k и в итоге получаем одно уравнение, определяющее H_m как неподвижную точку стандартного вида

$$T \vdash H_m(n, x) \leftrightarrow A'_m(\ulcorner H_m \urcorner, n, x).$$

Обратная подстановка даёт все остальные формулы H_k, $k < m$, удовлетворяющие системе (3).

Заметим, что формула A_k лежит в классе $\Delta_0(\Sigma_{r_k})$, поскольку $\mathrm{Prf}_k \in \Pi_{r_k}$. Развёртка определений ℓ_{k-1} показывает, что каждая формула H_k лежит в классе Σ_{r_k+1} (с точностью до эквивалентности в PA). Мы также непосредственно получаем следующую лемму.

Лемма 4. *Для любого $k \geqslant 0$*

(i) $T \vdash \forall n\, \exists! x \in W\, H_k(n, x)$;

(ii) $T \vdash \forall i, j, z\, (i < j \wedge h_k(i) = z \to h_k(j) \in R_k(z) \cup \{z\})$;

(iii) $T \vdash \exists! x \in W\, \ell_k = x$;

(iv) $T \vdash \forall z\, (\exists n\, h_k(n) = z \to \ell_m \in R_k^*(z) \cup \{z\})$.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Лемма 5. *Для данного множества предложений* $\{S_x : x \in W\}$ *выполнены свойства* (S1)–(S4).

Доказательство. Условие (S1) следует из леммы 4 (iii).

(S2) получается формализацией следующего рассуждения в T.

Допустим S_x, тогда либо $\ell_k = x$, либо $x \in R^*_{k+1}(\ell_k)$. Заметим, что в каждом из этих случаев $R_k(x) = R_k(\ell_k)$. Выберем некоторое n_0 такое, что $\forall n \geqslant n_0\ h_k(n) = \ell_k$. Допустим $\mathrm{Pr}_k[\neg S_y]$ для некоторого $y \in R_k(x)$. Тогда найдётся $n_1 \geqslant n_0$ такое, что $\mathrm{Prf}_k(\ulcorner \neg S_y \urcorner, n_1)$. Поскольку $\ell_k R_k y$ и $h_k(n_1) = \ell_k$, по определению h_k мы получаем $h_k(n_1 + 1) = y$, противоречие. Тем самым $\neg \mathrm{Pr}_k[\neg S_y]$.

Для любого $A \subseteq W$ обозначим через $\ell_m \in A$ утверждение $\bigvee_{y \in A} S_y$. Для доказательства (S3) нужно установить импликацию

$$T \vdash S_x \to \mathrm{Pr}_k[\ell_m \in \widetilde{R}_k(x)]$$

для каждого $x \neq 0$. Формализуем в T следующее рассуждение.

Допустим S_x, где $x \neq 0$, и рассмотрим $z = \ell_k$. Тогда $x \in R^*_{k+1}(z) \cup \{z\}$. По определению $\widetilde{R}_k$ отсюда следует $R^*_k(z) \subseteq \widetilde{R}_k(x)$ и, поскольку это включение выразимо Δ_0-формулой, $\mathrm{Pr}_k[R^*_k(z) \subseteq \widetilde{R}_k(x)]$. Значит,

$$\mathrm{Pr}_k[\ell_m \in R^*_k(z)] \to \mathrm{Pr}_k[\ell_m \in \widetilde{R}_k(x)]. \tag{4}$$

С другой стороны, поскольку $\ell_k = z$ мы имеем $\exists n\ h_k(n) = z$. Последнее утверждение выражается арифметической Σ_{r_k+1}-формулой, поэтому $\mathrm{Pr}_k[\exists n\ h_k(n) = \overline{z}]$. По лемме 4 (iv) для любого $u \in W$

$$T \vdash \exists n\ h_k(n) = \overline{u} \to \ell_m \in R^*_k(u) \cup \{u\}.$$

Отсюда следует

$$\mathrm{Pr}_k[\exists n\ h_k(n) = \overline{u}] \to \mathrm{Pr}_k[\ell_m \in R^*_k(u) \cup \{u\}].$$

В частности, для $u = z$ мы получаем $\mathrm{Pr}_k[\ell_m \in R^*_k(z) \cup \{z\}]$.

Заметим теперь, что $z \neq 0$ (поскольку $x \neq 0$). В силу $\exists n\ h_k(n) = z$ мы имеем $\mathrm{Pr}_k[\neg S_z]$: действительно, функция h_k могла попасть в точку z лишь при условии $\mathrm{Pr}_k[\neg S_z]$. Таким образом, $\mathrm{Pr}_k[\ell_m \in R^*_k(z)]$ и с учётом (4) получаем $\mathrm{Pr}_k[\ell_m \in \widetilde{R}_k(x)]$, что и требуется.

(S4) Индукцией по k покажем, что $\mathbb{N} \vDash \ell_k = 0$ для всех $k \leqslant m$. Действительно, если в стандартной модели имеет место $\ell_k = z \neq 0$, то $\mathrm{Pr}_k[\neg S_z]$, поскольку по предположению индукции (для $k > 0$) $h_k(0) = \ell_{k-1} = 0$. Отсюда следует $\ell_k \neq z$ в силу корректности Pr_k. Таким образом, $\ell_k = 0$. $\dashv$

3 Некоторые усиления

Требование корректности теории T вместе со всеми предикатами доказуемости π является естественным, но более сильным, чем это необходимо для выполнимости теоремы об арифметической полноте **GLP**.

Назовём последовательность π *сильно непротиворечивой* относительно T, если непротиворечива теория

$$T + \{\mathrm{Con}_n : n < \omega\},$$

где Con_n означает $\neg\mathrm{Pr}_n[\bot]$. Очевидно, всякая последовательность корректных предикатов доказуемости над T является сильно непротиворечивой. Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, если Pr_n выражает доказуемость в теории, аксиоматизируемой над T множеством всех истинных Π_n-предложений (см. выше), то формула Con_n равносильна схеме равномерной Σ_n-рефлексии над T, таким образом теория $T + \{\mathrm{Con}_n : n < \omega\}$ эквивалентна расширению T полной равномерной схемой рефлексии $T + \mathrm{RFN}(T)$ (см. [1, 3]). Легко привести примеры некорректных теорий T, для которых, тем не менее, схема $T + \mathrm{RFN}(T)$ непротиворечива.

В самом деле, пусть T — перечислимая корректная теория, а T' означает $T + \mathrm{RFN}(T)$. Рассмотрим теорию $U = T + \neg\mathrm{Con}(T')$. Очевидно, U некорректна. С другой стороны, поскольку $\neg\mathrm{Con}(T') \in \Sigma_1$ для каждого $n < \omega$ мы имеем

$$T \vdash \mathrm{Con}_n(U) \leftrightarrow (\mathrm{Con}_n(T) \wedge \neg\mathrm{Con}(T')).$$

Таким образом, если $U + \mathrm{RFN}(U) \vdash \bot$, то для некоторого $n < \omega$ $U + \mathrm{Con}_n(U) \vdash \bot$ и тем самым $T + \neg\mathrm{Con}(T') + \mathrm{Con}_n(T) \vdash \bot$. Отсюда мы заключаем $T + \mathrm{Con}_n(T) \vdash \mathrm{Con}(T')$, что противоречит второй теореме Гёделя о неполноте.

Теорема 3. *Заключение теоремы 2 имеет место для любой сильно непротиворечивой относительно T сильной последовательности предикатов доказуемости π.*

Доказательство. Мы воспользуемся той же конструкцией, что и в доказательстве теоремы 2. Поскольку теория T не предполагается корректной, свойство (S4) не обязательно имеет место. Тем не менее, как и ранее, верны леммы 3, 4 и 5.

Обозначим через $d_k(x)$ глубину точки $x \in \mathcal{W}$ в смысле бинарного отношения R_k, то есть $d_k(x) = \sup\{d_k(y) + 1 : y \in R_k(x)\}$. Докажем следующее свойство.

Лемма 6. *Пусть m — ранг модели $\mathcal{W}$. Тогда для любого $x \in W_0$*

(i) $T \vdash S_x \to \mathrm{Pr}_m[\ell_m \in R_m(x)]$;

(ii) $T \vdash S_x \to \mathrm{Pr}_m^k[\bot]$, *где* $k = d_m(x) + 1$.

Доказательство. Утверждение (i) фактически сводится к частному случаю свойства (S3) для $k = m$. В самом деле, поскольку R_{m+1} пусто,

$$\widetilde{R}_m(x) = R_m^*(x) \cup \{R_m^*(z) : x \in R_{m+1}^*(z)\} = R_m^*(x) = R_m(x).$$

Утверждение (ii) получается из (i) очевидной индукцией по $d_m(x)$. $\dashv$

Для доказательства теоремы 3 рассуждаем следующим образом. Из предположения $T \vdash f_\pi(\varphi)$ и леммы 3, как и ранее, выводится $T \vdash \neg S_0$, а значит и $T \vdash \bigvee_{z \in W_0} S_z$ по свойству (S1). С другой стороны, по предыдущей лемме, для каждого $z \in W_0$ $T \vdash S_z \to \mathrm{Pr}_m^k[\bot]$, где $k = \sup\{d_m(x) + 1 : x \in W_0\}$. Отсюда получаем $T \vdash \mathrm{Pr}_m^k[\bot] \vdash \mathrm{Pr}_{m+1}[\bot]$, то есть теория T не может быть сильно непротиворечивой. $\dashv$

Приведём теперь упрощённое доказательство теоремы Джапаридзе об арифметической полноте для истинностной полимодальной логики доказуемости. Обозначим через **GLPS** логику, аксиомами которой являются все теоремы логики **GLP** вместе со схемой $[n]\varphi \to \varphi$ для всех формул φ и всех $n < \omega$, а правилом вывода лишь modus ponens.

Обозначим через $H(\varphi)$ формулу $\bigwedge_{i<s}([n_i]\varphi_i \to \varphi_i)$, где формулы $[n_i]\varphi_i$ при $i < s$ пробегают все подформулы φ вида $[k]\psi$.

Теорема 4. *Пусть теория T и все предикаты доказуемости π корректны. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\mathbf{GLPS} \vdash \varphi$;

(ii) $\mathbf{GLP} \vdash H(\varphi) \to \varphi$;

(iii) $\mathbb{N} \vDash f_\pi(\varphi)$ *для любой арифметической оценки* f.

Доказательство. Мы будем следовать стандартной схеме, идущей от второй теоремы Соловея. Импликации (i)⇒(iii) и (ii)⇒(i) очевидны. Докажем (iii)⇒(ii) от противного.

Допустим $\mathbf{GLP} \nvdash H(\varphi) \to \varphi$. Тогда найдётся конечная **J**-модель $\mathcal{W}$ с корнем 0 таким, что $\mathcal{W}, 0 \vDash M^+(\varphi), H(\varphi)$ и $\mathcal{W}, 0 \nvDash \varphi$. Как и ранее, мы будем считать, что $W = \{0, \ldots, N\}$, и применим конструкцию из доказательства теоремы 2. Как и ранее, имеют место леммы 3, 4 и 5.

Поскольку нас теперь интересует истинность в точке 0, мы дополним лемму 3 следующим утверждением.

Лемма 7. *Для любой подформулы θ формулы φ*

(a) *если $\mathcal{W}, 0 \vDash \theta$, то $T \vdash S_0 \to f_\pi(\theta)$;*

(b) *если $\mathcal{W}, 0 \nvDash \theta$, то $T \vdash S_0 \to \neg f_\pi(\theta)$.*

Доказательство. Докажем (a) и (b) совместной индукцией по построению формулы θ, опираясь на лемму 3. Все случаи рассматриваются как в лемме 3, за исключением (a) для формулы $\theta = [k]\psi$. В этом случае мы имеем $\mathcal{W}, 0 \vDash \psi$ в силу $\mathcal{W}, 0 \vDash H(\varphi)$ и $\mathcal{W}, 0 \vDash [j]\psi$ для всех $k \leqslant j \leqslant m$ в силу $\mathcal{W}, 0 \vDash M(\varphi)$. Таким образом, $\mathcal{W}, x \vDash \psi$ для всех $x \in R_k^*(0) \cup \{0\}$. Отсюда по предположению индукции и по лемме 3

$$T \vdash \ell_m \in R_k^*(0) \cup \{0\} \to f_\pi(\psi),$$

а следовательно и

$$T \vdash \mathrm{Pr}_k[\ell_m \in R_k^*(0) \cup \{0\}] \to \mathrm{Pr}_k[f_\pi(\psi)]. \tag{5}$$

Поскольку 0 — корень $\mathcal{W}$, из S_0 выводимо $\exists n h_k(n) = 0$, а значит $\mathrm{Pr}_k[\exists n h_k(n) = 0]$ и $\mathrm{Pr}_k[\ell_m \in R_k^*(0) \cup \{0\}]$ по лемме 4 (iv). Отсюда в силу (5) получаем $\mathrm{Pr}_k[f_\pi(\psi)]$, что и требовалось доказать. $\dashv$

Поскольку $\mathbb{N} \vDash S_0$, из доказанной леммы мы получаем $\mathbb{N} \nvDash f_\pi(\varphi)$, что завершает доказательство теоремы 4. $\dashv$

Список литературы

[1] К. Сморинский. Теоремы о неполноте. В *Справочная книга по математической логике, ч.4: теория доказательств и конструктивная математика*, под ред. Дж. Барвайса, стр. 9–53. Наука, Москва, 1983. Пер. с англ. под ред. В.П. Оревкова.

[2] Г.К. Джапаридзе. Модально-логические средства исследования доказуемости. Дисс. канд. филос. наук, Москва, МГУ, 1986.

[3] Л.Д. Беклемишев. Схемы рефлексии и алгебры доказуемости в формальной арифметике. *Успехи Математических Наук*, 60(2):3–78, 2005. English translation in: *Russian Mathematical Surveys*, 60(2): 197–268, 2005.

[4] L.D. Beklemishev. Kripke semantics for provability logic GLP. *Annals of Pure and Applied Logic*, 161:756–774, 2010. Preprint: Logic Group Preprint Series 260, University of Utrecht, November 2007. `http://preprints.phil.uu.nl/lgps/`.

[5] G. Boolos. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[6] K.N. Ignatiev. On strong provability predicates and the associated modal logics. *The Journal of Symbolic Logic*, 58:249–290, 1993.

[7] R.M. Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel Journal of Mathematics*, 28:33–71, 1976.