Схемы рефлексии и алгебры доказуемости в формальной арифметике

Л.Д. Беклемишев*

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
ул. Губкина 8, Москва 117966, Россия
e-mail: `bekl@mi.ras.ru`

Университет г. Утрехта, Нидерланды

2 января 2005 г.

Введение

Как известно, теоремы Гёделя о неполноте показывают, что нет какой-либо одной привилегированной универсальной аксиоматической системы: все перечислимые непротиворечивые системы неполны. Формальные теории различаются как по выразительным средствам языка, так и по логической силе заложенных в их аксиомах принципов. Кроме того, даже для теорий с одним и тем же объёмом выразимых и доказуемых утверждений свойства выводов, в частности, их сложность, могут быть существенно различными. Отсюда естественно возникают вопросы о критериях выбора какой-либо аксиоматической системы, и о сравнении и классификации различных систем.

В теории доказательств накоплен значительный опыт исследования конкретных формальных теорий, таких как арифметика Пеано или определенные фрагменты арифметики второго порядка и теории множеств (см., например, обзор [70]). Эти исследования, в частности, говорят о том, что "сила" достаточно богатой в выразительном смысле теории характеризуется некоторыми счётными ординалами. Для конкретных теорий в ряде случаев эти ординалы могут быть явно вычислены, что составляет предмет изучения так называемого *ординального анализа* аксиоматических систем [69, 74, 75].

Несмотря на обилие накопленного материала и глубину полученных результатов в этой области имеется ряд проблем принципиального характера.

Во-первых, нет ясного понимания, в каких терминах должны описываться ординалы формальных теорий. В частности, нет общего ответа на вопрос, что означает "вычислить ординал теории". Эта проблема известна

*Работа выполнена при поддержке РФФИ и Совета по грантам ведущих научных школ.

с 50-х годов XX века в различных вариантах как *проблема естественности ординальных обозначений* [52, 53, 42]. К настоящему времени известны лишь подходящие естественные описания ординалов для ряда важных конкретных теорий. Это, к сожалению, ещё не позволяет говорить об общности классификации теорий по их ординалам.

Во-вторых, ординалы даже для конкретных, но сильных, теорий, таких как арифметика второго порядка (с полной схемой свертывания) или теория множеств Цермело–Френкеля, до сих пор не вычислены. Эти вопросы также являются одними из наиболее известных и трудных открытых проблем в математической логике.

Технические трудности связанные с программой ординального анализа усилили в последнее время интерес специалистов к менее традиционным подходам к этим вопросам и к попыткам упростить и лучше понять применяемые методы. Среди таких попыток можно отметить работы [36, 37], где устанавливается связь между процедурами устранения сечения по Генцену и по Шютте; работы [20, 21, 19] по теоретико–модельному подходу к ординальному анализу; работы [61, 15, 16, 92] по так называемому методу ε-подстановок.

В работах автора [31, 30] был предложен новый подход к ординальному анализу формальной арифметики Пеано, основанный на схемах рефлексии и аппарате так называемых *алгебр доказуемости.* В настоящей работе мы систематизируем имеющиеся результаты в этом направлении, а также даём обзор результатов, касающихся применения схем рефлексии к изучению фрагментов арифметики.

Схемы рефлексии возникли в математической логике вскоре после доказательства Гёделем его фундаментальных теорем о неполноте [45].[1] Для данной теории T эти схемы представляют собой варианты формализации утверждения *"если формула φ доказуема в T, то φ истинна".* Они дают примеры истинных, но не доказуемых утверждений, обобщающих первый известный пример такого рода — гёделевскую формулу непротиворечивости теории T.

Тьюринг [93] ввёл в рассмотрение прогрессии теорий, получаемые итерированием процесса пополнения теории схемой рефлексии, и предложил возможный подход к ординальной классификации арифметических теорий на основе таких прогрессий. В дальнейшем этот подход был проанализирован и развит Феферманом в [41]. Однако, построенные Тьюрингом и Феферманом примеры показали, что на пути подобной классификации встают существенные трудности, связанные, в частности, с упомянутым выше вопросом о естественном представлении ординалов в арифметике.

Крайзель и Леви в [54] показали, что схемы рефлексии являются удобным инструментом для изучения вопросов логической сложности аксиоматизации формальных теорий. Ими была доказана дедуктивная эквива-

[1] Схемы рефлексии появились впервые, по-видимому, в работе Россера 1937 г. [78]. При этом Россер ссылается на неопубликованные результаты Клини, рассмотревшего в 1935 г. вариант логического правила, эквивалентный, в современной терминологии, равномерной схеме рефлексии (см. ниже §2.1).

лентность так называемой равномерной схемы рефлексии для примитивно рекурсивной арифметики и полной схемы индукции, откуда, в частности, вытекает невозможность задания арифметики Пеано множеством аксиом ограниченной кванторной сложности. В этой же работе была доказана эквивалентность схемы трансфинитной индукции до ординала ε_0 и равномерной схемы рефлексии для арифметики Пеано. В дальнейшем были установлены тесные связи между схемами рефлексии и другими истинными невыводимыми утверждениями, включая известный комбинаторный принцип Париса–Харрингтона. Обзор ранних (до 1977 г.) результатов, касающихся схем рефлексии, можно найти в работе Сморинского [5].

В настоящей работе демонстрируется, что систематическое использование схем рефлексии позволяет получить самые разнообразные результаты о строении данной теории и о её соотношении с другими теориями. В частности, мы получаем этим способом основные известные результаты о независимости, аксиоматизируемости, консервативности и классах доказуемо тотальных вычислимых функций для фрагментов PA, задаваемых различными ограничениями схемы индукции над элементарной арифметикой.

Алгебры доказуемости. Конечную схему рефлексии R над теорией T можно рассматривать как оператор, действующий на булевой алгебре Линденбаума теории T. Рассмотрение таких операторов естественным образом приводит к алгебраическим структурам, обогащающим алгебру Линденбаума, которые мы называем *алгебрами доказуемости* [30]. Простейшим примером такой структуры является *алгебра Магари теории* T, где в качестве R рассматривается гёделевская формула непротиворечивости (или двойственная ей формула доказуемости) в T [59]. Многообразие, порождённое такими алгебрами, активно изучалось в контексте так называемой *логики доказуемости* (см. [88, 35], а также [83, 85]). Используемое в настоящей работе обобщение логики доказуемости, соответствующее более сильным схемам рефлексии, было исследовано в [11, 48].

В [30] было показано, что алгебры доказуемости тесно связаны с ординалами аксиоматических систем, играющими важную роль в теории доказательств. Обнаружившиеся интересные связи позволяют по новому взглянуть на ряд классических результатов в этой области. В частности, из алгебры доказуемости для элементарной арифметики можно каноническим образом извлечь стандартную систему обозначений для ординала ε_0 и на этой основе получить новое доказательство непротиворечивости арифметики Пеано с помощью трансфинитной индукции в стиле Генцена. Изучение алгебр доказуемости позволяет также дать характеризацию класса доказуемо тотальных вычислимых функций арифметики Пеано и приводит к новым простым примерам утверждений комбинаторного характера, не выводимым в арифметике Пеано [31].

Содержание работы. В §1 вводятся основные понятия, касающиеся формальной арифметики, рассматриваются свойства формулы доказуемости, а также приводятся короткие доказательства теорем Гёделя, Россера и Лёба.

В §2 изучаются общие свойства схем локальной и равномерной рефлексии и доказываются так называемые теоремы Крайзеля–Леви о неограниченности.

В §3 приводятся простейшие результаты о доказуемо тотальных вычислимых функциях теорий и их связи со схемами рефлексии.

В §4 устанавливаются результаты о связи схем рефлексии и индукции в арифметике. Показано, что естественные фрагменты PA, задаваемые различными ограничениями схемы индукции, в точности соответствуют (дедуктивно эквивалентны) определённым схемам рефлексии над элементарной арифметикой EA. Здесь также получен важный для дальнейшего результат о консервативности схем над правилами рефлексии — так называемое свойство редукции.

Вместе с результатами §2 это позволяет единым методом получить ответ на ряд вопросов о свойствах фрагментов PA. Так, следствие 4.20 даёт характеризацию доказуемо тотальных вычислимых функциях в теории, аксиоматизируемой схемой индукции для Π_2-формул без параметров. Класс таких функций совпадает с примитивно рекурсивными функциями. Расширение этой теории схемой индукции для Σ_1-формул с параметрами имеет более широкий класс доказуемо тотальных вычислимых функций, совпадающий с классом дважды рекурсивных функций в смысле Р. Петер (следствие 6.3). Эти результаты, полученные в [28], по-видимому, являются наиболее интересными приложениями техники §§2 и 4.

В §5 исследуется понятие алгебры доказуемости и на этой основе излагается подход к ординальному анализу арифметики Пеано. В частности, мы даём новое доказательство непротиворечивости PA с помощью трансфинитной индукции до ординала ε_0. Также мы приводим простой пример истинного утверждения комбинаторного характера, недоказуемого в арифметике Пеано и естественно возникающего из алгебр доказуемости. Наконец, мы устанавливаем связь между алгебрами доказуемости и трансфинитными прогрессиями итерированных схем рефлексии по Тьюрингу–Феферману. Отсюда мы получаем характеризацию Π_n-следствий PA в терминах таких прогрессий.

1 Основные понятия

1.1 Элементарная арифметика

Язык элементарной арифметики — это язык первого порядка, содержащий бинарные предикатные символы $=$ и $\leq$; бинарные функциональные символы $+$ и $\cdot$; унарные функциональные символы S и $\exp$ и константу 0. *Стандартная модель* арифметики — это модель с унивесумом $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, на котором все символы интерпретируются естественным образом, в частности S есть функция следования $S(x) = x + 1$ и $\exp$ есть показательная функция $\exp(x) = 2^x$.

Формулы этого языка называются *арифметическими*. Мы будем следовать обычным соглашениям об опускании излишних скобок в формулах и пользоваться общепринятыми сокращениями, то есть будем писать, например, $x < y$ вместо $x \leq y \wedge \neg x = y$, 2^x вместо $\exp(x)$ и так далее.

Выражения $\forall x \leq t\ A(x)$ и $\exists x \leq t\ A(x)$ являются сокращениями для формул $\forall x\ (x \leq t \to A(x))$ и $\exists x\ (x \leq t \wedge A(x))$, соответственно (где t — любой терм, не содержащий переменной x). Вхождения кванторов такого вида называются *ограниченными*; ограниченными или *элементарными формулами* называются арифметические формулы, все вхождения кванторов в которые ограничены. Заметим, что по определению бескванторные формулы являются элементарными. Аналогично определяются выражения $\forall x < t\ A(x)$ и $\exists x < t\ A(x)$. *Элементарные предикаты* или *отношения* — это отношения, определимые элементарными формулами в стандартной модели арифметики.

Произвольные арифметические формулы классифицируются по своей логической сложности в классическую *арифметическую иерархию*. Для $n \geq 0$ классы Σ_n- and Π_n- формул определяются индуктивно следующим образом. Σ_0- и Π_0-формулы — это элементарные формулы. Σ_{n+1}-формулы — это формулы вида $\exists x_1 \ldots \exists x_m A(x_1, \ldots, x_m)$, где A — некоторая Π_n-формула. Π_{n+1}-формулы — это формулы вида $\forall x_1 \ldots \forall x_m A(x_1, \ldots, x_m)$, где A — некоторая Σ_n-формула.

По теореме о предваренной нормальной форме, всякая арифметическая формула логически эквивалентна Σ_n-формуле для некоторого n. Допуская вольность речи, мы будем иногда называть Σ_n-формулами также и формулы, логически эквивалентные Σ_n-формулам в смысле нашего официального определения.

С вычислительной точки зрения наиболее важным классом формул является Σ_1. Предикат является Σ_1-определимым в стандартной модели арифметики, если и только если он (рекурсивно) перечислим. Элементарные предикаты разрешимы, причем грубая оценка сложности разрешающей процедуры дает верхнюю оценку порядка 2^x_n на число её шагов, где n — некоторая константа, а x — размер входа. Здесь 2^x_n означает функцию

$$2^x_0 = x; \quad 2^x_{n+1} = 2^{2^x_n}.$$

Функции вида 2^x_n для фиксированного n называются *мультиэкспоненциальными,* таким образом всякий элементарный предикат разрешим за мультиэкспоненциальное время. Обратное также верно: всякий предикат, разрешимый за мультиэкспоненциальное время, элементарен (см. [8]).

Арифметика Пеано PA — теория первого порядка с равенством, сформулированная в арифметическом языке и задаваемая, помимо логических аксиом и аксиом равенства, следующими математическими аксиомами:

P1. $\neg S(a) = 0$

P2. $S(a) = S(b) \to a = b$

P3. $a + 0 = a$

P4. $a + S(b) = S(a + b)$

P5. $a \cdot 0 = 0$

P6. $a \cdot S(b) = a \cdot b + a$

P7. $\exp(0) = S(0)$

P8. $\exp(S(a)) = \exp(a) + \exp(a)$

P9. $a \leq 0 \leftrightarrow a = 0$

P10. $a \leq S(b) \leftrightarrow (a \leq b \vee a = S(b))$

вместе со следующей *схемой аксиом индукции*, для всех арифметических формул $\varphi(x)$ (возможно, содержащих параметры, т.е. свободные переменные помимо x):

$$\mathsf{IA}: \qquad \varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \varphi(x).$$

Элементарная арифметика EA аксиоматизируется над P1-P10 схемой индукции для элементарных формул $\varphi(x)$.

Элементарная арифметика представляет собой достаточно слабый фрагмент PA. Хорошо известно, что, аналогично PA, EA имеет эквивалентную формулировку в языке арифметики без символа экспоненты. Теория $I\Delta_0$ задается в этом языке аксиомами P1–P6, P9, P10 вместе со схемой индукции для Δ_0-формул (т.е. ограниченных формул языка без exp). График функции 2^x можно естественным образом определить некоторой Δ_0-формулой $\mathrm{Exp}(x, y)$ ([46], с. 299). Для этой формулы в $I\Delta_0$ выводимы аналоги аксиом P7, P8 и свойства функциональности и монотонности. Формула $\mathrm{Exp}(x, y)$ определяет интерпретацию EA в теории $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$, где Exp есть аксиома $\forall x \exists y\, \mathrm{Exp}(x, y)$, выражающая тотальность экспоненты ([46], с. 37). Фактически, EA дедуктивно эквивалентна консервативному дефинициальному расширению $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ с помощью символа для функции exp. Нетрудно убедиться в том, что эта интерпретация сохраняет классы Σ_n и Π_n-формул при $n \geq 1$ по модулю выводимости в $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$. (Класс элементарных отношений, однако, строго шире, чем класс Δ_0-отношений. Элементарные отношения совпадают с доказуемо Δ_1-отношениями для теории $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$.)

В отличие от PA, $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ и EA являются конечно аксиоматизируемыми теориями ([46], с. 366). Нетрудно убедиться, что EA аксиоматизируема формулами сложности Π_1 в арифметической иерархии, а $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ имеет сложность аксиоматизации Π_2 (в языке без exp).

Элементарными (по Кальмару) функциями называются функции, которые могут быть получены из функций $Z(x) \equiv 0,\ S,\ +,\ \cdot,\ 2^x$, функции

$$x \dot{-} y := \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq y \\ x - y, & \text{иначе} \end{cases}$$

и проектирующих функций $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ с помощью операций композиции и ограниченной минимизации [76]:

$$\mu i \leq z\ R(i, \vec{x}) := \begin{cases} y, & \text{если } y \leq z \text{ и } R(y, \vec{x}) \wedge \forall i < y \neg R(i, \vec{x}) \\ 0, & \text{если } \forall i \leq z \neg R(i, \vec{x}). \end{cases}$$

(Здесь R — предикат вида $g(i, \vec{x}) = 0$ для некоторой ранее определенной функции g.)

Класс элементарных функций обозначается $\mathcal{E}$ и совпадает с классом функций, вычислимых по Тьюрингу за мультиэкспоненциальное время (см. [8]). Класс $\mathcal{E}$ замкнут относительно операций ограниченного суммирования, ограниченного умножения и ограниченной примитивной рекурсии. Фактически, по модулю композиции и достаточно большого набора начальных функций каждая из этих операций эквивалентна ограниченной минимизации (см. [76], гл. 5).

Символы для всех элементарных функций могут быть естественным образом введены в консервативном дефинициальном расширении EA. В этом расширении любая ограниченная формула расширенного языка эквивалентна бескванторной. Более того, само это расширение можно аксиоматизировать множеством чисто универсальных (или бескванторных) формул. С другой стороны, всякая ограниченная формула расширенного языка эквивалентна ограниченной арифметической формуле, и то же самое относится к остальным классам арифметической иерархии. В частности, в дефинициальном расширении EA допустима индукция по ограниченным формулам расширенного языка. Таким образом, формулировки EA в стандартном и расширенном языках являются в сильном смысле эквивалентными, и мы часто будем их отождествлять. Вышеприведенные утверждения являются фольклорными; бескванторная формулировка EA подробно рассмотрена, например, в работе [72].

1.2 Формула доказуемости и теоремы Гёделя

Стандартная арифметизация синтаксиса теорий первого порядка, подробно развитая в работе Фефермана [40] для случая PA, или для случая примитивно рекурсивной арифметики в книге Сморинского [88], проходит и в элементарной арифметике без существенных изменений. Это связано с тем, что все необходимые для определения основных синтаксических понятий применения оператора примитивной рекурсии фактически являются мультиэкспоненциально ограниченными и тем самым допустимыми в EA (см. также [72]).

Формулы арифметического языка естественным образом отождествляются со словами в некотором конечном алфавите. В свою очередь, слова могут быть естественным взаимно однозначным образом отождествлены с натуральными числами, например с помощью преобразования их в двоичные слова и последующего двоичного декодирования. (Заметим, что последнее легко выражается в EA с помощью экспоненты и арифметических операций.) Таким образом мы фиксируем единое каноническое кодирование — или *гёделеву нумерацию* — всех выражений арифметического языка: переменных, термов, формул и т.д. Код или *гёделев номер* выражения τ обозначается $\ulcorner \tau \urcorner$. Нетрудно убедиться в том, что при таком кодировании естественные синтаксические отношения, такие как приведенные ниже, являются элементарными. Более того, их простейшие свойства, верифицируемые с помощью элементарной индукции, доказуемы в EA (см. [40]).

$x \in St$	"x есть гёделев номер арифметического предложения"
$x \in \Pi_n$	"x есть гёделев номер Π_n-формулы"
$LogAx(x)$	"x есть гёделев номер логической аксиомы"
$EqAx(x)$	"x есть гёделев номер аксиомы равенства"
$MP(x,y,z)$	"формула z следует из формул x и y по правилу *modus ponens*"
$Gen(x,y)$	"формула y следует из формулы x по правилу обобщения"

Мы также фиксируем взаимно-однозначную элементарную функцию кодирования конечных последовательностей натуральных чисел. $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ означает код последовательности $x_1,\dots,x_n$ и является элементарной функцией $x_1,\dots,x_n$ при каждом фиксированном n. $(x)_i$ означает $i+1$-й элемент последовательности, кодируемой числом x, и является элементарной функцией аргументов x и i. $\langle\ \rangle$ означает код пустой последовательности. Следующие функции и отношения также элементарны и естественно представимы в EA:

$Seq(x)$	"x есть код последовательности"
$lh(x)$	длина последовательности x
$end(x)$	последний элемент последовательности x
$x * y$	конкатенация последовательностей x и y

Мы предполагаем, что кодирование последовательностей доказуемо монотонно в том смысле, что код последовательности увеличивается при её удлиннении или увеличении любого из элементов.

Теориями мы будем называть теории первого порядка с равенством. Как правило, если не оговорено противное, мы будем подразумевать, что теории сформулированы в арифметическом языке и содержат EA. Теория T называется *элементарно аксиоматизированной,* если множество гёделевых номеров ее (математических) аксиом элементарно, то есть определено некоторой ограниченной формулой $\mathsf{Ax}_T(x)$. Все обычные теории, такие как EA, PA и другие, встречающиеся в данной работе, являются элементарно аксиоматизированными. Более того, в силу известной леммы Крейга [40] всякая перечислимая теория имеет элементарную аксиоматизацию, и таким образом элементарная аксиоматизируемость не является существенно ограничительным условием. Теория T называется *корректной*, если все теоремы T истинны в стандартной модели арифметики. Теория T *Σ_n-корректна*, если все ее теоремы арифметической сложности Σ_n истинны в стандартной модели. Теории T и U называются дедуктивно эквивалентными, если у них одно и то же множество теорем (обозначается $T \equiv U$). Если T и U — элементарно аксиоматизированные теории, то через $T+U$ обозначается теория, аксиомы которой задаются формулой $\mathsf{Ax}_T(x) \vee \mathsf{Ax}_U(x)$.

С любой элементарно аксиоматизированной теорией T связывается предикат *"y кодирует вывод формулы x в теории T"*, задаваемый элементарной формулой $\mathsf{Prf}_T(y,x)$. Формула $\mathsf{Prf}_T(y,x)$ строится следующим образом, буквально следуя гильбертовскому определению вывода в логике первого порядка:

$$\begin{aligned}\mathsf{Prf}_T(y,x) \;:=\; & Seq(y) \land end(y) = x \land \\ & \forall n < lh(y)\,[LogAx((y)_n) \lor EqAx((y)_n) \lor \mathsf{Ax}_T((y)_n) \\ & \qquad\qquad \lor \exists i,j < n\, MP((y)_i,(y)_j,(y)_n) \\ & \qquad\qquad \lor \exists i < n\, Gen((y)_i,(y)_n)].\end{aligned}$$

Другими словами, y кодирует последовательность формул, заканчивающуюся на x, такую что каждый элемент y является или логической аксиомой, или аксиомой равенства, или математической аксиомой T, или следует из предыдущих формул по правилам *modus ponens* или обобщения.

Гёделевская формула $\Box_T(x)$ доказуемости в T определяется как $\exists y\,\mathsf{Prf}_T(y,x)$. Мы используем следующие стандартные сокращения. Замкнутые термы вида $S(S(\ldots S(0)\ldots))$ (n раз) называются *нумералами* и обозначаются $\overline{n}$. Мы также опускаем черту в тех случаях, когда n невозможно спутать с переменной. Если φ — формула, мы пишем $\Box_T\varphi$ вместо $\Box_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$. Символ $\bot$ означает логическую связку "ложь", а $\mathsf{Con}(T)$ есть формула непротиворечивости теории T, определяемая как $\neg\Box_T\bot$. Выражение $\ulcorner\sigma(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_k)\urcorner$ означает естественный элементарный определимый терм для функции, сопоставляющей последовательности $n_1,\ldots,n_k$ гёделев номер $\ulcorner\sigma(\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k)\urcorner$ результата подстановки нумералов $\overline{n}_1,\ldots,\overline{n}_k$ вместо переменных $x_1,\ldots,x_k$ в формулу σ. Мы также пишем $\Box_T\sigma(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)$ вместо $\Box_T(\ulcorner\sigma(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\urcorner)$.

Предложение 1.1 (условия Лёба). *Для любых предложений* φ,ψ

L1. $T\vdash\varphi \implies \mathsf{EA}\vdash\Box_T\varphi$

L2. $\mathsf{EA}\vdash\Box_T(\varphi\to\psi)\to(\Box_T\varphi\to\Box_T\psi)$

L3. $\mathsf{EA}\vdash\Box_T\varphi\to\Box_T\Box_T\varphi$

Аналогичные утверждения имеют место и для формул со свободными переменными.

L1°. $T\vdash\varphi(x) \implies \mathsf{EA}\vdash\Box_T\varphi(\dot{x})$

L2°. $\mathsf{EA}\vdash\Box_T(\varphi(\dot{x})\to\psi(\dot{x}))\to(\Box_T\varphi(\dot{x})\to\Box_T\psi(\dot{x}))$

L3°. $\mathsf{EA}\vdash\Box_T\varphi(\dot{x})\to\Box_T\Box_T\varphi(\dot{x})$

L4°. $\mathsf{EA}\vdash\Box_T\forall x\varphi(x)\to\forall x\,\Box_T\varphi(\dot{x})$

Заметим, что L4° следует из L1° и L2° с помощью аксиомы $\forall x\varphi(x)\to\varphi(x)$. Свойства L3 и L3° следуют из более общего утверждения, известного как *доказуемая* Σ_1*-полнота* [46, 88].

Предложение 1.2. (i) *Для любого* Σ_1*-предложения* σ

$$\mathsf{EA}\vdash\sigma\to\Box_T\sigma.$$

(ii) *Для любой Σ_1-формулы $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, где все свободные переменные σ указаны явно,*

$$\mathsf{EA} \vdash \sigma(x_1, \ldots, x_n) \to \Box_T \sigma(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n).$$

Возможность формализации Σ_1-полноты теории T в EA следует из наличия мультиэкспоненциальной оценки на размер EA-доказательства одной из формул $\varphi(\overline{n})$ или $\neg\varphi(\overline{n})$ в зависимости от n для любой элементарной формулы $\varphi(x)$ (см. [88] и [46], с. 175).

Для доказательства теорем Гёделя о неполноте и многих других результатов ключевую роль играет следующая арифметическая *лемма о неподвижной точке* [40, 88].

Предложение 1.3. (i) *Для любой формулы $\varphi(x)$ найдется формула ψ, зависящая от свободных переменных φ кроме x, такая что*

$$\mathsf{EA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

(ii) *Для любой формулы $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ найдется формула $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, такая что*

$$\mathsf{EA} \vdash \psi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \urcorner).$$

Следующее обобщение теоремы Гёделя известно как теорема Лёба [58]. Ввиду его важности для настоящей работы мы приводим короткое доказательство.

Теорема 1 (Лёб). *Для любой элементарно аксиоматизированной теории T, содержащей EA, и любого предложения φ*

$$T \vdash \Box_T \varphi \to \varphi \iff T \vdash \varphi.$$

Доказательство. Импликация ($\Leftarrow$) очевидна. Для доказательства противоположной импликации, с помощью леммы о неподвижной точке мы получаем предложение ψ такое, что

$$\mathsf{EA} \vdash \psi \leftrightarrow (\Box_T \psi \to \varphi).$$

Опираясь на условия Лёба и тот факт, что теория T содержит EA, мы последовательно выводим в T:

1. $\Box_T(\psi \to (\Box_T \psi \to \varphi))$
2. $\Box_T \psi \to \Box_T(\Box_T \psi \to \varphi)$
3. $\Box_T \psi \to (\Box_T \Box_T \psi \to \Box_T \varphi)$
4. $\Box_T \psi \to \Box_T \varphi$
5. $\Box_T \psi \to \varphi$, поскольку $T \vdash \Box_T \varphi \to \varphi$
6. ψ
7. $\Box_T \psi$

8. φ. $\boxtimes$

Подставляя $\bot$ вместо φ, как следствие получаем вторую теорему Гёделя о неполноте [45].

Теорема 2 (Гёдель). *Для любой элементарно аксиоматизированной теории T, содержащей EA,*

(i) *если T непротиворечива, то $T \nvdash \mathsf{Con}(T)$;*

(ii) *если, кроме того, T Σ_1-корректна, то $T \nvdash \neg\mathsf{Con}(T)$.*

Замечание 1.4. Теорема Лёба может в свою очередь рассматриваться как следствие второй теоремы Гёделя для теории $T + \neg\varphi$ при условии, что аксиомы этой теории определены формулой $\mathsf{Ax}_{T+\neg\varphi}(x) := \mathsf{Ax}_T(x) \vee x = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$. Для соответствующего предиката доказуемости имеем

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Con}(T + \neg\varphi) \leftrightarrow \neg\Box_T\varphi,$$

в силу формализуемости теоремы о дедукции в EA (см. [40]).

Следующее утверждение представляет собой формализацию теоремы Лёба и может быть выведено с помощью условий Лёба из неформализованного варианта этой теоремы (см. [35]).

Следствие 1.5. *Для любого предложения φ,*

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T(\Box_T\varphi \to \varphi) \to \Box_T\varphi.$$

Доказательство. Обозначим формулу $\Box_T(\Box_T\varphi \to \varphi) \to \Box_T\varphi$ через ψ. Опираясь на условия Лёба нетрудно вывести, что

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T\psi \to \psi. \tag{1}$$

Отсюда, по теореме 1, $T \vdash \psi$, а значит $\mathsf{EA} \vdash \Box_T\psi$ и $\mathsf{EA} \vdash \psi$ в силу (1). $\boxtimes$

Приведём также известную теорему Дж.Б. Россера, обобщающую первую теорему Гёделя о неполноте [77].

Теорема 3 (Россер). *Для любой непротиворечивой перечислимой теории T, содержащей EA, найдётся такое Σ_1-предложение φ, что $T \nvdash \varphi$ и $T \nvdash \neg\varphi$.*

Доказательство. Рассмотрим какую-либо элементарную аксиоматизацию теории T. В качестве φ возьмём неподвижную точку

$$\mathsf{EA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y\, (\mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner\neg\varphi\urcorner) \wedge \forall z < y\, \neg\mathsf{Prf}_T(z, \ulcorner\varphi\urcorner)).$$

Допустим $T \vdash \neg\varphi$, тогда если m — код некоторого вывода формулы $\neg\varphi$, получаем

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Prf}_T(\overline{m}, \ulcorner\neg\varphi\urcorner) \wedge \forall z < \overline{m}\, \neg\mathsf{Prf}_T(z, \ulcorner\varphi\urcorner),$$

в силу Σ_1-полноты, откуда вытекает $T \vdash \varphi$ по определению φ и противоречие в T. Если же $T \vdash \varphi$ и n — код некоторого вывода формулы φ, получаем в силу определения φ

$$T \vdash \exists y \leq \overline{n}\, \mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner \neg\varphi \urcorner).$$

Поскольку теория T непротиворечива, $T \nvdash \neg\varphi$, то есть Σ_1-формула

$$\forall y \leq \overline{n}\, \neg\mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner \neg\varphi \urcorner)$$

истинна. Но тогда она выводима в EA и мы получаем противоречие в T. $\boxtimes$

1.3 Логика доказуемости

Базисная логика доказуемости Гёделя–Лёба **GL** формулируется в языке пропозициональной логики высказываний, обогащенном унарной связкой $\Box$. Формулы этого языка называем *модальными*. Выражения $\Diamond\varphi$, $\Box^+\varphi$ и $\Box^n\varphi$ суть сокращения для $\neg\Box\neg\varphi$, $\varphi \wedge \Box\varphi$ и $\Box\Box\ldots\Box\varphi$ (n раз), соответственно. Логика **GL** определяется следующими аксиомами и правилами вывода:

Аксиомы: A1. Тавтологии булевой логики высказываний;

A2. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$;

A3. $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$;

A4. $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$.

Правила вывода: *modus ponens* и $\varphi \vdash \Box\varphi$ (*усиление*).

Арифметической реализацией языка **GL** мы называем любую функцию $(\cdot)^*$, отображающую пропозициональные переменные во множество арифметических предложений. Для всякой модальной формулы φ $(\varphi)^*_T$ означает результат подстановки вместо пропозициональных переменных φ соответствующих арифметических предложений и расшифровки $\Box$ как формулы доказуемости $\Box_T$:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi \to \psi)^*_T & := & ((\varphi)^*_T \to (\psi)^*_T) \\ (\neg\varphi)^*_T & := & \neg(\varphi)^*_T \\ (\Box\varphi)^*_T & := & \Box_T(\varphi)^*_T. \end{array}$$

Нетрудно видеть, что при этой интерпретации аксиомы A2, A3 и правило усиления соответствуют трем условиям Лёба, а аксиома A4 есть формализация теоремы Лёба (см. следствие 1.5). Отсюда следует, что для любой модальной формулы φ $\mathbf{GL} \vdash \varphi$ влечет $\mathsf{EA} \vdash (\varphi)^*_T$ для любой арифметической реализации $(\cdot)^*$ переменных φ. Противоположная импликация для случая Σ_1-корректной теории T также верна. Это утверждение составляет содержание известной теоремы Р. Соловея об *арифметической полноте* **GL** (см. [89, 35]).

Теорема 4 (Соловей). *Пусть элементарно аксиоматизированная теория T Σ_1-корректна и содержит* EA. *Тогда*

$$\mathbf{GL} \vdash \varphi \iff T \vdash (\varphi)^*_T \text{ для любой реализации } (\cdot)^* \text{ переменных } \varphi.$$

Удобным инструментом исследования логики доказуемости являются модели Крипке. *Моделью Крипке* называется тройка $\mathcal{W} = (W, R, \Vdash)$, где

1. W есть непустое конечное множество;
2. R есть отношение иррефлексивного частичного порядка на W;
3. $\Vdash$ есть отношение вынуждения между элементами W (*мирами*) и модальными формулами такое, что

$$\begin{aligned} x \Vdash \neg\varphi &\iff x \nVdash \varphi, \\ x \Vdash (\varphi \to \psi) &\iff (x \nVdash \varphi \text{ или } x \Vdash \psi), \\ x \Vdash \Box\varphi &\iff \forall y \in W\ (xRy \Rightarrow y \Vdash \varphi). \end{aligned}$$

Пишем $\mathcal{W} \vDash \varphi$, если $\forall x \in W\ x \Vdash \varphi$. Доказательство следующей теоремы, принадлежащей К. Сегербергу [81], можно также найти, например, в [88, 35].

Теорема 5. *Для любой формулы φ,*

$$\mathbf{GL} \vdash \varphi \iff \mathcal{W} \vDash \varphi \text{ для любой модели Крипке } \mathcal{W}.$$

Эта теорема дает полезный критерий проверки модальных формул на выводимость в **GL**. Таким образом, логика **GL** является разрешимой, полной и финитно аппроксимируемой по Крипке. Известно также, что **GL** обладает интерполяционным свойством Крейга и имеет естественную секвенциальную формулировку без правила сечения.

Изучение логики доказуемости и её обобщений представляет собой достаточно обширную область исследований, выходящую за рамки данной статьи. Этому предмету посвящены ряд обзоров [39, 18, 57, 94] и монографий [33, 88, 35]. В настоящей работе мы будем опираться на полноту **GL** по Крипке. Однако мы используем лишь *корректность* **GL** относительно арифметической интерпретации, то есть не опираемся на наиболее трудную часть теоремы Соловея.

2 Схемы рефлексии

Для данной теории T схемы рефлексии представляют собой варианты формализации утверждения о корректности T. Мы вынуждены иметь дело именно со схемами, поскольку в силу известной теоремы Тарского понятие *истинности* арифметической формулы является невыразимым в языке арифметики. Тем самым, утверждение “любое доказуемое предложение истинно” невозможно выразить одной арифметической формулой. Поскольку корректность T относительно некоторой модели влечёт её непротиворечивость, схемы рефлексии для T не доказуемы в самой теории T. В этом разделе мы рассмотрим основные формы и общие свойства схем рефлексии.

2.1 Формы рефлексии

Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория. Две основных формы схемы рефлексии суть:

- *Локальная* схема рефлексии $\mathsf{Rfn}(T)$:
$$\Box_T \varphi \to \varphi,$$
для всех арифметических предложений φ;
- *Равномерная* схема рефлексии $\mathsf{RFN}(T)$:
$$\forall x_1 \dots \forall x_n \, (\Box_T \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \to \varphi(x_1, \dots, x_n)),$$
для всех арифметических формул $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Очевидно, для любой теории T
$$\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}(T) \vdash \mathsf{Rfn}(T) \quad \text{и} \quad \mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}(T) \vdash \mathsf{Con}(T).$$

Значит, по теореме Гёделя, ни одна из двух схем рефлексии не выводима в T при условии непротиворечивости T. Теорема Лёба говорит о том, что, фактически, ни один нетривиальный частный случай локальной и, тем более, равномерной схемы рефлексии не является выводимым в T.

Другие естественные формы принципа рефлексии, как правило, сводятся к одной из этих двух. Например, функция кодирования последовательностей позволяет свернуть несколько свободных переменных в одну, и таким образом схема
$$\forall x \, (\Box_T \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x))$$
для формул $\varphi(x)$ с единственной свободной переменной x эквивалентна $\mathsf{RFN}(T)$ над EA. С. Феферман [41] установил

Предложение 2.1. *Следующие схемы и правила эквивалентны над* EA*:*

(a) $\mathsf{RFN}(T)$;

(b) $\forall x \Box_T \varphi(\dot{x}) \to \forall x \varphi(x)$;

(c) $\dfrac{\forall x \Box_T \varphi(\dot{x})}{\forall x \varphi(x)}$ *(правило Клини).*

Доказательство. Нам будет полезна следующая лемма [41], называемая иногда “явным принципом рефлексии”, поскольку она утверждает доказуемость схемы рефлексии для “стандартных” или “явных” выводов.

Лемма 2.2. (i) *Для любой формулы $\varphi(x)$ и любых $m, n \in \mathbb{N}$*
$$T \vdash \mathsf{Prf}_T(\overline{m}, \ulcorner \varphi(\overline{n}) \urcorner) \to \varphi(\overline{n}).$$

(ii) *Утверждение (i) формализуемо в* EA*, то есть*
$$\mathsf{EA} \vdash \forall x, y \, \Box_T(\mathsf{Prf}_T(\dot{y}, \ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \varphi(\dot{x})).$$

Доказательство. Достаточно доказать (ii). С одной стороны,

$$\begin{aligned}\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) &\to \Box_T\varphi(\dot{x})\\ &\to \Box_T(\mathsf{Prf}_T(\dot{y}, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \varphi(\dot{x})).\end{aligned}$$

С другой стороны, по доказуемой Σ_1-полноте

$$\begin{aligned}\mathsf{EA} \vdash \neg\mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) &\to \Box_T\neg\mathsf{Prf}_T(\dot{y}, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner)\\ &\to \Box_T(\mathsf{Prf}_T(\dot{y}, \ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \varphi(\dot{x})).\end{aligned}$$

Комбинируя вместе эти две формулы получаем требуемое. ⊠

Применяя правило Клини (c) к доказуемой формуле из части (ii) предыдущей леммы мы получаем вывод соответствующего частного случая схемы $\mathsf{RFN}(T)$. Таким образом, (c) влечёт (a). Импликации (a)⇒(b) и (b)⇒(c) очевидны. ⊠

Замечание 2.3. В отличие от правила Клини, правило локальной рефлексии, т. е. правило

$$\frac{\Box_T\varphi}{\varphi}$$

для *предложений* φ, является допустимым в T при условии Σ_1-корректности T. Допустимость этого правила выражается формулой

$$\forall x\, (\Box_T\Box_T(\dot{x}) \to \Box_T(x)),$$

которая представляет собой частный случай равномерной схемы рефлексии и тем самым не выводима в T. Таким образом, правило локальной рефлексии является допустимым, но не доказуемо допустимым, в T. Как показал Р. Парих [66], добавление этого правила к T приводит к существенному ускорению некоторых выводов в T, превышающему любую доказуемо тотальную вычислимую функцию.

2.2 Схемы частичной рефлексии

Схемы *частичной* рефлексии получаются из локальной и равномерной схем наложением ограничения, состоящего в том, что формула φ пробегает лишь некоторый подкласс Γ класса всех арифметических предложений (формул). Такие схемы обозначаются $\mathsf{Rfn}_\Gamma(T)$ и $\mathsf{RFN}_\Gamma(T)$, соответственно, а в качестве Γ обычно рассматривается один из классов Σ_n или Π_n арифметической иерархии.

Лемма 2.4. *Следующие схемы эквивалентны над* EA *для любого* $n \geq 1$*:*

(i) $\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T) \equiv \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$*;*

(ii) $\mathsf{RFN}_{\Pi_1}(T) \equiv \mathsf{Rfn}_{\Pi_1}(T) \equiv \mathsf{Con}(T)$*.*

Доказательство. (i) Рассмотрим Π_{n+1}-формулу $\forall y \varphi(y,x)$, где $\varphi(y,x) \in \Sigma_n$. Тогда в $\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ можно, пользуясь свойством L4°, вывести

$$\begin{array}{rcl} \vdash \Box_T \forall y \varphi(y,\dot{x}) & \to & \forall y \Box_T \varphi(\dot{y},\dot{x}) \\ & \to & \forall y \varphi(y,x). \end{array}$$

(ii) Для формулы $\varphi(x) \in \Pi_1$, используя доказуемую Σ_1-полноту, выводим в EA:

$$\begin{array}{rcl} \vdash \Box_T \varphi(\dot{x}) \wedge \neg\varphi(x) & \to & \Box_T \neg\varphi(\dot{x}) \\ & \to & \Box_T(\varphi(\dot{x}) \wedge \neg\varphi(\dot{x})) \\ & \to & \Box_T \bot. \end{array}$$

Следовательно, $\neg\Box_T\bot$ влечет $\Box_T\varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)$. ⊠

Замечание 2.5. Для $n \geq 1$ арифметическая сложность всех примеров схемы $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ есть Π_n.

Схемы частичной равномерной рефлексии обладают важным свойством конечной аксиоматизируемости. Как хорошо известно, классы Σ_n- и Π_n-формул имеют определения истинности в теории EA [88, 46].

Предложение 2.6. *Для любого $n \geq 1$ существует арифметическая Π_n-формула $\mathsf{True}_{\Pi_n}(x)$ такая, что для всех Π_n-формул $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$*

$$\mathsf{EA} \vdash \varphi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\urcorner).$$

Аналогично для классов Σ_n.

Формула $\mathsf{True}_{\Pi_n}(x)$ называется *определением истинности* для Π_n-формул в EA.

Лемма 2.7. *Над EA схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ для $n \geq 1$ эквивалентна её универсальному частному случаю*

$$\forall z\, (\Box_T \mathsf{True}_{\Pi_n}(\dot{z}) \to \mathsf{True}_{\Pi_n}(z)). \qquad (*)$$

Аналогичное утверждение имеет место для класса Σ_n.

Доказательство. Для вывода $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ из формулы $(*)$ заметим, что предложение 2.6 влечет

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \Box_T(\varphi(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n) \leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\urcorner)),$$

и, следовательно, можно вывести

$$\begin{array}{rcl} \vdash \Box_T\varphi(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n) & \to & \Box_T \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\urcorner) \\ & \to & \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\urcorner), \quad \text{из } (*) \text{ с } z = \ulcorner\varphi(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\urcorner \\ & \to & \varphi(x_1,\ldots,x_n). \qquad ⊠ \end{array}$$

Следствие 2.8. *Схемы $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ и $\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ для $n \geq 1$ конечно аксиоматизируемы над EA.*

2.3 n-доказуемость и n-непротиворечивость

На равномерные схемы частичной рефлексии можно смотреть как на аналоги гёделевской формулы непротиворечивости.

Обозначим множество всех истинных арифметических Π_n-предложений для $n \geq 1$ через $\mathsf{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$. Теория T называется *n-непротиворечивой*, если $T + \mathsf{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$ непротиворечива. n-непротиворечивость T может быть выражена следующей формулой, обозначаемой $n\text{-}\mathsf{Con}(T)$:

$$\forall z\,(\mathsf{True}_{\Pi_n}(z) \to \neg\Box_T \neg\mathsf{True}_{\Pi_n}(\dot{z})).$$

Содержательно эта формула говорит о совместимости с T любого истинного Π_n-предложения. С точностью до контрапозиции формула $n\text{-}\mathsf{Con}(T)$ совпадает с универсальным частным случаем схемы $\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$, то есть мы имеем следующее очевидное следствие леммы 2.7.

Лемма 2.9. *Для $n \geq 1$ схема $\mathsf{RFN}_{\Sigma_n}(T)$ эквивалентна формуле $n\text{-}\mathsf{Con}(T)$ над EA.*

Отсюда естественно возникает *формула n-доказуемости*

$$[n]_T\varphi := \neg\, n\text{-}\mathsf{Con}(T + \neg\varphi),$$

выражающая доказуемость φ в теории $T + \mathsf{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$. Заметим, что формула $n\text{-}\mathsf{Con}(T)$ имеет сложность Π_{n+1}, а формула $[n]_T\varphi$, тем самым, Σ_{n+1}. Считаем, что для $n = 0$ формулы n-доказуемости и n-непротиворечивости совпадают с обычными формулами $\Box_T$ и $\mathsf{Con}(T)$. Мы также будем использовать $\langle n\rangle_T\varphi$ как сокращение для $n\text{-}\mathsf{Con}(T + \varphi)$.

Свойства формулы n-доказуемости аналогичны свойствам обычной формулы доказуемости. Прежде всего, $[n]_T$ удовлетворяет условиям Лёба.

Предложение 2.10.

L1^n. $T \vdash \varphi \;\Rightarrow\; \mathsf{EA} \vdash [n]_T\varphi$;

L2^n. $\mathsf{EA} \vdash [n]_T(\varphi \to \psi) \to ([n]_T\varphi \to [n]_T\psi)$;

L3^n. $\mathsf{EA} \vdash [n]_T\varphi \to [n]_T[n]_T\varphi$.

Аналогичные утверждения также имеют место для формул со свободными переменными.

Доказательство. Первые два условия легко проверяются с учётом того, что

$$\mathsf{EA} \vdash [n]_T\varphi \leftrightarrow \exists z\,(\mathsf{True}_{\Pi_n}(z) \wedge \Box_T(\mathsf{True}_{\Pi_n}(\dot{z}) \to \varphi).$$

Третье условие вытекает из более общего факта *доказуемой Σ_{n+1}-полноты.*

Предложение 2.11. *Для любой Σ_{n+1}-формулы $\sigma(x_1, \ldots, x_k)$, где все свободные переменные σ указаны явно,*

$$\mathsf{EA} \vdash \sigma(x_1, \ldots, x_k) \to [n]_T\sigma(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k).$$

Доказательство. Пусть $\sigma = \exists x \sigma_0(x)$, где $\sigma_0 \in \Pi_n$. Тогда мы имеем, пренебрегая остальными свободными переменными,

$$\mathsf{EA} \vdash \sigma_0(x) \leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \sigma_0(\dot{x}) \urcorner),$$

а также

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T(\sigma_0(\dot{x}) \leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \sigma_0(\dot{x}) \urcorner)).$$

Поэтому

$$\mathsf{EA} \vdash \sigma_0(x) \to \exists z\, (\mathsf{True}_{\Pi_n}(z) \wedge \Box_T(\mathsf{True}_{\Pi_n}(\dot{z}) \to \sigma_0(\dot{x}))),$$

где в качестве z можно взять значение терма $\ulcorner \sigma_0(\dot{x}) \urcorner$. То есть,

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{EA} \vdash \sigma_0(x) & \to & [n]_T \sigma_0(\dot{x}), \\ & \to & [n]_T \exists x \sigma_0(x) \\ & \to & [n]_T \sigma. \end{array}$$

Отсюда $\mathsf{EA} \vdash \exists x \sigma_0(x) \to [n]_T \sigma$. ⊠

Как стандартное следствие условий Лёба и леммы о неподвижной точке мы получаем аналог формализованной теоремы Лёба.

Предложение 2.12. *Для любой формулы φ,*

$$\mathsf{EA} \vdash [n]_T([n]_T \varphi \to \varphi) \to [n]_T \varphi.$$

На формулу n-доказуемости можно также перенести понятие логики доказуемости. Рассмотрим язык логики высказываний с модальностью $[n]$ и обозначим через $\mathbf{GL}^n$ вариант логики $\mathbf{GL}$ в этом языке. Арифметическая интерпретация $(\varphi)^*_T$ модальной формулы φ определяется как обычно, с той разницей, что $[n]$ расшифровывается как n-доказуемость в теории T:

$$([n]\varphi)^*_T = [n]_T(\varphi)^*_T.$$

Из предложений 2.10 и 2.12 вытекает

Следствие 2.13. *Если $\mathbf{GL}^n \vdash \varphi$, то $\mathsf{EA} \vdash (\varphi)^*_T$ для любой реализации $(\cdot)^*$ переменных φ.*

Фактически, как показал К. Сморинский [88], на логику n-доказуемости переносится без больших изменений и теорема Соловея.

Предложение 2.14. *Пусть элементарно аксиоматизированная теория T Σ_{n+1}-корректна и содержит EA. Тогда*

$$\mathbf{GL}^n \vdash \varphi \iff T \vdash (\varphi)^*_T \text{ для любой реализации } (\cdot)^* \text{ переменных } \varphi.$$

Замечание 2.15. Понятие n-непротиворечивости играет в данной работе большую роль. Отметим, что Гёдель рассматривал родственное, но не эквивалентное, понятие ω-непротиворечивости. Теория T *ω-противоречива*, если для некоторой формулы $\varphi(x)$ одновременно имеют место условия:

(i) $T \vdash \exists x \varphi(x)$;

(ii) $T \vdash \neg\varphi(0),\ \neg\varphi(1),\ \neg\varphi(2), \ldots$

В противном случае T называется ω-непротиворечивой.

В современных изложениях теорем Гёделя условие ω-непротиворечивости теории часто заменяется на более слабое условие Σ_1-корректности. К. Сморинский [86] показал, что формула, естественным образом выражающая ω-непротиворечивость T, эквивалентна $\mathsf{RFN}_{\Pi_3}(T + \mathsf{RFN}(T))$. Таким образом, формула ω-непротиворечивости выражается через более удобные схемы рефлексии.

2.4 Теоремы о неограниченности

Многие приложения схем рефлексии для анализа формальных теорий основываются на так называемых *теоремах о неограниченности,* принадлежащих Крайзелю и Леви.

Говорят, что теория U есть *конечное расширение* теории T, если она аксиоматизируема над T конечным числом предложений. U называется *расширением T арифметической сложности* Γ или Γ*-расширением* T, если U аксиоматизируема над T множеством предложений из класса Γ. В качестве Γ обычно рассматривается один из классов арифметической иерархии. (Заметим, что, в принципе, множество гёделевых номеров аксиом U может не быть перечислимым или даже арифметическим. Речь идет о сложности формул, аксиоматизирующих U.) Теория U называется Γ-консервативной над T, если для любого предложения $\varphi \in \Gamma$ $U \vdash \varphi$ влечет $T \vdash \varphi$ (обозначение $U \subseteq_\Gamma T$).

Предложение 2.16. *Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория.*

(i) $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ *не содержится ни в одном непротиворечивом конечном расширении T сложности Σ_n (и двойственно для Rfn_{Σ_n}).*

(ii) $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ *не содержится ни в одном непротиворечивом расширении T сложности Σ_n.*

Доказательство. (i) Допустим $T + \varphi \vdash \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$, где $\varphi \in \Sigma_n$. Тогда, в частности,

$$T + \varphi \vdash \Box_T \neg\varphi \to \neg\varphi.$$

Поэтому

$$\begin{array}{rcl} T & \vdash & \varphi \to (\Box_T \neg\varphi \to \neg\varphi), \\ & \vdash & \Box_T \neg\varphi \to \neg\varphi. \end{array}$$

Отсюда по теореме Лёба $T \vdash \neg\varphi$, то есть теория $T + \varphi$ противречива.

(ii) Допустим, что U — расширение T сложности Σ_n, такое что $U \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$. Поскольку схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ конечно аксиоматизируема, существует конечная подтеория $U_0 \subseteq U$, такая что $U_0 \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$. Но тогда U_0

также содержит $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$, и в силу (i) $T + U_0$ является противоречивой. Следовательно, такова и теория U. $\boxtimes$

Следствие 2.17. *Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория.*

(i) $\mathsf{Rfn}(T)$ *не содержится ни в одном конечном непротиворечивом расширении T.*

(ii) $\mathsf{RFN}(T)$ *не содержится ни в одном непротиворечивом расширении T ограниченной арифметической сложности.*

Пример 2.18. Согласно теореме Крайзеля–Леви, арифметика Пеано PA доказывает $\mathsf{RFN}(\mathsf{EA})$. Следовательно, PA не только не является конечно аксиоматизируемой теорией, но и не содержится ни в каком расширении EA ограниченной арифметической сложности.

Следствие 2.19. *Если теория T Σ_1-корректна, то*

$$T + \mathsf{Rfn}(T) \nvdash \mathsf{RFN}(T).$$

Доказательство. Пусть U — расширение T множеством всех истинных Π_1 предложений. (Теория U неперечислима, но является Π_1-расширением T.) Поскольку T не доказывает ложных Σ_1-предложений, U непротиворечива. По предыдущему следствию $U \nvdash \mathsf{RFN}(T)$. С другой стороны, $U \vdash \mathsf{Rfn}(T)$, поскольку

$$\begin{array}{rcl} T \vdash \varphi & \Rightarrow & T \vdash \Box_T\varphi \to \varphi, \quad \text{и} \\ T \nvdash \varphi & \Rightarrow & \mathbb{N} \models \neg\Box_T\varphi \ \Rightarrow \\ U \vdash \neg\Box_T\varphi & \Rightarrow & U \vdash \Box_T\varphi \to \varphi. \qquad \boxtimes \end{array}$$

Замечание 2.20. Условие Σ_1-корректности в этом известном утверждении может быть ослаблено, однако это требует более глубоких соображений (см. следствие 2.38 ниже).

Часть (i) теоремы 2.16 и следствия 2.17 имеет важное усиление. Слово “конечное” в них может быть заменено на “рекурсивно перечислимое”. Это вытекает из следующего результата.

Лемма 2.21. *Пусть U — непротиворечивое перечислимое расширение T сложности Σ_n. Тогда найдется Σ_n-предложение φ такое, что $T+\varphi$ непротиворечива и содержит U. (Двойственно для Π_n-аксиоматизированных расширений.)*

Доказательство. Для теорий, содержащих схему Σ_1-подстановки, в частности для PA, результат вытекает непосредственно из теоремы 4 работы Линдстрема [56]. Однако, для более слабых теорий требуется модификация этой конструкции, которую мы приводим ниже.

По лемме Крейга можно считать, что множество гёделевых номеров Σ_n-аксиом теории U над T задается некоторой элементарной формулой $\mathsf{Ax}_U(x)$. Кроме того, определение истинности для Σ_n-формул имеет вид

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{True}_{\Sigma_n}(x) \leftrightarrow \exists z\, \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}(z, x),$$

для некоторой формулы $\mathsf{Wit}_{\Sigma_n}(z, x) \in \Pi_{n-1}$. Рассмотрим неподвижную точку φ такую, что

$$\mathsf{EA} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists x \exists z\, (\forall y \leq x\, (\mathsf{Ax}_U(y) \to \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_y, y)) \wedge \mathsf{Prf}_T(x, \ulcorner \neg\varphi \urcorner)).$$

Мы утверждаем, что φ удовлетворяет условиям леммы.

1) Теория $T + \varphi$ непротиворечива. Действительно, в противном случае найдется число m такое, что

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Prf}_T(\overline{m}, \ulcorner \neg\varphi \urcorner).$$

С другой стороны, для каждой аксиомы $\sigma \in \Sigma_n$ теории U такой, что $\ulcorner \sigma \urcorner = y \leq m$ мы имеем $U \vdash \exists z_y\, \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}(z_y, \overline{y})$. Поскольку для данного m таких формул σ существует лишь конечное число, все соответствующие z_y можно собрать в одну последовательность $z := \langle z_0, \ldots, z_m \rangle$, где $z_y := 0$ для чисел y, не являющихся кодами аксиом U. Таким образом,

$$U \vdash \exists z \textstyle\bigwedge_{y \leq m, y \in \mathsf{Ax}_U} \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_{\overline{y}}, \overline{y})),$$

откуда вытекает, что

$$U \vdash \exists z \forall y \leq \overline{m}\, (\mathsf{Ax}_U(y) \to \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_y, y)).$$

Следовательно, $U \vdash \varphi$ и $U \vdash \bot$, поскольку по нашему предположению теория $T + \varphi$ противоречива.

2) $T + \varphi$ содержит U. Рассмотрим любую формулу $\sigma \in \mathsf{Ax}_U$, $\ulcorner \sigma \urcorner = m$. Прежде всего заметим, что по явному принципу рефлексии

$$T + \varphi \vdash \forall x \leq \overline{m}\, \neg \mathsf{Prf}_T(x, \ulcorner \neg\varphi \urcorner).$$

Отсюда, рассуждая в теории $T + \varphi$, выводим:

$$\begin{aligned}
\vdash \forall y \leq x\, (\mathsf{Ax}_U(x) \to \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_y, y)) \wedge \mathsf{Prf}_T(x, \ulcorner \neg\varphi \urcorner) \quad &\to \quad \overline{m} \leq x \wedge \mathsf{Ax}_U(\overline{m}) \\
&\to \quad \mathsf{Wit}_{\Sigma_n}((z)_{\overline{m}}, \overline{m}) \\
&\to \quad \mathsf{True}_{\Sigma_n}(\overline{m}) \\
&\to \quad \sigma.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $T + \varphi \vdash \sigma$. ⊠

Следствие 2.22. (i) $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ *не содержится ни в одном непротиворечивом перечислимом расширении T сложности Σ_n (и двойственно для $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$).*

(ii) $\mathsf{Rfn}(T)$ *не содержится ни в одном непротиворечивом перечислимом расширении T ограниченной арифметической сложности.*

2.5 Иерархии схем частичной рефлексии

В этом параграфе мы рассматриваем подробно иерархии схем частичной рефлексии. Мы показываем, что свойства схем локальной рефлексии контрастируют с хорошо известными свойствами схем частичной равномерной рефлексии. Из §2.1 известны следующие факты.

1) Схемы частичной равномерной рефлексии для фиксированной элементарно аксиоматизированной теории T составляют линейно упорядоченную по включению иерархию (см. рис. 1).

2) За исключением полной равномерной схемы рефлексии $\mathsf{RFN}(T)$ все схемы в этой иерархии конечно аксиоматизируемы (следствие 2.8).

Следующая лемма показывает, что в определенном смысле схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$ много сильнее $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$.

Лемма 2.23. *Для любого конечного Σ_n-расширения U теории T схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ дедуктивно эквивалентна $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(U)$ над U.*

Доказательство. Достаточно вывести $\mathsf{RFN}_{\Pi_n}(U)$ в $U + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$. С использованием формализованной теоремы о дедукции, для любой Π_n-формулы $\varphi(x)$ в $\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T)$ выводимо:

$$\begin{array}{rcl} \vdash \Box_U \varphi(\dot{x}) & \to & \Box_T(\psi \to \varphi(\dot{x})) \\ & \to & (\psi \to \varphi(x)), \end{array}$$

где ψ означает конъюнкцию всех Σ_n-аксиом теории U. Поскольку ψ выводима в U, получаем

$$U + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T) \vdash \Box_U \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x). \quad \boxtimes$$

Следствие 2.24. *В $T + \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$ доказуемо $\mathsf{Con}(T + \mathsf{RFN}_{\Pi_n}(T))$.*

Таким образом, иерархия схем частичной равномерной рефлексии не вырождается (все теории иерархии различны), если и только если теория $T + \mathsf{RFN}(T)$ непротиворечива. Более того, в случае, когда иерархия невырождена, ни одно из расширений на любом уровне иерархии не является консервативным даже для Π_1-предложений.

Для иерархии схем частичной локальной рефлексии картина существенно меняется. Во-первых, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.25. *Все схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ попарно неэквивалентны при условии непротиворечивости теории $T + \mathsf{Rfn}(T)$. В частности, $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ строго включена в $\mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$, и ни одна из схем $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ не влечет другую для любого $n > 1$ (см. рис. 1).*

Доказательство. Поскольку в силу первой части теоремы 2.16 схема $\mathsf{Rfn}_{\Pi_1}(T)$, эквивалентная Π_1-предложению $\mathsf{Con}(T)$, строго слабее $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$, нам будет достаточно установить лишь второе утверждение леммы.

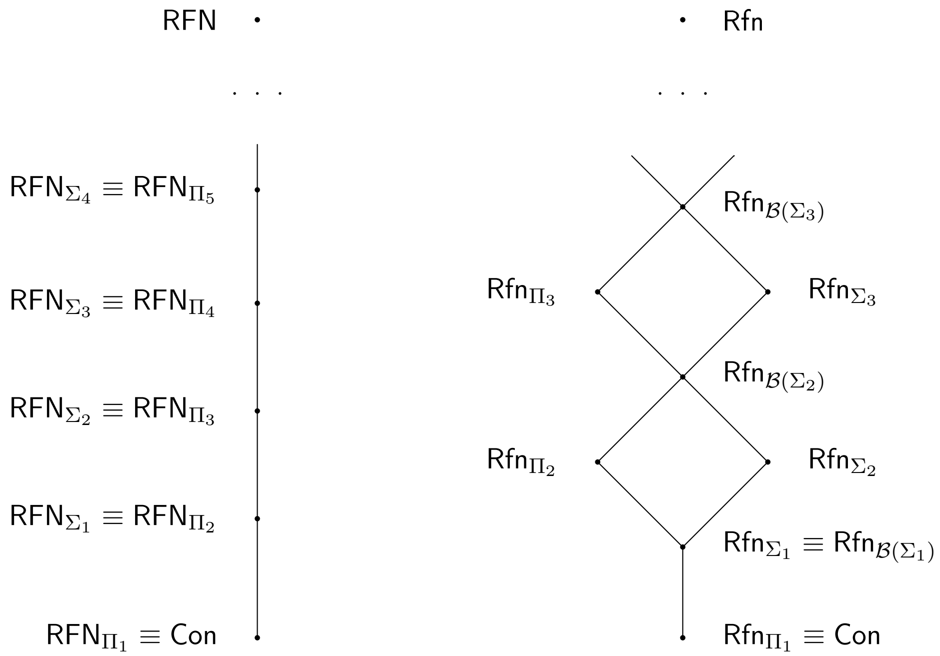

Рис. 1: Иерархии схем частичной рефлексии.

Заметим, что для $n > 1$ $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ есть перечислимое, и даже элементарное, множество Σ_n-предложений. Таким образом, по следствию 2.22,

$$T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T) \nvdash \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T).$$

Утверждение о том, что

$$T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T) \nvdash \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T),$$

доказывается симметричным образом. ⊠

Пусть $\mathcal{B}(\Sigma_n)$ обозначает множество всех булевых комбинаций Σ_n-предложений. Мы имеем следующее полезное утверждение.

Лемма 2.26. *Над* EA *схема* $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ *эквивалентна* $\mathsf{Rfn}_{\mathcal{B}(\Sigma_1)}(T)$.

Доказательство. Докажем, что

$$\mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T) \vdash \Box_T \varphi \to \varphi$$

для любой булевой комбинации Σ_1-предложений φ. Формула φ логически эквивалентна формуле вида $\bigwedge_{i=1}^{n}(\pi_i \vee \sigma_i)$, для некоторых предложений $\pi_i \in \Pi_1$ и $\sigma_i \in \Sigma_1$. Поскольку предикат доказуемости $\Box_T$ коммутирует с конъюнкцией, достаточно вывести в $\mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ формулы

$$\mathsf{Prov}_T(\ulcorner(\pi_i \vee \sigma_i)\urcorner) \to (\pi_i \vee \sigma_i),$$

для любого i. Опираясь на доказуемую Σ_1-полноту и условия Лёба, получаем

$$\begin{array}{rcl} \vdash \mathsf{Prov}_T(\ulcorner(\pi_i \vee \sigma_i)\urcorner) \wedge \neg\pi_i & \to & \mathsf{Prov}_T(\ulcorner\neg\pi_i\urcorner) \\ & \to & \mathsf{Prov}_T(\ulcorner\sigma_i\urcorner) \\ & \to & \sigma_i, \end{array}$$

используя $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$. Отсюда

$$\mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T) \vdash \mathsf{Prov}_T(\ulcorner(\pi_i \vee \sigma_i)\urcorner) \to (\pi_i \vee \sigma_i). \quad \boxtimes$$

Отметим, что в силу предложения 2.25 прямое обобщение этого утверждения на классы Σ_n при $n > 1$ не имеет места. (Некоторое разумное обобщение, использующее релятивизированные схемы рефлексии, приведено в разделе 4.4.)

Далее, для схем локальной рефлексии мы имеем следующие результаты.

1) Ни одна из схем $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$ для $n \geq 1$ не является конечно аксиоматизируемой над T. (Единственным исключением является схема $\mathsf{Rfn}_{\Pi_1}(T)$, которая эквивалентна $\mathsf{Con}(T)$.)

2) Все схемы локальной рефлексии, за очевидным исключением $\mathsf{Rfn}_{\Pi_1}(T)$, являются Π_1-консервативными друг над другом, то есть доказывают одни и те же Π_1-предложения. В частности, в теории $T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$ не выводима непротиворечивость $T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ для $n > 1$ [9].

3) Имеет место более сильное утверждение [25]: полная схема локальной рефлексии $\mathsf{Rfn}(T)$ Π_n- (соотв., Σ_n-) консервативна над $T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ (соотв., $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$). Этот результат о консервативности оптимален относительно арифметической сложности в том смысле, что схемы можно различить уже на уровне Σ_n- (соотв., Π_n) предложений.

Доказательства этих утверждений представляют собой красивое применение техники логики доказуемости. Первый результат этого типа был найден Булосом [32] и Артёмовым [4, 7], которые независимо показали, что n-кратно итерированная формула непротиворечивости для корректной теории T не может быть выведена из менее чем n частных случаев локальной схемы рефлексии. Мы получим вышеприведённые утверждения с помощью единой более общей конструкции, найденной в [25]. Эти результаты будут затем применены к исследованию схем беспараметрической индукции в арифметике.

Лемма 2.27. *Определим модальные формулы Q_i следующим образом:*

$$Q_1 := p, \qquad Q_{i+1} := Q_i \vee \Box Q_i,$$

где p — пропозициональная переменная. Тогда, для любых переменных $p_1, \dots, p_m$,

$$\mathbf{GL} \vdash \Box^+(\textstyle\bigwedge_{i=1}^m(\Box p_i \to p_i) \to p) \to (\textstyle\bigwedge_{i=1}^m(\Box Q_i \to Q_i) \to p). \qquad (*)$$

Доказательство. Не предъявляя явно доказательства формулы $(*)$, мы установим её выводимость в **GL**, опираясь на стандартную семантику Крипке логики **GL**.

Рассмотрим любую модель Крипке $(W, R, \Vdash)$, в которой заключение $(\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box Q_i \to Q_i) \to p)$ ложно в некотором мире $x \in W$. Это означает, что $x \nVdash p$ и $x \Vdash \Box Q_i \to Q_i$ для каждого $i \le m$. С помощью очевидной индукции по i нетрудно установить, что $x \nVdash Q_i$ для всех $i \le m+1$, в частности, $x \nVdash Q_{m+1}$.

Отсюда, расшифровывая определение Q_{m+1}, мы видим, что в W найдется последовательность миров

$$x = x_{m+1} R x_m R \ldots R x_1,$$

такая что $x_i \nVdash Q_i$ для всех $i \le m+1$. Поскольку отношение R иррефлексивно и транзитивно, все x_i попарно различны. Кроме того, индукцией по i нетрудно убедиться, что для всех i

$$\mathbf{GL} \vdash p \to Q_i.$$

Значит, $x_i \nVdash p$ для любого $i \le m+1$.

Заметим теперь, что для любого i формула $\Box p_i \to p_i$ может быть ложной не более чем в одном элементе линейной цепи $x_{m+1}, \ldots, x_1$. Отсюда, по принципу Дирихле, среди $m+1$ мира x_i найдется мир z, такой что

$$z \Vdash \textstyle\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box p_i \to p_i) \land \neg p.$$

В случае, если z совпадает с $x = x_{m+1}$, мы имеем

$$x \nVdash \textstyle\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box p_i \to p_i) \to p.$$

В случае, когда $z = x_i$ для некоторого $i \le m$, мы имеем xRz по транзитивности R, и таким образом

$$x \nVdash \Box(\textstyle\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box p_i \to p_i) \to p).$$

Это показывает, что формула $(*)$ вынуждается в любом мире любой модели Крипке; следовательно она выводима в **GL**. $\boxtimes$

Следствие 2.28. $\mathbf{GL} \vdash \Box^{+}\neg\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box p_i \to p_i) \to \Box^{m}\bot$.

Доказательство. Подставляя в $(*)$ формулу $\bot$ вместо p, получаем

$$\mathbf{GL} \vdash Q_i(p/\bot) \leftrightarrow \Box^{i-1}\bot,$$

а значит

$$\mathbf{GL} \vdash \textstyle\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box Q_i(p/\bot) \to Q_i(p/\bot)) \leftrightarrow \neg\Box^{m}\bot.$$

$\boxtimes$

Прогрессия теорий, основанная на *итерации формулы непротиворечивости*, определяется следующим образом.

$$T_0 := T, \quad T_{n+1} := T_n + \mathsf{Con}(T_n), \quad T_\omega := \bigcup_{n \ge 0} T_n.$$

Лемма 2.29. $\mathsf{EA} \vdash \mathsf{Con}(T_n) \leftrightarrow \neg\Box_T^{n+1}\bot$.

Доказательство. Индукция по n с использованием условий Лёба. $\boxtimes$

Формула $\mathsf{Con}(T_n)$ называется *n-кратно итерированной формулой непротиворечивости* теории T. Если T — Σ_1-корректная теория, то по теореме Гёделя T_n образуют строго возрастающую последовательность Σ_1-корректных расширений T.

Следующее утверждение получено в [32, 7].

Предложение 2.30. $\mathsf{Con}(T_n)$ *не выводима из* любых n *частных случаев локальной схемы рефлексии для теории* T, *при условии непротиворечивости* T_n.

Доказательство. Допустим

$$T \vdash \textstyle\bigwedge_{i=1}^{n}(\Box_T\varphi_i \to \varphi_i) \to \mathsf{Con}(T_n).$$

Тогда по лемме 2.29, с помощью контрапозиции,

$$T \vdash \Box_T^{n+1}\bot \to \neg\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n}(\Box_T\varphi_i \to \varphi_i),$$

и, используя условия Лёба, получаем

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T^{n+2}\bot \to \Box_T\neg\textstyle\bigwedge_{i=1}^{n}(\Box_T\varphi_i \to \varphi_i).$$

Рассматривая арифметическую реализацию, сопоставляющую каждой переменной p_i формулу φ_i, по следствию 2.28 получаем

$$\mathsf{EA} \vdash \Box_T^{n+2}\bot \to \Box_T^{n+1}\bot.$$

Отсюда по теореме Лёба $\mathsf{EA} \vdash \Box_T^{n+1}\bot$, а значит теория T_n противоречива. $\boxtimes$

Замечание 2.31. Формулы $\Box_T^{i+1}\bot \to \Box_T^{i}\bot$ для $i \le n$ дают пример $n+1$-го частного случая локальной схемы рефлексии (фактически, примера схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$), которые влекут $\mathsf{Con}(T_n)$ над EA. Заметим также, что отсюда следует включение $T_\omega \subseteq T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$.

Предложение 2.32. *Для $n \ge 1$ схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$ не являются конечно аксиоматизируемыми над T, при условии непротиворечивости теории T_ω.*

Доказательство. По предложению 2.30 любых m примеров этих схем не достаточно, чтобы вывести формулу $\mathsf{Con}(T_m)$. С другой стороны, формула $\mathsf{Con}(T_m)$ выводима в T_ω, а значит и в любой из схем $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ и $\mathsf{Rfn}_{\Pi_{n+1}}(T)$ при $n \ge 1$. $\boxtimes$

Другим выражением той же самой идеи является следующий результат, полученный Горячевым в [9].

Предложение 2.33. *Любые n частных случаев локальной схемы рефлексии для T Π_1-консервативны над теорией T_n.*

Доказательство. Пусть $\pi \in \Pi_1$ и

$$T \vdash \bigwedge_{i=1}^{n}(\Box_T\varphi_i \to \varphi_i) \to \pi.$$

Тогда в силу условий Лёба

$$T \vdash \Box_T\neg\pi \to \Box_T\neg\bigwedge_{i=1}^{n}(\Box_T\varphi_i \to \varphi_i)$$

и

$$T \vdash \Box_T^{+}\neg\pi \to \Box^{+}\neg\bigwedge_{i=1}^{n}(\Box_T\varphi_i \to \varphi_i).$$

С помощью арифметической интерпретации из следствия 2.28 мы получаем

$$T \vdash \Box_T^{+}\neg\pi \to \Box_T^{n}\bot,$$

откуда

$$T \vdash \neg\pi \to \Box_T^{n}\bot$$

по доказуемой Σ_1-полноте. Таким образом, $T \vdash \neg\Box_T^{n}\bot \to \pi$ и $T_n \vdash \pi$. ⊠

Следствие 2.34. *Для любой элементарно аксиоматизированной теории T в теориях $T + \mathsf{Rfn}(T)$ и T_ω выводимы одни и те же Π_1-предложения.*

Отсюда также получается следующее следствие.

Следствие 2.35. *Теория $T+\mathsf{Rfn}(T)$ непротиворечива тогда и только тогда, когда непротиворечива теория T_ω.*

Как уже отмечалось, $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ содержит T_ω для любого $n \geq 1$. Следовательно, в отличие от схем равномерной рефлексии, все такие схемы доказывают одни и те же Π_1-предложения. Фактически, для схем частичной локальной рефлексии имеет место более сильный результат, установленный в [25].

Теорема 6. *Для $n > 1$ над T имеют место следующие результаты о консервативности:*

(i) $\mathsf{Rfn}(T) \subseteq_{\Pi_n} \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$;

(ii) $\mathsf{Rfn}(T) \subseteq_{\Sigma_n} \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$;

(iii) $\mathsf{Rfn}(T) \subseteq_{\mathcal{B}(\Sigma_1)} \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$.

Доказательство. Допустим

$$T \vdash \bigwedge_{i=1}^{m}(\Box_T\varphi_i \to \varphi_i) \to \pi.$$

В силу условий Лёба мы также имеем

$$T \vdash \Box_T(\bigwedge_{i=1}^{m}(\Box_T\varphi_i \to \varphi_i) \to \pi).$$

Рассматривая арифметическую реализацию, которая сопоставляет переменной p предложение π, а p_i предложение φ_i для всех i, по лемме 2.27 заключаем, что

$$T \vdash \bigwedge_{i=1}^{m}(\Box_T\psi_i \to \psi_i) \to \pi,$$

где ψ_i означает арифметическую интерпретацию модальной формулы Q_i. Заметим теперь, что если $\pi \in \Pi_n$ для $n > 1$, то $\psi_i \in \Pi_n$ для всех i. Значит

$$T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T) \vdash \pi.$$

Аналогично, Σ_n-следствия $\mathsf{Rfn}(T)$ содержатся в $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$, и $\mathcal{B}(\Sigma_1)$-следствия $\mathsf{Rfn}(T)$ содержатся в теории $\mathsf{Rfn}_{\mathcal{B}(\Sigma_1)}(T)$, которая эквивалентна $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$ по лемме 2.26. ⊠

Следующее утверждение показывает, что доказанная выше теорема оптимальна в смысле арифметической сложности.

Лемма 2.36. *При условии непротиворечивости T_ω, для $n > 1$ найдется Σ_n- (соответственно, Π_n) предложение, доказуемое в $T + \mathsf{Rfn}(T)$, но не доказуемое в $T + \mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$ (соотв., $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$).*

Доказательство. По предложению 2.25 в качестве такой формулы можно взять соответствующий частный случай схемы $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_n}(T)$ (соотв., $\mathsf{Rfn}_{\Pi_n}(T)$). ⊠

Замечание 2.37. В настоящее время остаётся, по видимому, открытым вопрос об оптимальности утверждения (iii) предыдущей теоремы. В частности, не известно, является ли схема $\mathsf{Rfn}(T)$ Π_2-консервативной над $T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$.

В заключение отметим следующее усиление следствия 2.19.

Следствие 2.38. $T + \mathsf{Rfn}(T) \nvdash \mathsf{RFN}(T)$, *если и только если теория T_ω непротиворечива.*

Доказательство. В силу следствия 2.35, если T_ω противоречива, то и $T + \mathsf{Rfn}(T)$ — противоречивая теория, то есть $T + \mathsf{Rfn}(T) \vdash \mathsf{RFN}(T)$. С другой стороны, если $T + \mathsf{Rfn}(T) \vdash \mathsf{RFN}(T)$, то в силу конечной аксиоматизируемости $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ найдутся некоторые n частных случаев схемы $\mathsf{Rfn}(T)$, из которых выводима $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$. Однако $T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ содержит T_ω, а значит и $\mathsf{Con}(T_n)$. Таким образом, в силу предложения 2.30 T_n и T_ω противоречивы. ⊠

3 Доказуемо тотальные вычислимые функции и фрагменты PA

Понятие доказуемо тотальной вычислимой функции (д.т.в.ф.) [2] было введено Г. Крайзелем в 50-е годы. Это понятие в настоящее время играет исключительно важную роль в теории доказательств в связи как с теоретическими вопросами ординального анализа и извлечения конструктивных оценок

[2] Иногда используется более ранний, но не совсем корректный, термин для этого понятия — *доказуемо рекурсивная функция.*

из теорем существования, так и с более прикладными вопросами, такими как извлечение программ из формальных доказательств. Оно также тесно связано с построением комбинаторных независимых утверждений для арифметики Пеано и её расширений.

Определение 1. Функция $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ называется *доказуемо тотальной вычислимой* в теории T, если для некоторой Σ_1-формулы $\varphi(\vec{x}, y)$

(i) $f(\vec{x}) = y \iff \mathbb{N} \vDash \varphi(\vec{x}, y)$;

(ii) $T \vdash \forall \vec{x}\, \exists! y\, \varphi(\vec{x}, y)$.

Класс всех д.т.в.ф. теории T обозначается $\mathcal{F}(T)$.

Заметим, что условие (i) эквивалентно вычислимости функции f. Для теорий T, содержащих EA, класс $\mathcal{F}(T)$ содержит все элементарные функции $\mathcal{E}$ и замкнут относительно композиции. Вообще говоря, этот класс не является замкнутым относительно ограниченной минимизации (см. [27]). Отметим также, что $\mathcal{F}(T)$ зависит лишь от Π_2-следствий теории T, таким образом, если $T \subseteq_{\Pi_2} U$, то $\mathcal{F}(T) \subseteq \mathcal{F}(U)$.

Для многих естественных теорий T было получено описание классов $\mathcal{F}(T)$ в теоретико-рекурсивных терминах. Например, согласно известной теореме, установленной Ч. Парсонсом [67] и независимо Г.Е. Минцем [1], $\mathcal{F}(I\Sigma_1)$ совпадает с классом примитивно рекурсивных функций. Аналогично, из результатов В. Аккермана [14] и Г. Крайзеля [51] следует, что $\mathcal{F}(\mathsf{PA})$ совпадает с классом так называемых $<\!\varepsilon_0$-рекурсивных функций. Характеризация классов $\mathcal{F}(T)$ для сильных теорий T в терминах трансфинитных иерархий рекурсивных функций является одной из основных задач *ординального анализа*. Обзор [70] содержит обильную информацию, касающуюся этой важной области теории доказательств.

3.1 Фрагменты PA

Основные фрагменты арифметики определяются теми или иными ограничениями схемы индукции, аксиоматизирующей PA. Как правило, рассматривают следующие виды ограничений. Во-первых, накладывается ограничение на кванторную сложность индукционных формул. Во-вторых, запрещается использование параметров в схеме индукции. В-третьих, иногда индукция применяется в форме правила вывода, а не как схема аксиом. Правило индукции даёт эквивалентную аксиоматизацию PA. Однако, схема и правило индукции для формул ограниченной кванторной сложности приводят к различным иерархиям фрагментов арифметики. Систематическое изучение этих иерархий, а также других естественных фрагментов PA, начатое Ч. Парсонсом в начале 70-х годов, к настоящему времени представляет собой активно развивающуюся область исследований (обширную библиографию см. в [46]).

Рис. 2 показывает соотношения между фрагментами PA, определяемых ограничениями схемы индукции над EA. При этом используются следующие обозначения.

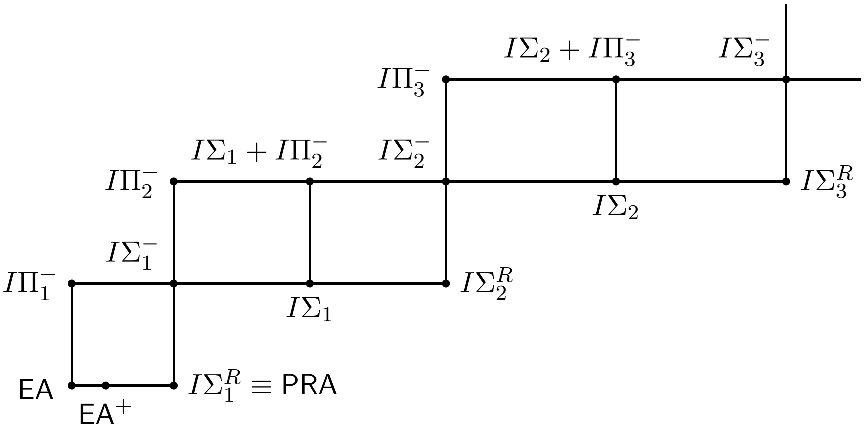

Рис. 2: Фрагменты PA, задаваемые ограниченной индукцией.

Теория $I\Sigma_n$ определяется над EA схемой индукции для Σ_n-формул с параметрами. $I\Sigma_n$ эквивалентна $I\Pi_n$ (см. ниже лемму 4.1). Теории $I\Sigma_n^-$ и $I\Pi_n^-$ аксиоматизируются соответствующими схемами индукции без параметров. $I\Sigma_n^R$ есть замыкание EA относительно правила индукции:

$$\mathsf{IR}: \quad \frac{\varphi(0), \quad \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x+1))}{\forall x \varphi(x)},$$

где $\varphi \in \Sigma_n$. Как показал Ч. Парсонс [68], теория $I\Sigma_n^R$ эквивалентна $I\Pi_{n+1}^R$ (см. ниже следствие 4.14). В [28] показано, что беспараметрические правила индукции эквивалентны правилам индукции с параметрами (см. лемму 4.6). $I\Sigma_1^R$ эквивалентна обсуждаемой ниже *примитивно рекурсивной арифметике* PRA.

Среди фрагментов PA между EA и $I\Sigma_1^R$ для нас будет представлять наибольший интерес расширение EA аксиомой, утверждающей, что значение функции 2_n^x определено при любых значениях аргументов n, x. График функции 2_n^x нетрудно определить элементарной формулой, поскольку

$$2_n^x = y \leftrightarrow \exists s \in \mathit{Seq}\,((s)_0 = x \wedge \forall i < n\,(s)_{i+1} = \exp((s)_i) \wedge (s)_n = y),$$

и квантор существования по s может быть ограничен некоторой элементарной функцией y, зависящей от выбранного кодирования последовательностей. Мы обозначаем эту теорию EA^+ (эквивалентная теория обозначается $I\Delta_0 + \mathsf{Supexp}$ в [46]). Отметим, что в EA^+ можно ввести новый символ для функции 2_n^x, причем в соответствующем дефинициальном расширении доказуема схема индукции для ограниченных формул расширенного языка (см. [46], с. 271).

Теория EA^+ достаточно сильна, чтобы доказать теорему об устранении сечения в логике предикатов и некоторые её важные следствия, такие как теорему Эрбрана (см. ниже §4.1 и [46, 95]). Фактически, по модулю EA теория EA^+ эквивалентна теореме об устранении сечения. Это следует из хорошо известных верхних и нижних оценок удлиннения выводов после устранения правила сечения, полученных Р. Стэтменом [91] и В.П. Оревковым [3].

С точки зрения теории доказательств фрагменты PA представляют интерес, поскольку их свойства часто резко отличаются от свойств самой теории PA. Для каждого конкретного фрагмента обычно обсуждаются следующие стандартные вопросы:

- конечная аксиоматизируемость теории;
- оптимальная арифметическая сложность её аксиоматизации;
- класс доказуемо тотальных вычислимых функций данной теории;
- насколько сильные схемы рефлексии выводимы в данной теории над более слабым фрагментом;
- является ли данная теория консервативной над более слабым фрагментом для предложений определенного класса кванторной сложности.

В §§4,5 мы установим основные свойства этого рода для фрагментов PA, определяемых ограничениями схемы индукции. Здесь мы рассмотрим более подробно общие свойства доказуемо тотальных вычислимых функций и их связь со схемами рефлексии.

3.2 Доказуемо тотальные вычислимые функции и 1-непротиворечивость

Предложение 3.1 ниже более или менее непосредственно вытекает из известной теоремы Эрбрана. Напомним, что в простейшем случае теорема Эрбрана утверждает, что для всякой теории T первого порядка, аксиоматизируемой множеством чисто универсальных (или бескванторных) формул, если $T \vdash \exists x\, \varphi(a,x)$, где $\varphi(a,x)$ бескванторна, то для некоторой последовательности термов $t_1(a), \dots, t_k(a)$

$$T \vdash \varphi(a, t_1(a)) \vee \dots \vee \varphi(a, t_k(a)).$$

Эта теорема доказывается ограниченной индукцией по выводу без сечения и потому формализуема в EA^+ (см. [6]). Имеется также простое (но менее конструктивное) теоретико-модельное доказательство, опирающееся на теорему о компактности.

Для данной функции f обозначим через $\mathbf{C}(f)$ замыкание $\mathcal{E} \cup \{f\}$ относительно композиции.

Предложение 3.1. *Пусть $\pi = \forall x \exists y\, \varphi(x,y)$ — истинное Π_2-предложение, где формула φ элементарна. Тогда $\mathcal{F}(\mathsf{EA}+\pi) = \mathbf{C}(f)$, где $f(x) = \mu y. \varphi(x,y)$.*

Доказательство. Обозначим через T теорию $\mathsf{EA} + \pi$. График f можно задать формулой $\varphi(x,y) \wedge \forall z < y\, \neg\varphi(x,z)$, отсюда $\mathbf{C}(f) \subseteq \mathcal{F}(T)$.

Для доказательства противоположного включения рассмотрим чисто универсальную аксиоматизацию EA в языке с символами для всех элементарных функций и добавим в язык новый функциональный символ f вместе с аксиомой $\forall x\, \varphi(x, f(x))$. Используя подходящие элементарные термы, мы можем избавиться от всех ограниченных кванторов в φ. Поэтому получившаяся теория является консервативным расширением T и имеет чисто универсальную аксиоматизацию.

Допустим теперь, что $T \vdash \forall x \exists! y \exists z \psi_0(x, y, z)$, где формула ψ_0 элементарна (а в нашей формулировке эквивалентна бескванторной). По теореме Эрбрана мы получаем термы $t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_k$ расширенного языка, такие что

$$T \vdash \psi_0(a, t_1(a), u_1(a)) \vee \dots \vee \psi_0(a, t_k(a), u_k(a)).$$

Очевидно, термы t_i и u_i представляют функции в $\mathbf{C}(f)$. Теперь мы полагаем

$$t(x) := \begin{cases} t_1(x), & \text{если } \psi_0(x, t_1(x), u_1(x)), \\ t_2(x), & \text{если } \psi_0(x, t_2(x), u_2(x)) \text{ и } \neg\psi_0(x, t_1(x), u_1(x)), \\ \dots & \dots \\ t_k(x), & \text{если } \psi_0(x, t_k(x), u_k(x)) \text{ и } \neg\psi_0(x, t_i(x), u_i(x)) \text{ для всех } i < k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция $u(x)$ определяется аналогично, с термами u_i вместо t_i. Поскольку функция

$$\mathrm{Cond}(x, y, z) := \begin{cases} x, & \text{если } z = 0 \\ y, & \text{если } z \neq 0 \end{cases}$$

элементарна, класс $\mathbf{C}(f)$ замкнут относительно определений разбором случаев, и таким образом $t(x)$ и $u(x)$ определяются некоторыми $\mathbf{C}(f)$ термами. Для этих термов мы, очевидно, имеем $T \vdash \psi_0(a, t(a), u(a))$. Отсюда следует, что

$$T \vdash \forall x \exists z\, \psi_0(x, t(x), z),$$

и в силу функциональности $\psi(x, y) = \exists z\, \psi_0(x, y, z)$

$$T \vdash \forall x, y\, (t(x) = y \leftrightarrow \psi(x, y)).$$

Поскольку теория T корректна, ψ представляет график $t(x)$ в стандартной модели. ⊠

Следствие 3.2. (i) *$\mathcal{F}(\mathsf{EA}) = \mathcal{E}$;*

(ii) *$\mathcal{F}(\mathsf{EA}^+) = \mathbf{C}(\mathrm{supexp})$, где $\mathrm{supexp}(n, x) = 2^x_n$.*

Зафиксируем теперь какую-либо естественную нумерацию вычислимых функций (от одной переменной) и связанную с ней Σ_1-формулу $\varphi_e(x) \simeq y$, выражающую утверждение, что вычислимая функция с индексом e на входе x выдаёт ответ y. В качестве индексов вычислимых функций f обычно рассматривают коды машин Тьюринга, вычисляющих f. Для нас в качестве индексов более удобно рассматривать гёделевы номера Σ_1-формул, определяющих график f в стандартной модели арифметики. Обе эти нумерации эквивалентны в том смысле, что существует взаимно однозначное и (доказуемо) элементарное соответствие между индексами обоих типов. В этом случае формула $\varphi_e(x) \simeq y$ выражается через определение истинности для Σ_1-формул как $\mathsf{True}_{\Sigma_1}(\mathsf{sub}(e,x,y))$, где элементарный терм $\mathsf{sub}(e,x,y)$ вычисляет $\ulcorner\sigma(\overline{x},\overline{y})\urcorner$ по данным x, y, e, если $\ulcorner\sigma\urcorner = e$.

Так же как и для вычислимых функций мы можем ввести естественную нумерацию доказуемо тотальных вычислимых функций в T.

Определение 2. Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория. Называем число e *T-индексом* функции f, если $e = \langle e_1, e_2\rangle$ где

- e_1 есть индекс f;
- e_2 кодирует T-вывод формулы $\forall x \exists y \varphi_{\overline{e}_1}(x) \simeq y$.

С этой нумерацией $\mathcal{F}(T)$ естественно связывается универсальная функция ψ^T:

$$\psi^T_e(x) := \begin{cases} \varphi_{e_1}(x), & \text{если } e = \langle e_1, e_2\rangle \text{ есть } T\text{-индекс;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обычное диагональное рассуждение показывает, что ψ^T, как функция аргументов e и x, не принадлежит классу $\mathcal{F}(T)$. Таким образом, утверждение о её тотальности истинно, но не доказуемо в T. Следующая лемма устанавливает эквивалентность этого утверждения и схемы Π_2-рефлексии.

Лемма 3.3. $\mathsf{EA} \vdash \forall e, x \exists y\, \psi^T_e(x) \simeq y \leftrightarrow 1\text{-}\mathsf{Con}(T)$.

Доказательство. Тотальность ψ^T выражается формулой

$$\forall e_1, e_2, x\, (\mathsf{Prf}_T(e_2, \ulcorner\forall x \exists y \varphi_{\dot{e}_1}(x) \simeq y\urcorner) \to \exists y \varphi_{e_1}(x) \simeq y), \tag{2}$$

и с точностью до логической эквивалентности представляет собой частный случай схемы $\mathsf{RFN}_{\Pi_2}(T)$. Любое Π_2-предложение эквивалентно формуле $\forall x \exists y \varphi_{\overline{e}_1}(x) \simeq y$ для подходящего индекса e_1, таким образом (2) влечёт $1\text{-}\mathsf{Con}(T)$. $\boxtimes$

Утверждение о тотальности функции f с определимым графиком будем обозначать $f{\downarrow}$. При этом подразумевается фиксированной арифметическая формула, задающая график f. Как мы видели ранее, всякое истинное Π_2-предложение можно рассматривать как утверждение о тотальности некоторой функции с элементарным графиком.

Рассмотрим теперь теорию T вида $\mathsf{EA}{+}f{\downarrow}$, где f — такая функция. Предложение 3.1 доставляет нумерацию функций из $\mathcal{F}(T) = \mathbf{C}(f)$, не использующее понятие вывода. Термы, построенные из термов для элементарных функций и символа f имеют естественную гёделеву нумерацию. Мы можем рассматривать эти гёделевы номера как индексы д.т.в.ф. теории T. С данной нумерацией естественно связывается другая универсальная функция $\theta^f_e(x)$, вычисляющая значение терма с номером e на аргументе x. Отметим, что обе эти нумерации являются доказуемо эквивалентными в теории EA^+, поскольку теорема Эрбрана формализуема в EA^+ и позволяет явно извлечь терм из доказательства тотальности вычислимой функции.

Пусть функция f имеет элементарный график, неубывает и $f(x) \geq 2^x$. *Итерация* $f^{(k)}(x)$ функции f определяется как

$$f^{(0)}(x) = x, \quad f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x)).$$

Лемма 3.4. *$\mathbf{C}(\theta^f) = \mathbf{C}(f^*)$, где $f^*(x) = f^{(x)}(x)$.*

Доказательство. Для каждого фиксированного k функция $f^{(k)} \in \mathbf{C}(f)$ и индекс $f^{(k)}$ является элементарной функцией k, скажем $i(k)$. Отсюда

$$f^*(x) = \theta^f_{i(x)}(x). \tag{3}$$

Для доказательства противоположной импликации мы опираемся на монотонность f. При сделанных предположениях любая функция $g \in \mathbf{C}(f)$ мажорируется некоторой итерацией f:

$$\forall x\,(g(x) \leq f^{(k)}(x)).$$

При этом число k является элементарной функцией индекса $e = \ulcorner g \urcorner$, скажем, $j(e)$. Мы можем считать j монотонной функцией e.

Вычисление значения $\theta^f_e(x)$ сводится к последовательному вычислению значений подтермов терма g. Назовём протоколом вычисления $g(x)$ дерево, листья которого помечены аргументом x, корень помечен парой вида $\langle e, y\rangle$, а внутренние вершины помечены парами $\langle i, y_i\rangle$, где i — индекс подтерма g, а y_i — значение подтерма i на аргументе x. При этом y_i получается применением элементарных функций или функции f из соответствующих значений для потомков данной вершины.

Количество всех подтермов и их индексы ограничены индексом g. Поэтому все промежуточные значения подтермов мажорируются величиной $f^{(j(e))}(x) \leq f^*(\max(j(e), x))$. Значит, код всего протокола вычисления $\theta^f_e(x)$ ограничен некоторой функцией $b(e, x) \in \mathbf{C}(f^*)$. Отсюда получаем представление θ^f в виде:

$$\theta^f_e(x) = U(\mu z \leq b(e, x).\ T(e, x, z)), \tag{4}$$

где $T(e, x, z)$ — элементарный предикат, выражающий утверждение "z есть протокол вычисления функции с индексом e на входе x", а $U(z)$ — элементарная функция, восстанавливающая по протоколу значение функции. ⊠

Следующая лемма получается формализацией предыдущего утверждения в EA.

Лемма 3.5. $\mathsf{EA} \vdash f^*{\downarrow} \leftrightarrow \langle 1\rangle_{\mathsf{EA}} f{\downarrow}$.

Доказательство. Пусть $T := \mathsf{EA} + f{\downarrow}$. По лемме 3.3, $\langle 1\rangle_{\mathsf{EA}} f{\downarrow}$ эквивалентно в EA формуле $\psi^T{\downarrow}$. Формула $\psi^T{\downarrow}$, в частности, влечёт $\mathrm{supexp}{\downarrow}$ и поэтому $\theta^f{\downarrow}$. Обратное также верно, поэтому достаточно показать, что $f^*{\downarrow}$ эквивалентно тотальности θ^f.

Очевидно, если θ^f тотальна, то f^* также тотальна в силу (3).

Для доказательства обратной импликации в силу (4) достаточно установить $\forall e, x \exists z\, T(e,x,z)$ в предположении тотальности f^*. Рассуждая в EA рассмотрим произвольные e, x. Поскольку f^* тотальна, существует число $a = b(e,x)$, ограничивающее код протокола из (4). Тогда индукцией по e_1 мы можем доказать

$$\forall e_1 \leq_s e\, \exists z_1 \leq a\, T(e_1, x, z_1),$$

где $e_1 \leq_s e$ означает, что e_1 есть подтерм e. Как нетрудно видеть, формула индукции ограничена (a, e и x являются параметрами), поэтому рассуждение формализуемо в EA. ⊠

Для функции $f(x) = \exp(x)$ мы получаем следующее

Следствие 3.6. $\mathsf{EA}^+ \equiv \mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Pi_2}(\mathsf{EA})$.

В качестве обобщения этого примера рассмотрим так называемую иерархию Гжегорчика, задаваемую последовательностью функций

$$F_0(x) := 2^x; \quad F_{n+1}(x) := F_n^{(x)}(x).$$

Функции F_n примитивно рекурсивны и имеют элементарные графики. Обозначим $\mathcal{E}^n := \mathbf{C}(F_n)$. Как хорошо известно, последовательность классов $\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2 \subset \cdots$ исчерпывает все примитивно рекурсивные функции (см. [76]). Расширение EA аксиомами $F_n\!\downarrow$ для всех $n \geq 1$ представляет собой аксиоматизацию *примитивно рекурсивной арифметики* PRA.

Предложение 3.7. (i) $\mathsf{EA}^1_\omega \equiv I\Sigma_1^R \equiv \mathsf{PRA}$.

(ii) $\mathcal{F}(\mathsf{EA}^1_\omega)$ *совпадает с классом примитивно рекурсивных функций.*

Доказательство. (i) Тотальность всех F_n легко установить с помощью правила Σ_1-индукции. Включение $\mathsf{EA}^1_\omega \subseteq \mathsf{PRA}$ получается итерацией леммы 3.5. Докажем, что EA^1_ω замкнута относительно правила Σ_1-индукции.

Для данной $\varphi \in \Sigma_1$ обозначим через ψ универсальное замыкание

$$\varphi(0) \land \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1)).$$

Если $\mathsf{EA}^1_k \vdash \psi$, то

$$\mathsf{EA}^1_{k+1} \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_2}(\mathsf{EA} + \psi).$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что для каждого конкретного $n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{EA} + \psi \vdash \varphi(\overline{n})$. Этот факт формализуем в EA ограниченной индукцией по n, поэтому

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x\, \Box_{\mathsf{EA}+\psi}\, \varphi(\dot{x}).$$

Отсюда с помощью Π_2-рефлексии получаем $\mathsf{EA}^1_{k+1} \vdash \forall x\, \varphi(x)$, что и требовалось доказать.

(ii) Любая функция $\mathcal{F}(\mathsf{PRA})$ примитивно рекурсивна, поскольку таковы все F_n. Тотальность любой примитивно рекурсивной функции естественным образом устанавливается в $I\Sigma_1^R$. ⊠

4 Индукция и рефлексия

В этом и последующим разделах мы приводим основные результаты, касающиеся взаимоотношения между схемами рефлексии и различными формами индукции в арифметике. Первый и наиболее известный результат этого типа был получен Крайзелем и Леви [54], которые доказали, что PA эквивалентна полной равномерной схеме рефлексии над примитивно рекурсивной арифметикой. Впоследствии эта теорема была усилена Д. Лейвантом [55], который установил точную связь между иерархией теорий $I\Sigma_n$ и иерархией схем частичной равномерной рефлексии. Ниже мы также даём точные характеризации правил индукции и схем беспараметрической индукции в терминах схем рефлексии, полученные в работах [24, 26]. На основе результатов §2 эти соотношения позволяют получить ряд интересных следствий о строении этих теорий и их классах доказуемо тотальных вычислимых функций.

4.1 Исчисление Тейта

Мы опираемся на стандартную технику устранения сечения в секвенциальном исчислении Тейта, изложенную, например, в статье Швихтенберга [80]. *Формулы* в исчислении Тейта строятся, как и в логике первого порядка, из атомарных формул и их отрицаний с помощью связок $\wedge$, $\vee$ и кванторов $\forall$, $\exists$. При этом также удобно считать, что алфавиты связанных и свободных переменных не пересекаются. Операция отрицания формулы определена по правилам де Моргана. *Секвенции* представляют собой конечные множества формул, обозначаемые Γ, Δ, ... и понимаемые как дизъюнкции входящих в них формул. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ записывается как Γ, φ.

Исчисление Тейта задаётся аксиомами вида $\Gamma, \varphi, \neg\varphi$, где φ — атомарная формула, и следующими правилами вывода:

$$\frac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma, \psi}{\Gamma, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge) \qquad \frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \varphi \vee \psi}\ (\vee_0) \qquad \frac{\Gamma, \psi}{\Gamma, \varphi \vee \psi}\ (\vee_1)$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(a)}{\Gamma, \forall x \varphi(x)}\ (\forall), \quad \text{где } a \text{ не входит свободно в } \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t)}{\Gamma, \exists x \varphi(x)}\ (\exists) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \quad \Gamma, \neg\varphi}{\Gamma}\ (Cut)$$

Нетрудно показать, что секвенция Γ является выводимой в исчислении Тейта тогда и только тогда, когда формула $\bigvee\Gamma$ выводима в чистом исчислении предикатов PC. Теорема об устранении сечения (см. [80]) утверждает, что существует эффективная процедура, переводящая любой вывод секвенции Γ в исчислении Тейта в некоторый вывод Γ, не содержащий применений правила (Cut). Выводы без сечений обладают тем свойством, что всякая формула, входящая в такой вывод, является подформулой некоторой формулы заключительной секвенции. (При этом свойство быть подформулой понимается с точностью до подстановки термов вместо свободных переменных.) В частности, вывод Π_n-формулы без сечений состоит целиком из Π_n-формул.

Из статьи [80] можно извлечь грубую верхнюю оценку на размер вывода без сечения порядка 2^x_{cn}, где n — ранг сечений, x — размер исходного вывода, а c — некоторая константа. Это позволяет непосредственно формализовать в EA^+ обычное индуктивное доказательство теоремы об устранении сечения (см. также [46], с. 376).

Для языка исчисления Тейта технически удобно распространить синтаксическое понятие Π_n-формулы на все формулы, получающиеся из Σ_{n-1}- и Π_{n-1}-формул с помощью связок $\wedge$, $\vee$ и квантора $\forall$. В этом и следующем параграфах мы будем работать в исчислении Тейта для арифметического языка без символа экспоненты. Определение истинности для Δ_0-формул, выражаемое элементарной формулой в EA, построено в [46], с. 364. На основе этого, как в [46], с. 58–59, строятся определения истинности для классов Σ_n и Π_n арифметической иерархии при $n \geq 1$.

Помимо утверждения 2.6 нам будут нужны некоторые дополнительные свойства определения истинности для Π_n-формул, называемые *условиями Тарского.* Условия Тарского формально выражают тот факт, что определение истинности $\mathsf{True}_{\Pi_n}(x)$ корректно определено на атомарных формулах и доказуемо в EA коммутирует с булевыми связками и кванторами на множестве Π_n-формул. Другими словами, в EA доказуемо: *для любых формул* $\varphi, \psi, \theta, \alpha, \gamma$ *таких, что* $\varphi, \neg\varphi, \psi, \theta, \forall x\gamma(x), \exists x\alpha(x) \in St \cap \Pi_n$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) &\leftrightarrow \neg\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi\urcorner),\\
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\theta \wedge \psi\urcorner) &\leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\theta\urcorner) \wedge \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\psi\urcorner),\\
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\theta \vee \psi\urcorner) &\leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\theta\urcorner) \vee \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\psi\urcorner),\\
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\exists x\alpha(x)\urcorner) &\leftrightarrow \exists x\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\alpha(\dot{x})\urcorner),\\
\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\forall x\gamma(x)\urcorner) &\leftrightarrow \forall x\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\gamma(\dot{x})\urcorner).
\end{aligned}$$

Подчеркнём, что вышеприведённые условия доказуемы в EA не только для индивидуальных формул φ,ψ,... , но и с кванторами общности по их гёделевым номерам. (В последнем случае обозначение $\ulcorner\alpha(\dot{x})\urcorner$ следует понимать как определимый терм для элементарной функции, сопоставляющей номеру формулы α и числу x номер формулы $\alpha(\overline{x})$. Поскольку ниже мы используем условия Тарского лишь в неформальном контексте, мы не будем вводить специальных обозначений для такого рода функций.)

Мы также предполагаем, что формализация операции $\bigvee\Gamma$ на секвенциях Γ, состоящих из Π_n-формул, доказуемо в EA согласована с $\mathsf{True}_{\Pi_n}(x)$ в том смысле, что истинность $\bigvee\Gamma$ не зависит от упорядочения формул секвенции Γ в дизъюнкцию. В частности, в EA доказуемо: *для любых* $\varphi \in \Gamma \subseteq St \cap \Pi_n$

$$\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\bigvee\Gamma\urcorner). \tag{5}$$

Считаем, что для пустой секвенции Γ $\bigvee\Gamma := \bot$ и тем самым доказуемо $\neg\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\bigvee\Gamma\urcorner)$.

В EA мы также имеем элементарную определимую универсальную функцию для термов языка без экспоненты, то есть функцию $\mathsf{eval}(u,x)$, для любого терма $t(x_0,\dots,x_n)$ удовлетворяющую условию[3]

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{eval}(\ulcorner t \urcorner, \langle x_0,\dots,x_n \rangle) = t(x_0,\dots,x_n).$$

Обычно функция $\mathsf{eval}(u,x)$ используется явно в конструкции определения истинности для означивания атомарных и ограниченных формул ([46], с. 363–364). Вместе с доказуемой тотальностью $\mathsf{eval}(u,x)$ это влечет, что определение истинности и универсальная функция согласованы в том смысле, что в EA доказуемо: *для любых Π_n-формул $\varphi(z_0,\dots,z_m)$ и термов $t_0(\vec{x}),\dots,t_m(\vec{x})$*

$$\begin{aligned} &\textstyle\bigwedge_{i=0}^{m} \mathsf{eval}(\ulcorner t_i \urcorner, \langle \vec{x} \rangle) = y_i \to \\ &\quad (\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \varphi(t_0(\dot{\vec{x}}),\dots,t_m(\dot{\vec{x}})) \urcorner) \leftrightarrow \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \varphi(\dot{y}_0,\dots,\dot{y}_m) \urcorner)). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь и ниже $\vec{x}$ есть сокращение для $x_0,\dots,x_k$; $\dot{\vec{x}}$ обозначает $\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_k$; $\overline{\vec{x}}$ обозначает $\overline{x}_0,\dots,\overline{x}_k$; а $\langle \vec{x} \rangle$ есть $\langle x_0,\dots,x_k \rangle$.

4.2 Схемы индукции с параметрами

Мы начнём с базисной леммы о схемах индукции ограниченной арифметической сложности, доказанной в [68].

Лемма 4.1. *$I\Sigma_n \equiv I\Pi_n$ для любого $n \geq 1$.*

Доказательство. Рассмотрим любую Π_n-формулу $\varphi(x)$. Чтобы вывести пример схемы IA для $\varphi(x)$ с помощью Σ_n-индукции, рассмотрим Σ_n-формулу $\psi(a,x) := \neg\varphi(a \dot{-} x)$. Тогда $\forall x(\varphi(x) \to \varphi(x{+}1))$ влечет $\forall x(\psi(a,x) \to \psi(a,x+1))$, следовательно $\psi(a,0) \to \psi(a,a)$, по $I\Sigma_n$. Но это означает, что $\varphi(0) \to \varphi(a)$. $\boxtimes$

Отметим роль параметра a в этом рассуждении: оно не проходит для теории $I\Sigma_n^-$.

Следующее предложение для случая примитивно рекурсивной арифметики PRA вместо EA и $n \geq 2$ получено Д. Лейвантом [55]. Случай $n = 1$ требует ослабления теории PRA до EA. Включение теорий слева направо в этой теореме впервые было отмечено, по видимому, Х. Оно [65].

Теорема 7. *$I\Sigma_n \equiv \mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA})$ для любого $n \geq 1$.*

Доказательство. ($\subseteq$) Пусть $\sigma(x,y) \in \Sigma_n$, где без ограничения общности мы рассматриваем единственный параметр y. Обозначим через $\psi(y)$ формулу

$$\sigma(0,y) \wedge \forall x\,(\sigma(x,y) \to \sigma(x+1,y)).$$

С помощью очевидной индукции по k получаем

$$\forall k,m \in \mathbb{N} \quad \mathsf{EA} \vdash \psi(\overline{m}) \to \sigma(\overline{k},\overline{m}).$$

[3] Подразумеваем, что все переменные арифметического языка упорядочены в фиксированную последовательность $x_0,\dots,x_n,\dots$

Размер соответствующего EA-вывода оценивается элементарной функцией от k и m, поэтому внешняя индукция по k формализуема в EA:

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x, y\, \Box_{\mathsf{EA}}(\psi(\dot{y}) \to \sigma(\dot{x}, \dot{y})).$$

Заметим, что $\psi(y) \to \sigma(x, y)$ логически эквивалентна Σ_{n+1}-формуле, поэтому с помощью равномерной схемы Σ_{n+1}-рефлексии выводим

$$\mathsf{EA} + \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA}) \vdash \forall x, y\, (\psi(y) \to \sigma(x, y)),$$

что эквивалентно соответствующему примеру схемы индукции.

($\supseteq$) Для доказательства $\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA})$ в $I\Sigma_n$ заметим, что достаточно вывести в $I\Sigma_n$ схему равномерной Σ_{n+1}-рефлексии $\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{PC})$ для *чистого исчисления предикатов* PC в арифметическом языке без экспоненты. Это следует из доказуемой эквивалентности EA и $I\Delta_0+\mathsf{Exp}$ и того, что $I\Delta_0+\mathsf{Exp}$ имеет конечную Π_2 аксиоматизацию (над PC), откуда в силу аналога леммы 2.23

$$\begin{aligned} \mathsf{EA} \vdash \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA}) &\leftrightarrow \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(I\Delta_0 + \mathsf{Exp}) \\ &\leftrightarrow \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{PC}). \end{aligned}$$

Для заданной Σ_{n+1}-формулы $\sigma(z) := \exists y_1 \ldots \exists y_m\, \alpha(y_1, \ldots, y_m, z)$, где $\alpha \in \Pi_n$, и числа $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим вывод без сечения секвенции $\sigma(\overline{k}), \Pi$ для некоторого множества Π_n-формул Π. По свойству подформульности любая формула, входящая в этот вывод, или (a) имеет вид

$$\exists y_i \ldots \exists y_m\, \alpha(t_0, \ldots, t_{i-1}, y_i, \ldots, y_m, \overline{k}),$$

для некоторого $0 \leq i \leq m$ и термов $t_0, \ldots, t_{i-1}$; или (b) есть Π_n-формула.

Пусть $I_\sigma(h, k)$ означает Π_n-формулу, естественным образом выражающую следующее:

> *“Для любого p, если p есть код вывода без сечения секвенции вида $\Gamma(\overline{k}), \Pi(\vec{a})$, где $\Gamma(\overline{k})$ есть множество формул вида (a) выше, $\Pi(\vec{a})$ есть множество Π_n-формул, и если высота вывода p меньше h, то $\forall \vec{x}\, \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner \bigvee \Pi(\dot{\vec{x}}) \urcorner)$.”*

Лемма 4.2. $\mathsf{EA} \vdash \neg\sigma(z) \to \Big(I_\sigma(0, z) \wedge \forall h\, (I_\sigma(h, z) \to I_\sigma(h+1, z))\Big)$.

Доказательство. Мы докажем лемму, рассуждая неформально внутри EA. $I_\sigma(0, z)$ имеет место тривиальным образом. Покажем, что $I_\sigma(h, z)$ влечет $I_\sigma(h+1, z)$. Для этого рассмотрим вывод без сечения высоты h секвенции вида $\Gamma, \Pi(\vec{a})$, где Γ и Π определены как выше, и покажем, что дизъюнкция Π истинна в смысле True_{Π_n} при любой подстановке нумералов вместо свободных переменных в Π. Мы разбираем несколько случаев, в зависимости от вида последнего применения правила в данном выводе. Утверждение $I_\sigma(h, z)$ мы будем называть предположением индукции.

Случай 1. Секвенция $\Gamma, \Pi(\vec{a})$ есть логическая аксиома, то есть имеет вид $\Delta, \varphi(\vec{a}), \neg\varphi(\vec{a})$ для некоторой атомарной формулы φ. Поскольку все формулы типа (a) содержат кванторы существования, и тем самым не являются атомарными формулами или их отрицаниями, φ и $\neg\varphi$ должны входить в П. Условия Тарского влекут, что для любого $\vec{x}$

$$\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\varphi(\dot{\vec{x}})\urcorner) \vee \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\neg\varphi(\dot{\vec{x}})\urcorner).$$

Отсюда мы выводим $\forall\vec{x}\,\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\bigvee\Pi(\dot{\vec{x}})\urcorner)$ в силу (5).

Случай 2. Секвенция $\Gamma, \Pi(\vec{a})$ получена по правилу введения булевой связки или квантора в формулу из $\Pi(\vec{a})$. Все эти правила рассматриваются аналогично, опираясь на свойство подформульности для выводов без сечения и условия Тарского для True_{Π_n}. Например, правило введения квантора общности имеет вид

$$\frac{\Gamma, \Pi'(\vec{a}), \varphi(\vec{a}, b)}{\Gamma, \Pi'(\vec{a}), \forall x\varphi(\vec{a}, x)},$$

где b не входит свободно в $\Gamma, \Pi'(\vec{a})$. Мы должны показать, что для любого набора $\vec{x}$ формула $\bigvee\Pi'(\overline{\vec{x}})\vee\forall y\varphi(\overline{\vec{x}}, y)$ истинна. По предположению индукции, поскольку b не входит свободно в Π', мы знаем, что для любого y формула $\bigvee\Pi'(\overline{\vec{x}}) \vee \varphi(\overline{\vec{x}}, \overline{y})$ истинна. Коммутируя True_{Π_n} с $\vee$ мы получаем, что для любого y или $\bigvee\Pi'(\overline{\vec{x}})$, или $\varphi(\overline{\vec{x}}, \overline{y})$ истинна. Поскольку $\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\bigvee\Pi'(\dot{\vec{x}})\urcorner)$ не зависит от y, отсюда вытекает, что или $\bigvee\Pi'(\overline{\vec{x}})$ истинна, или для любого y $\varphi(\overline{\vec{x}}, \overline{y})$ истинна. Коммутируя True_{Π_n} с квантором общности, а затем с дизъюнкцией в обратном направлении, мы заключаем, что формула $\bigvee\Pi'(\overline{\vec{x}}) \vee \forall y\varphi(\overline{\vec{x}}, y)$ истинна, что и требовалось доказать.

Случай 3. Последнее применение правила вывода добавляет квантор существования непосредственно перед α, то есть вывод имеет вид

$$\frac{\Gamma', \alpha(t_0(\vec{a}), \ldots, t_{m-1}(\vec{a}), t_m(\vec{a}), \overline{z}), \Pi(\vec{a})}{\Gamma', \exists y_m\alpha(t_0(\vec{a}), \ldots, t_{m-1}(\vec{a}), y_m, \overline{z}), \Pi(\vec{a})}.$$

По предположению индукции или дизъюнкция $\Pi(\overline{\vec{x}})$, или формула

$$\alpha(t_0(\overline{\vec{x}}), \ldots, t_m(\overline{\vec{x}}), \overline{z})$$

истинна. Нам нужно опровергнуть вторую возможность, рассуждая внутри EA.

Заметим, что хотя, вообще говоря, t_i являются “нестандартными” термами, α — фиксированная “стандартная” Π_{n+1}-формула. Поэтому утверждение 2.6 может быть применено к α после вычисления значений термов t_i. Так, по (6) и утверждению 2.6 мы получаем:

$$\begin{aligned}\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\alpha(t_0(\dot{\vec{x}}), \ldots, t_m(\dot{\vec{x}}), \dot{z})\urcorner) \wedge \textstyle\bigwedge_{i=0}^m \mathsf{eval}(\ulcorner t_i\urcorner, \langle\vec{x}\rangle) = y_i \quad &\to \\ \to \quad \mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\alpha(\dot{y}_0, \ldots, \dot{y}_m, \dot{z})\urcorner)& \\ \to \quad \alpha(y_0, \ldots, y_m, z).&\end{aligned}$$

Поскольку универсальная функция доказуемо тотальна в EA, отсюда вытекает, что формула

$$\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\alpha(t_0(\dot{\vec{x}}), \ldots, t_m(\dot{\vec{x}}), \dot{z})\urcorner)$$

влечет $\exists y_0 \ldots \exists y_m\, \alpha(y_0, \ldots, y_m, z)$, то есть противоречит гипотезе $\neg\sigma(z)$. Таким образом, для любых $t_0, \ldots, t_m$ и $\vec{x}$ формула $\alpha(t_0(\overline{\vec{x}}), \ldots, t_m(\overline{\vec{x}}), \overline{z})$ не может быть истинной, значит истинна дизъюнкция $\Pi(\overline{\vec{x}})$.

Случай 4. $\Gamma, \Pi(\vec{a})$ получается по правилу, вводящему любой другой квантор существования в формулу из Γ. Тогда наше утверждение непосредственно следует из предположения индукции, поскольку Π-часть посылки в этом случае совпадает с соответствующей частью заключения. ⊠

Поскольку для $n \geq 1$ $I\Sigma_n$ эквивалентна $I\Pi_n$ и содержит EA^+, из предыдущей леммы непосредственно вытекает, что

$$I\Sigma_n \vdash \neg\sigma(z) \to \forall h\, I_\sigma(h, z). \tag{7}$$

Чтобы вывести $\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{PC})$ мы рассуждаем теперь внутри $I\Sigma_n$ для каждой Σ_{n+1}-формулы $\sigma(z)$ следующим образом.

Допустим $\neg\sigma(z)$ и $\Box_{\mathsf{PC}}\, \sigma(\dot{z})$, тогда секвенция, состоящая из единственной формулы $\sigma(\overline{z})$, доказуема в исчислении Тейта. По (формализованной) теореме об устранении сечения мы получаем вывод этой секвенции без сечений и по (7) заключаем, что имеет место $\mathsf{True}_{\Pi_n}(\ulcorner\bot\urcorner)$. Но отсюда следует $\bot$, то есть противоречие. ⊠

Следующее следствие было получено Г. Крайзелем и А. Леви [54].

Следствие 4.3. $\mathsf{PA} \equiv \mathsf{EA} + \mathsf{RFN}(\mathsf{EA})$.

Как следствие теорем о неограниченности для равномерной рефлексии мы получаем следующие результаты, из которых первый получен М. Рабином [73], а второй Д. Лейвантом [55].

Следствие 4.4. (i) PA *не содержится ни в одном непротиворечивом расширении* EA *ограниченной арифметической сложности.*

(ii) $I\Sigma_n$ *не содержится ни в одном непротиворечивом расширении* EA *сложности* Σ_{n+2}.

Отметим, что сложность очевидной аксиоматизации $I\Sigma_n$ есть Π_{n+2}.

Следствие 4.5. *Ни* $I\Pi^R_{n+1}$, *ни* $I\Pi^-_{n+1}$ *не содержат* $I\Sigma_n$.

Доказательство. Арифметическая сложность аксиоматизации этих теорий есть Π_{n+1} и Σ_{n+2}, соответственно (все формулы, являющиеся заключениями примеров правила Π_{n+1}-IR, имеют сложность Π_{n+1}). ⊠

4.3 Правила индукции

Для начала мы введем некоторую общую терминологию и обозначения, касающихся правил вывода в арифметике. Мы называем *правилом* произвольное множество *примеров*, то есть выражений вида

$$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\psi}, \tag{8}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и ψ — арифметические формулы. Выводы с использованием правил определяются стандартным образом; $T + R$ означает замыкание теории T относительно правила R и логики первого порядка. $[T, R]$ означает замыкание T относительно *однократного применения* правила R, то есть теорию, аксиоматизированную над T всеми формулами ψ такими, что для некоторых формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, выводимых в T, (8) есть пример R.

Правило R_1 называется *выводимым* из R_2, если для любой теории T, содержащей EA, $T + R_1 \subseteq T + R_2$. Другими словами, это означает, что любой вывод из посылок с использованием R_1 можно заменить на эквивалентный вывод с использованием EA и R_2. Правило R_1 называется *сводимым* к R_2, если для любой теории T, содержащей EA, $[T, R_1] \subseteq [T, R_2]$. R_1 и R_2 называются *конгруэнтными,* если они взаимно сводимы (обозначается $R_1 \cong R_2$). Для теории U, содержащей EA, мы говорим, что R_1 и R_2 *конгруэнтны по модулю* U, если для любого расширения T теории U $[T, R_1] \equiv [T, R_2]$.

Теперь мы рассмотрим более подробно правила индукции для Σ_n- и Π_n-формул, обозначаемые соответственно Σ_n-IR и Π_n-IR. Вообще говоря, мы допускаем параметры в индукционных формулах этих правил, однако имеет место следующая полезная лемма.

Лемма 4.6. (i) Π_n-IR *сводится к правилу* Π_n-IR *без параметров.*

(ii) Σ_n-IR *сводится к правилу* Σ_n-IR *без параметров.*

Доказательство. Применение IR к формуле $\varphi(x, a)$ с индукционной переменной x и параметром a очевидным образом сводится к применению IR для формулы $\forall z \varphi(x, z)$, что доказывает первое утверждение леммы.

Допустим теперь, что $\varphi(x, y, a) \in \Pi_{n-1}$ и

$$T \vdash \exists y\, \varphi(0, y, a), \text{ и} \tag{9}$$

$$T \vdash \forall x\, (\exists y\, \varphi(x, y, a) \to \exists y\, \varphi(x+1, y, a)). \tag{10}$$

Обозначим

$$\varphi'(x, y) := \forall i \leq x\, \varphi((i)_0, (y)_i, (i)_1).$$

Тогда мы имеем, в силу (9) и монотонности кодирования последовательностей, $T \vdash \exists y\, \varphi'(0, y)$. Для доказательства

$$T \vdash \forall x\, (\exists y\, \varphi'(x, y) \to \exists y'\, \varphi'(x+1, y'))$$

предположим, что $\forall i \leq x\, \varphi((i)_0, (y)_i, (i)_1)$. Если $(x+1)_0 = 0$, то по (9) найдётся элемент z, такой что $\varphi(0, z, (x+1)_1)$, и в качестве y' можно взять последовательность $y * \langle z \rangle$. Если же $(x+1)_0 > 0$, то код пары $p := \langle (x+1)_0 - 1, (x+1)_1 \rangle$ строго меньше $x+1$, и таким образом (по индуктивному предположению) найдется $z = (y)_p$ такой, что $\varphi((x+1)_0 - 1, z, (x+1)_1)$. Из (10) следует, что для некоторого z' имеет место $\varphi((x+1)_0, z', (x+1)_1)$. Значит, можно взять в качестве y' последовательность $y * \langle z' \rangle$. Таким образом, применение IR для формулы $\exists y\, \varphi(x, y, a)$ сводится к применению IR для Σ_n-формулы $\exists y\, \varphi'(x, y)$ без параметров. $\boxtimes$

Следствие 4.7. $I\Sigma_n^R \subseteq I\Sigma_n^-$, $I\Pi_n^R \subseteq I\Pi_n^-$.

Теперь мы введём новое правило вывода, связанное со схемой рефлексии. Для данной элементарно аксиоматизированной теории T правилом *метарефлексии над T* называется правило

$$\mathsf{RR}^n(T): \qquad \frac{\varphi(\vec{x})}{\langle n\rangle_T\varphi(\dot{\vec{x}})}.$$

Это же правило с ограничением $\varphi \in \Pi_m$ обозначается Π_m-$\mathsf{RR}^n(T)$. В случае $T = \mathsf{EA}$ мы пишем Π_m-RR^n.

Заметим, что Π_m-$\mathsf{RR}^n(T)$ конгруэнтно своему варианту без параметров, поскольку по этому правилу из $\varphi(\vec{x})$ можно вывести $\langle n\rangle_T\forall\vec{x}\,\varphi(\vec{x})$, откуда $\forall\vec{x}\,\langle n\rangle_T\varphi(\dot{\vec{x}})$ вытекает в силу условий Лёба.

Следующая теорема получена в [12, 24].

Теорема 8. (i) Π_{n+1}-$\mathsf{IR} \cong \Pi_{n+2}$-$\mathsf{RR}^n$, если $n > 0$;

(ii) Π_1-$\mathsf{IR} \cong \Pi_2$-RR^0 (по модулю EA^+).

Доказательство. Для сведения Π_{n+1}-IR к Π_{n+2}-RR^n допустим, что теория T выводит

$$\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(S(x))), \tag{11}$$

где мы можем предполагать, что φ не содержит дополнительных параметров. Заметим, что (11) логически эквивалентна некоторому Π_{n+2}-предложению, скажем ψ. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $\mathsf{EA} + \psi \vdash \varphi(\overline{n})$, и формализуя этот факт в EA получаем

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x\, \Box_{\mathsf{EA}+\psi}\,\varphi(\dot{x}).$$

С другой стороны, с помощью метарефлексии из ψ мы выводим

$$[T, \Pi_{n+2}\text{-}\mathsf{RR}^n] \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA} + \psi),$$

откуда

$$[T, \Pi_{n+2}\text{-}\mathsf{RR}^n] \vdash \forall x\varphi(x),$$

что и требовалось.

Теперь нам нужно показать, что для T, содержащей EA (или EA^+ при $n = 0$),

$$[T, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA} + \psi)$$

для любого предложения $\psi \in \Pi_{n+2}$ такого, что $T \vdash \psi$. Без ограничения общности мы можем считать, что T сформулирована в арифметическом языке без экспоненты и $T \equiv I\Delta_0 + \mathsf{Exp} + \psi$. Используя конечную аксиоматизируемость $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$ мы также предполагаем, что единственная нелогическая аксиома T имеет вид $\forall x_0 \ldots \forall x_m \neg\alpha(x_0, \ldots, x_m)$, где $\alpha \in \Pi_n$. В частности, эта формула аккумулирует все аксиомы равенства и конечную Π_2-аксиоматизацию $I\Delta_0 + \mathsf{Exp}$.

Для доказательства $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$ мы рассматриваем в исчислении Тейта произвольные выводы без сечения секвенций вида

$$\exists x_0 \ldots \exists x_m\, \alpha(x_0, \ldots, x_m), \Pi,$$

где Π есть множество Π_{n+1}-формул. В этой ситуации непосредственно применима лемма 4.2: формула $\exists x_0 \ldots \exists x_m\, \alpha(x_0, \ldots, x_m)$, то есть отрицание аксиомы T, играет роль формулы σ. Параметр z в этом случае отсутствует.

Поскольку T содержит EA, по лемме 4.2

$$T \vdash I_\sigma(0) \wedge \forall h\, (I_\sigma(h) \to I_\sigma(h+1)).$$

Поэтому, по правилу Π_{n+1}-IR мы можем вывести

$$[T, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \forall h\, I_\sigma(h),$$

что влечёт $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T)$ над EA^+. Осталось заметить, что при $n > 0$ теория $[\mathsf{EA}, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}]$ содержит EA^+. ⊠

Пусть, для фиксированного $n \geq 0$, T^n_k означает последовательность теорий, основанную на итерации формулы n-непротиворечивости над T:

$$T^n_0 := T, \;\; T^n_{k+1} := T^n_k + n\text{-}\mathsf{Con}(T^n_k), \;\; T^n_\omega := \bigcup_{k \geq 0} T^n_k.$$

Поскольку формула n-$\mathsf{Con}(T)$ имеет сложность Π_{n+1}, теорема 8 может быть применена несколько раз, и мы получаем следующее следствие.

Следствие 4.8. *Пусть T — конечная Π_{n+2}-аксиоматизированная теория, содержащая EA (или EA^+ для $n = 0$). Тогда*

$$T + \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR} \equiv T^n_\omega.$$

Можно отметить также, что k-кратное применение правила индукции в точности соответствует k-раз итерированной схеме рефлексии над T.

Следствие 4.9. $I\Pi^R_{n+1} \equiv \mathsf{EA}^n_\omega$ *для любого $n > 0$.*

Интересный частный случай следствия 4.8 относится к правилу индукции для Π_1-формул.

Следствие 4.10. *Для конечных Π_2-аксиоматизированных теорий T, содержащих EA^+,*

$$T + \Pi_1\text{-}\mathsf{IR} \equiv T_\omega \equiv T + \mathsf{Con}(T) + \mathsf{Con}(T + \mathsf{Con}(T)) + \ldots \tag{12}$$

Следствие 4.11. *Для Π_{n+1}-аксиоматизированных теорий T, содержащих EA (или EA^+ для $n = 1$), теория $T + \Pi_n$-IR не является конечно аксиоматизируемой, при условии её непротиворечивости.*

Следствие 4.12. *Теории $I\Pi^R_n$ для $n > 1$, а также теория $\mathsf{EA}^+ + \Pi_1$-IR, не являются конечно аксиоматизируемыми.*

Замечание 4.13. Характеризация правила Π_1-IR с точностью до конгруэнтности по модулю EA может быть получена на основе идей работы Уилки и Париса [95]. В этой ситуации формула непротиворечивости T в смысле доказуемости без сечения $\mathsf{Con}^{\mathsf{cf}}(T)$ играет роль $\mathsf{Con}(T)$. Заметим, что в EA^+ обе эти формулы эквивалентны в силу доказуемости теоремы об устранении сечения.

Все фактические применения правила сечения в доказательстве теоремы 8 имеют ограниченный (стандартный) ранг, поэтому их устранимость можно установить уже в EA. С учётом этого все рассуждения проходят без существенных изменений и показывают, что Π_1-IR конгруэнтно правилу

$$\frac{\varphi}{\mathsf{Con}^{\mathsf{cf}}(\mathsf{EA}+\varphi)}, \quad \varphi \in \Pi_2.$$

В силу результатов [95] отсюда также следует, что $I\Pi_1^R$ не является конечно аксиоматизируемой теорией.

Доказательство следующей теоремы более сложно и мы его опускаем (см. [24]).

Теорема 9. (i) Σ_1-$\mathsf{IR} \cong \Pi_2$-RR^1;

(ii) Σ_n-$\mathsf{IR} \cong \Pi_{n+1}$-$\mathsf{RR}^n$ по модулю $I\Sigma_{n-1}$, для $n > 1$.

Поскольку, как нетрудно видеть, $[\mathsf{EA}, \Sigma_n\text{-}\mathsf{IR}]$ содержит $I\Sigma_{n-1}$, утверждение (ii) влечёт, что правила Π_{n+1}-RR^{n+1} и Σ_n-IR взаимно выводимы для всех $n \geq 1$. Фактически, k вложенных применений правила Π_{n+1}-RR^n сводятся к $k+1$ применению правила Σ_n-IR, где первое используется для вывода $I\Sigma_{n-1}$. Вопрос о том, можно ли здесь ограничиться k применениями Σ_n-IR, пока открыт.

Следствие 4.14. $I\Sigma_n^R \equiv \mathsf{EA}_\omega^n \equiv I\Pi_{n+1}^R$ *для всех* $n > 0$.

Заметим, что это следствие было нами уже доказано для $n = 1$ (предложение 3.7).

4.4 Беспараметрическая индукция

В этом разделе мы устанавливаем взаимосвязь между схемами рефлексии и схемами беспараметрической индукции в арифметике. Имея в виду точное соответствие схем индукции и схем равномерной рефлексии над EA (предложение 7), на первый взгляд кажется естественным предположить, что беспараметрическая индукция должна соответствовать схемам локальной рефлексии. Однако, нетрудно заметить, что локальные схемы рефлексии являются для этого слишком слабыми принципами: $\mathsf{Rfn}(\mathsf{EA})$ содержится в расширении EA множеством всех истинных Π_1-предложений, в то время как по следствиям 4.7, 4.9 и предложению 2.16 ни одна из теорий $I\Pi_n^-$ для $n > 1$ таковой не является. Оказывается, что для получения точной характеризации необходимо перейти к релятивизированному предикату доказуемости (см. §2.3).

Релятивизированные схемы локальной рефлексии определяем по аналогии следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathsf{Rfn}^n(T) &:= \{[n]_T\varphi \to \varphi \mid \varphi \in St\}, \\ \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_m}(T) &:= \{[n]_T\sigma \to \sigma \mid \sigma \in St \cap \Sigma_m\}. \end{aligned}$$

Для $n = 0$ все эти схемы совпадают, по определению, со своими нерелятивизированными аналогами.

Заметим, что с помощью контрапозиции схема $\mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_m}(T)$ эквивалентна над EA

$$\{\pi \to \langle n\rangle_T\pi \mid \pi \in St \cap \Pi_m\}.$$

Следующая характеризация получена в [26, 28].

Теорема 10. *Для $n \geq 1$ следующие теории эквивалентны:*

(i) $I\Sigma_n^- \equiv \mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA})$;

(ii) $I\Pi_{n+1}^- \equiv \mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA})$;

(iii) $\mathsf{EA}^+ + I\Pi_1^- \equiv \mathsf{EA}^+ + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_2}(\mathsf{EA}) \equiv \mathsf{EA}^+ + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_2}(\mathsf{EA}^+)$.

Доказательство. Все утверждения доказываются аналогично, с использованием теорем 9 и 8, соответственно. Мы приведем лишь доказательство (ii).

Для включения ($\subseteq$) нам необходимо вывести

$$\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \varphi(x),$$

для каждой Π_{n+1}-формулы $\varphi(x)$ с единственной свободной переменной x. Пусть ψ означает Π_{n+2}-предложение логически эквивалентное

$$\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \varphi(x+1)).$$

Как обычно, внешней индукцией по m легко установить, что для любого m $\mathsf{EA} + \psi \vdash \varphi(\overline{m})$. Этот факт формализуем в EA, поэтому

$$\mathsf{EA} \vdash \forall x\, \Box_{\mathsf{EA}+\psi}\, \varphi(\dot{x}). \tag{13}$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA}) + \psi &\vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA} + \psi) \\ &\vdash \forall x\, (\Box_{\mathsf{EA}+\psi}\, \varphi(\dot{x}) \to \varphi(x)) \\ &\vdash \forall x \varphi(x), \quad \text{по (13)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\mathsf{EA} + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA}) \vdash \psi \to \forall x \varphi(x),$$

что и требовалось.

Для доказательства включения ($\supseteq$) заметим, что для любого Π_{n+2}-предложения φ теория $I\Pi^-_{n+1} + \varphi$ содержит $\mathsf{EA} + \varphi + \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}$ по лемме 4.6. Следовательно, по теореме 8

$$I\Pi^-_{n+1} + \varphi \vdash \langle n \rangle_{\mathsf{EA}}\varphi.$$

Значит,

$$I\Pi^-_{n+1} \vdash \varphi \to \langle n \rangle_{\mathsf{EA}}\varphi,$$

откуда вытекает требуемое. ⊠

Теорема 10 позволяет применить технику, развитую в §2.5, к исследованию беспараметрической индукции. Поскольку релятивизированный и обычный предикаты доказуемости удовлетворяют условиям Лёба и имеют одинаковую логику доказуемости, все результаты о локальных схемах рефлексии, доказанные нами ранее, обобщаются на релятивизированные схемы.

Аналог предложения 2.33 состоит в следующем.

Лемма 4.15. *Любые m примеров схемы $\mathsf{Rfn}^n(T)$ Π_{n+1}-консервативны над T^n_m.*

Доказательство. В доказательстве 2.33 следует читать $[n]_T$ всюду вместо $\Box_T$. Возможность применения леммы 2.27 обеспечивается леммой 2.13. По лемме 2.9 итерированные формулы n-непротиворечивости соответствуют итерированным схемам равномерной Π_{n+1}-рефлексии над T. ⊠

Следующее следствие получено в [26, 28].

Предложение 4.16. *Для любого $n \geq 1$*

(i) *Любые m примеров схемы $I\Pi^-_{n+1}$ Π_{n+1}-консервативны над EA^n_m.*

(ii) *Теория $I\Pi^-_{n+1}$ Π_{n+1}-консервативна над $\mathsf{EA}^n_\omega \equiv I\Sigma^R_n$.*

Доказательство. Утверждение (ii) следует из (i). Доказательство утверждения (i) основывается на предыдущей лемме и замечании, что характеризация схем беспараметрической индукции в терминах схем рефлексии сохраняет число примеров соответствующих схем.

Лемма 4.17. *Для любого примера B схемы $I\Pi^-_{n+1}$ найдется Σ_{n+2}-предложение σ такое, что $[n]_{\mathsf{EA}}\sigma \to \sigma$ влечет B над EA. Обратно, для каждого такого σ найдется пример B схемы $I\Pi^-_{n+1}$ такой, что в $\mathsf{EA} + B$ выводимо $[n]_{\mathsf{EA}}\sigma \to \sigma$.*

Доказательство получается непосредственной верификацией нашего доказательства теоремы 10. Для доказательства второй части леммы мы используем теорему 8 (i), утверждающую, что

$$[\mathsf{EA} + \neg\sigma, \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}] \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(\mathsf{EA} + \neg\sigma).$$

Также заметим, что любое конечное число *неитерированных* применений правила $\Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{IR}$ может быть сведено к единственному применению, которое, в свою очередь, сводится к единственному примеру $I\Pi^-_{n+1}$. ⊠

Замечание 4.18. Аналогичное утверждение верно для $I\Sigma_n^-$, но вторая часть имеет место, по-видимому, лишь над $I\Sigma_{n-1}$. Вообще говоря, необходимы $m+1$ примеров схемы $I\Sigma_n^-$, чтобы вывести m примеров схемы $\mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+1}}(\mathsf{EA})$ (первый из них используется для вывода $I\Sigma_{n-1}$).

В силу леммы 4.17 любые m примеров схемы $I\Pi_{n+1}^-$ содержатся в некотором расширении EA m примерами схемы $\mathsf{Rfn}^n(\mathsf{EA})$, которое является Π_{n+1}-консервативным над EA^n_m по лемме 4.15. Это завершает доказательство предложения 4.16. ⊠

Замечание 4.19. Утверждение, аналогичное предложению 4.16, также имеет место для схемы $I\Pi_1^-$ над теорией EA^+. См. теорему 10 (iii).

Из предложения 4.16 получаем следующее интересное следствие [26, 28].

Следствие 4.20. *Классы доказуемо тотальных вычислимых функций теорий $I\Pi_{n+1}^-$ и $I\Sigma_n^R$ совпадают. В частности, $\mathcal{F}(I\Pi_2^-)$ совпадает с множеством всех примитивно рекурсивных функций.*

Доказательство. В силу части (ii) предложения 4.16, $I\Pi_{n+1}^-$ является Π_{n+1}-консервативным расширением теории $I\Sigma_n^R$. Класс доказуемо тотальных рекурсивных функций $I\Sigma_1^R$ совпадает с множеством примитивно рекурсивных функций в силу предложения 3.7. ⊠

Релятивизация теоремы 6 (iii) состоит в следующем.

Лемма 4.21. *Для любого $n \geq 0$ теория $T + \mathsf{Rfn}^n(T)$ консервативна над $T + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+1}}(T)$ относительно $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-предложений.*

Доказательство дословно повторяет приведённое нами доказательство теоремы 6. ⊠

Следствие 4.22. *Для любого $n \geq 1$ теория $I\Pi_{n+1}^-$ консервативна над $I\Sigma_n^-$ относительно $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-предложений.*

Из 4.16 также вытекает невозможность конечной аксиоматизации теорий $I\Pi_n^-$, ранее установленная Кэйе, Парисом и Димитракопулосом [49], использовавшими методы теории моделей. Ниже мы получим обобщение этого результата. Для этого установим следующий, формально более сильный вариант предложения 4.16.

Предложение 4.23. *Пусть T — расширение EA конечным числом Π_{n+2}-предложений, $n \geq 1$. Тогда*

(i) *расширение T любыми m примерами схемы $I\Pi_{n+1}^-$ является Π_{n+1}-консервативным над T^n_m;*

(ii) *$T + I\Pi_{n+1}^-$ есть Π_{n+1}-консервативное расширение T^n_ω.*

Доказательство. По теореме 10 для данной теории T имеем

$$\begin{aligned} T + I\Pi^-_{n+1} &\equiv T + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA}) \\ &\equiv T + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+2}}(T), \end{aligned}$$

в силу леммы 2.23. По лемме 4.15 отсюда следует второе утверждение. (Тот факт, что $T + I\Pi^-_{n+1}$ содержит T^n_ω, вытекает из следствий 4.8 и 4.7.) Первое утверждение получается аналогично из утверждения 4.16 (i). ⊠

Следствие 4.24. *Никакая непротиворечивая теория, расширяющая $I\Pi^-_{n+1}$ множеством Π_{n+2}-предложений, не является конечно аксиоматизируемой.*

Доказательство. Допустим, от противного, что такое конечное расширение существует. Без ограничения общности мы можем считать, что оно имеет вид $T + U$ для некоторых m примеров U схемы $I\Pi^-_{n+1}$, где T — конечное Π_{n+2}-аксиоматизированное расширение EA. Тогда по 4.23 (i) Π_{n+1}-следствия теории $T + U$ совпадают с Π_{n+1}-следствиями T^n_m. Однако, по 4.23 (ii)

$$T + I\Pi^-_{n+1} \vdash \mathsf{RFN}_{\Pi_{n+1}}(T^n_m).$$

Последняя формула является Π_{n+1}-формулой и невыводима в T^n_m. ⊠

Отметим также следующее следствие теоремы о неограниченности для локальных схем рефлексии.

Предложение 4.25. *$I\Pi^-_{n+1}$ не содержится ни в каком непротиворечивом перечислимом расширении EA множеством Π_{n+2}-предложений.*

Доказательство. По теореме 10 $I\Pi^-_{n+1}$ содержит схему $\mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA})$ и, тем самым, более слабую схему $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_{n+2}}(\mathsf{EA})$. Результат получается применением предложения 2.22. ⊠

Следствие 4.26. $I\Pi^-_{n+1} \not\subseteq I\Sigma^R_{n+1}$.

Заметим, что сложность естественной аксиоматизации $I\Pi^-_{n+1}$ есть Σ_{n+2}, а сложность $I\Sigma^-_n$ есть $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$. Мы имеем следующий вариант теоремы о неограниченности для $\mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+1}}(T)$.

Лемма 4.27. *$\mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+1}}(T)$ не содержится ни в каком непротиворечивом конечном расширении теории T с помощью $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-предложений.*

Доказательство. Очевидная релятивизация леммы 2.26 показывает, что схемы $\mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+1}}(T)$ и $\mathsf{Rfn}^n_{\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})}(T)$ дедуктивно эквивалентны над EA. Если последняя содержится в теории $T+\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$, то $T+\varphi \vdash [n]_T\neg\varphi \to \neg\varphi$, и тем более $T \vdash \Box_T\neg\varphi \to \neg\varphi$. Отсюда по теореме Лёба $T \vdash \neg\varphi$. ⊠

Как следствие получаем следующее предложение.

Предложение 4.28. *$I\Sigma^-_n$ не содержится ни в каком непротиворечивом конечном расширении EA с помощью $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-предложений.*

Следствие 4.29. *Любая непротиворечивая теория, расширяющая $I\Sigma_n^-$ с помощью $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-предложений, не является конечно аксиоматизируемой.*

Доказательство. Это вытекает из предложенеия 4.28 и того, что сама теория $I\Sigma_n^-$ имеет $\mathcal{B}(\Sigma_{n+1})$-аксиоматизацию. ⊠

Следующее следствие ранее получено в [49] другим методом.

Следствие 4.30. *Для любого $n \geq 1$ теории $I\Sigma_n^-$ и $I\Pi_n^-$ не являются конечно аксиоматизируемыми.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следствий 4.29 и 4.24. Для случая $I\Pi_1^-$ достаточно заметить, что если эта теория конечно аксиоматизируема, то таковой является и теория $\mathsf{EA}^+ + I\Pi_1^-$, что невозможно в силу замечания 4.19. ⊠

4.5 Схемы и правила рефлексии

В этом параграфе мы устанавливаем взаимосвязь между схемами и правилами рефлексии в арифметике. Мы показываем, что при определенных условиях схема $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+2}}(T)$ является Π_{n+1}-консервативным расширением замыкания теории T относительно правила Π_{n+1}-$\mathsf{RR}^n(T)$, т.е. теории T_ω^n.

Для $T = \mathsf{PRA}$ этот результат доказал У. Шмерль [79]. Однако для дальнейшего будет важно, что это утверждение имеет место при существенно более широких предположениях относительно теории T. Как мы покажем, из этого обобщения можно вывести ряд известных результатов: теорему Парсонса о частичной консервативности схем над правилами индукции и теорему Кэя, Париса и Димитракопулоса о частичной консервативности параметрических схем индукции над беспараметрическими. Мы также получаем следствие о Σ_2-консервативности $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ над $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$.

Доказываемая нами теорема [29] играет важную роль в следующей главе, где на её основе с использованием техники алгебр доказуемости получается новое доказательство непротиворечивости PA в стиле Генцена и даётся характеризация доказуемо тотальных вычислимых функций PA.

Теорема 11. *Пусть T — элементарно аксиоматизированная теория, содержащая EA, а U — любое Π_{n+2}-аксиоматизированное расширение EA. Тогда теория $U + \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T)$ Π_{n+1}-консервативна над $U + \Pi_{n+1}$-$\mathsf{RR}^n(T)$.*

Доказательство. Для любого терма s и формулы $\varphi(a)$ обозначим через $\ulcorner\psi(\dot{s})\urcorner$ результат подстановки s в терм $\ulcorner\psi(\dot{a})\urcorner$.

Лемма 4.31. *Для любого терма $s(\vec{x})$, где список $\vec{x}$ исчерпывает все переменные терма s, и любой формулы $\varphi(a)$ (где s подстановочен в φ вместо a)*

$$\mathsf{EA} \vdash \forall \vec{x}\,\big(\Box_T \varphi(s(\dot{\vec{x}})) \leftrightarrow \Box_T \varphi(\dot{s})\big).$$

Доказательство. Очевидно,

$$\mathsf{EA} \vdash s(\vec{x}) = y \to (\varphi(s(\vec{x})) \leftrightarrow \varphi(y)).$$

Отсюда, в силу доказуемой Σ_1-полноты и условий Лёба,

$$\begin{aligned} \mathsf{EA} \vdash s(\vec{x}) = y \;&\to\; \Box_T(s(\dot{\vec{x}}) = \dot{y}) \\ &\to\; \Box_T\big(\varphi(s(\dot{\vec{x}})) \leftrightarrow \varphi(\dot{y})\big) \\ &\to\; \big(\Box_T\varphi(s(\dot{\vec{x}})) \leftrightarrow \Box_T\varphi(\dot{y})\big) \end{aligned} \tag{14}$$

С другой стороны, по определению $\ulcorner\varphi(\dot{s})\urcorner$,

$$\mathsf{EA} \vdash s(\vec{x}) = y \to \big(\Box_T\varphi(\dot{s}) \leftrightarrow \Box_T\varphi(\dot{y})\big),$$

что вместе с (14) дает требуемое. $\boxtimes$

Мы покажем, что стандартная процедура устранения сечения может рассматриваться как редукция $\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T)$ к Π_{n+1}-$\mathsf{RR}^n(T)$. Рассмотрим вывод без сечений секвенции вида

$$\neg U, \neg\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T), \Pi, \tag{15}$$

где Π есть множество Π_{n+1}-формул, $\neg U$ есть конечное множество отрицаний аксиом теории U, а $\neg\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T)$ — конечное множество отрицаний примеров схемы $\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T)$ вида

$$\exists y \exists x\, [\mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner\neg\varphi(\dot{x})\urcorner) \wedge \varphi(x)]$$

для некоторых формул $\varphi(x) \in \Pi_{n+1}$. Обозначим формулу в квадратных скобках через $R_\varphi(x,y)$. Мы также можем считать, что аксиомы U имеют вид $\forall x_1 \ldots \forall x_m \neg A(x_1, \ldots, x_m)$ для некоторых Π_{n+1}-формул $A(\vec{x})$.

По свойству подформульности, любая формула, входящая в вывод секвенции Γ вида (15), либо (a) является Π_{n+1}-формулой, либо (b) имеет вид $\neg\mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T)$, $\exists x R_\varphi(t,x)$ или $R_\varphi(t,s)$, для некоторых термов s,t, либо (c) имеет вид

$$\exists x_{i+1} \ldots \exists x_n A(t_1, \ldots, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

для некоторого $i < m$ и термов $t_1, \ldots, t_i$. Обозначим через Γ^- результат вычеркивания всех формул типов (b) и (c) из секвенции Γ.

Лемма 4.32. *Если секвенция Γ вида (15) доказуема без сечения, то $\bigvee\Gamma^-$ доказуема в теории $U + \Pi_{n+1}$-$\mathsf{RR}^n(T)$.*

Доказательство проходит с помощью индукции по высоте вывода d секвенции Γ. Достаточно рассмотреть случай, когда формула вида (b) или (c) вводится последним применением правила в d, и к тому же достаточно рассмотреть лишь формулы вида $R_\varphi(t,s)$ и $\exists x_m A(t_1, \ldots, t_{m-1}, x_n)$, поскольку в остальных случаях после применения операции $(\cdot)^-$ посылка и заключение правила совпадают.

Таким образом, допустим, что вывод d имеет вид

$$\frac{\mathsf{Prf}_T(t, \ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner), \Delta \quad \varphi(s), \Delta}{R_\varphi(t,s), \Delta}\ (\wedge)$$

где $\varphi \in \Pi_{n+1}$. Тогда по предположению индукции мы получаем выводы в $U + \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}^n(T)$ формул

$$\mathsf{Prf}_T(t, \ulcorner\neg\varphi(\dot{s})\urcorner) \vee \bigvee\Delta^- \tag{16}$$

и

$$\varphi(s) \vee \bigvee\Delta^-. \tag{17}$$

Поскольку Δ^- состоит из Π_{n+1}-формул, правило $\Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}^n(T)$ применимо к (17), и мы получаем вывод

$$\langle n\rangle_T(\varphi(s(\dot{\vec{x}})) \vee \bigvee\Delta^-(\dot{\vec{x}})).$$

Отсюда пользуясь условиями Лёба мы последовательно выводим:

1. $\langle n\rangle_T \bigvee\Delta^-(\dot{\vec{x}}) \vee \langle n\rangle_T\varphi(s(\dot{\vec{x}}))$
2. $\langle n\rangle_T(\bigvee\Delta^-(\dot{\vec{x}})) \to \bigvee\Delta^-(\vec{x})$ (по доказуемой Σ_{n+1}-полноте)
3. $\bigvee\Delta^-(\vec{x}) \vee \langle n\rangle_T\varphi(s(\dot{\vec{x}}))$ (из 1, 2 и условий Лёба)
4. $\bigvee\Delta^-(\vec{x}) \vee \langle n\rangle_T\varphi(\dot{s})$ (по лемме 4.31).

С другой стороны, из (16) заменяя терм t на квантор существования и ослабляя $\Box_T$ до $[n]_T$ получаем

$$\bigvee\Delta^-(\vec{x}) \vee [n]_T\neg\varphi(\dot{s}).$$

Вместе с 4. по правилу сечения это даёт вывод формулы $\bigvee\Delta^-$ в теории $U + \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}^n(T)$.

Если последнее применение правила в выводе d имеет вид

$$\frac{A(t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m), \Delta}{\exists x_n A(t_1, \ldots, t_{m-1}, x_m), \Delta}\ (\exists)$$

то по предположению индукции имеем вывод

$$A(t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m) \vee \bigvee\Delta^-$$

в $U + \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}^n(T)$. Отсюда выводим

$$\exists x_1 \ldots \exists x_m A(x_1, \ldots, x_m) \vee \bigvee\Delta^-,$$

и $\bigvee\Delta^-$ следует по правилу сечения с аксиомой $\forall x_1 \ldots \forall x_n \neg A(x_1, \ldots, x_m)$ теории U. ⊠

Следствие 4.33. *Если T — Π_{n+2}-аксиоматизированное расширение EA, то теория $T + \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T)$ есть Π_{n+1}-консервативное расширение T^n_ω.*

Отметим, что это утверждение для $T = \mathsf{PRA}$ другим методом получено в работе [79], а для $n = 1$ и $T = \mathsf{EA}$ в [23]. Если $T = \mathsf{EA}$, то отсюда вытекает следующий результат Парсонса [68].

Предложение 4.34. *Для $n \geq 1$ теория $I\Sigma_n$ Π_{n+1}-консервативна над $I\Sigma_n^R$. В частности, $I\Sigma_1$ Π_2-консервативна над $I\Sigma_1^R \equiv \mathsf{PRA}$, и $\mathcal{F}(I\Sigma_1)$ есть класс примитивно рекурсивных функций.*

Мы также имеем более сильный результат о консервативности для беспараметрических схем.

Лемма 4.35. *Если U — Π_{n+2}-аксиоматизированное расширение EA, то теория $U + \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T)$ есть Σ_{n+2}-консервативное расширение $U + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+1}}(T)$.*

В частности, для $n = 0$ и $U = \mathsf{EA}$ получаем, что схема $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$ Σ_2-консервативна над $\mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$.

Доказательство. Допустим $U + \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T) \vdash \sigma$ для некоторого предложения $\sigma \in \Sigma_{n+2}$, тогда $U + \neg\sigma + \mathsf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T) \vdash \bot$, и по теореме 11 $U + \neg\sigma + \Pi_{n+1}\text{-}\mathsf{RR}^n(T) \vdash \bot$. Отсюда мы получаем $U + \neg\sigma + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+1}}(T) \vdash \bot$, и по теореме о дедукции $U + \mathsf{Rfn}^n_{\Sigma_{n+1}}(T) \vdash \sigma$. ⊠

С учётом теоремы 10 отсюда непосредственно вытекает следующее следствие, доказанное Кэйем, Парисом и Димитракополусом [49] методами теории моделей.

Предложение 4.36. *Для $n \geq 1$ теория $I\Sigma_n$ является Σ_{n+2}-консервативным расширением $I\Sigma_n^-$.*

В заключение отметим ряд фактов, относящихся к диаграмме фрагментов PA на рис. 3.1.

Так, $I\Pi_{n+1}^- \not\subseteq I\Sigma_{n+1}^R$ вытекает из следствия 4.26. $I\Sigma_n \not\subseteq I\Pi_{n+1}^-$ следует из того, что $I\Pi_{n+1}^-$ имеет Σ_{n+2}-аксиоматизацию, а $I\Sigma_n$ содержит $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+2}}(\mathsf{EA})$ по теореме 7. $I\Sigma_{n+1}^R \not\subseteq I\Sigma_n + I\Pi_{n+1}^-$ следует из того, что $I\Sigma_n + I\Pi_{n+1}^-$ есть расширение $I\Sigma_n$ множеством Σ_{n+2}-предложений, в то время как $I\Sigma_{n+1}^R$ содержит $\mathsf{RFN}_{\Pi_{n+2}}(I\Sigma_n)$. Таким образом, все включения, соответствующие ребрам диаграммы, являются строгими.

5 Алгебры доказуемости и ординальный анализ PA

В предыдущей главе мы показали, что различные фрагменты PA выражаются тем или иным образом через схемы рефлексии над элементарной арифметикой. Общие свойства схем рефлексии затем позволяют сравнительно легко установить самые разные характеристики изучаемых теорий. Таким образом, структура схем рефлексии над данной теорией T выступает как своего рода “карта” и инструмент исследования расширений T.

Структура схем рефлексии над T и объемлющая её структура произвольных расширений T могут быть осмыслены с достаточно общей алгебраической точки зрения. Эта точка зрения оказывается плодотворной для дальнейших приложений схем рефлексии к ординальному анализу и общим вопросам классификации теорий. Мы начнём с известного понятия алгебры Линденбаума теории.

5.1 Алгебры Линденбаума

Для данной теории T рассмотрим множество $\mathcal{L}_T$ всех арифметических предложений, факторизованное отношением доказуемой эквивалентности в T:

$$\varphi \sim \psi \iff T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Класс эквивалентности формулы φ обозначаем $\{\varphi\}$. Логические операции $\wedge$, $\vee$, $\neg$ вместе с отношением порядка

$$\{\varphi\} \leq \{\psi\} \iff T \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

наделяют это множество структурой булевой алгебры, называемой алгеброй Линденбаума теории T. Наибольший $\top$ и наименьший $\bot$ элементы этой алгебры составляют, соответственно, классы всех доказуемых и всех опровержимых в T предложений. Остальные элементы алгебры Линденбаума представляют собой классы эквивалентности T-независимых утверждений. Дедуктивно замкнутые расширения T соответствуют *фильтрам* булевой алгебры $\mathcal{L}_T$.

Напомним, что булева алгебра $\mathcal{B}$ называется *безатомной*, если

$$\forall x, y \in \mathcal{B}\ (x < y \Rightarrow \exists z\ x < z < y).$$

Теорема Россера влечёт следующее утверждение.

Предложение 5.1. *Пусть T — перечислимая непротиворечивая теория. Тогда булева алгебра $\mathcal{L}_T$ счётна и безатомна.*

Доказательство. Рассмотрим φ и ψ такие, что $\{\varphi\} < \{\psi\}$, то есть $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ и $T \nvdash \psi \rightarrow \varphi$. Тогда теория $U = T + \psi + \neg\varphi$ непротиворечива. По теореме 3 найдётся предложение θ независимое от U. В качестве z возьмем класс $\{\varphi \vee (\theta \wedge \psi)\}$. ⊠

Из элементарной теории булевых алгебр (см. [13]) известно, что все счётные безатомные булевы алгебры изоморфны.

Следствие 5.2. *Если теории T и U перечислимы и непротиворечивы, то $\mathcal{L}_T \simeq \mathcal{L}_U$.*

В частности, изоморфными являются алгебры $\mathcal{L}_{\mathsf{EA}}$, $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$, $\mathcal{L}_{\mathsf{ZF}}$ и т.д. Справедливо даже более сильное утверждение.

Алгебру $\mathcal{L}_T$ можно рассматривать как (позитивно) нумерованную структуру, где гёделевы номера формул выступают как коды элементов алгебры (см. [2]). С.Крипке и М.Б.Пур-Эль [71] доказали, что все алгебры Линденбаума для непротиворечивых перечислимых арифметических теорий, рассматриваемые как нумерованные алгебры, являются рекурсивно изоморфными. Фактически, это утверждение следует из эффективности теоремы Россера.

5.2 Алгебры и логики доказуемости

Приведённый выше результат об изоморфизме говорит о том, что алгебра Линденбаума не несет интересной с точки зрения теории доказательств информации о "силе" формальной системы. Возникает вопрос, нельзя ли обогатить эту структуру таким образом, чтобы интересующие нас свойства теорий стали бы выразимыми.

А. Тарский (см. [47]) ввёл понятие цилиндрической алгебры, которое фактически позволяет выразить кванторы на алгебраическом языке. Однако, поскольку язык цилиндрических алгебр имеет очень большую выразительную силу, соответствующие структуры слишком сложны и, по видимому, не дают особых преимуществ для теории доказательств по сравнению с традиционным языком логики первого порядка.

Другое обогащение структуры алгебры Линденбаума было предложено Р. Магари [59]. Для данной элементарно аксиоматизированной теории T гёделевская формула доказуемости индуцирует оператор

$$\Box_T : \{\varphi\} \longmapsto \{\Box_T\varphi\},$$

действующий на алгебре $\mathcal{L}_T$. В силу условий Лёба этот оператор корректно определён на классах эквивалентности. Структура $\mathcal{M}_T = (\mathcal{L}_T, \Box_T)$ называется *алгеброй доказуемости* или *алгеброй Магари для теории* T[4].

Язык алгебр Магари позволяет выразить многие интересные факты о доказуемости, например, вторую теорему Гёделя о неполноте:

$$\mathcal{M}_T \vDash \forall x\, (x \neq \bot \Rightarrow x \not\leq \neg\Box_T\neg x).$$

Заметим, что термы языка алгебр Магари отождествляются с пропозициональными модальными формулами. В соответствии с этим теорема Соловея описывает все термы $\varphi(\vec{x})$ такие, что в $\mathcal{M}_T$ выполнено тождество $\varphi(\vec{x}) = \top$:

$$\mathbf{GL} \vdash \varphi(\vec{x}) \iff \mathcal{M}_T \vDash \forall\vec{x}\, \varphi(\vec{x}) = \top.$$

Произвольное тождество $\psi(\vec{x}) = \theta(\vec{x})$ алгебры доказуемости сводится к тождеству вида $\varphi(\vec{x}) = \top$, где $\varphi = (\psi \leftrightarrow \theta)$. Таким образом, с алгебраической точки зрения теорема Соловея представляет собой характеризацию тождеств алгебр доказуемости для Σ_1-корректных теорий T.

Булеву алгебру с одноместным оператором $\Box$, удовлетворяющую тождествам

M1. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) = \top$,

[4]Сам Р. Магари называл такие алгебры *диагонализируемыми*.

M2. $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi = \top$,

M3. $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi = \top$,

M4. $\Box\top = \top$,

и тем самым всем теоремам логики **GL**, называем *алгеброй Магари*. По теореме Соловея совокупность алгебр Магари есть многообразие, порождённое алгеброй $\mathcal{M}_T$ для какой-нибудь Σ_1-корректной теории T, например PA.

Общие свойства алгебр Магари активно изучались в контексте логики доказуемости (см. [59, 60, 62, 63, 64, 87, 17]). С точки зрения исследования структуры алгебр Магари арифметических теорий наибольший интерес представляют результаты В. Шаврукова (см. [83, 82, 85, 84], а также [96]). В частности, В. Шавруков дал описание возможных подалгебр алгебры $\mathcal{M}_T$. Им был также установлен важный результат о неразрешимости элементарной теории алгебры $\mathcal{M}_T$. Отметим, что разрешимость универсальной теории этой алгебры вытекает из разрешимости истинностной логики доказуемости **S** (см. [17]), в то время как разрешимость $\forall^*\exists^*$-теории представляет собой трудный открытый вопрос. В. Шавруков также установил ряд интересных результатов об изоморфизме алгебр докауемости. В частности, он доказал, что алгебры $\mathcal{M}_T$ и $\mathcal{M}_U$ не являются изоморфными, если $U \vdash \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(T)$.[5] Вопрос об изоморфизме алгебр таких теорий как PA и $\mathsf{PA} + \mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ пока открыт.

5.3 Градуированные алгебры доказуемости и логика Джапаридзе

Формула доказуемости имеет логическую сложность Σ_1. В то же время интересующие нас теории (такие как $I\Sigma_1$ или PA) часто имеют более высокий, или даже неограниченный, уровень арифметической сложности аксиом. Это наводит на мысль, что язык алгебр Магари ещё недостаточно выразителен для представления и исследования свойств таких теорий.

Нужное обогащение дают формулы n-доказуемости $[n]_T$ и соответствующие операторы на алгебре $\mathcal{M}_T$. Это приводит к понятию *градуированной алгебры доказуемости*, введённом в [30]. В предыдущей главе мы видели, что уже простое использование формулы $[n]_T$ как модальности логики **GL** позволяет получить ряд нетривиальных результатов о схемах беспараметрической индукции. Совместное использование нескольких операторов доказуемости позволяет продвинуться далее в исследовании арифметических теорий и получить такие результаты как знаменитую теорему Генцена о доказательстве непротиворечивости PA с помощью трансфинитной индукции до ординала ε_0, характеризацию доказуемо тотальных вычислимых функций в PA, и приводит к простым утверждениям комбинаторного характера, независимым от арифметики Пеано.

[5]В. Шавруков использовал несколько более жесткое условие, которое эквивалентно данному в силу некоторых результатов [24].

Каждая формула $[n]_T$ задаёт на алгебре Линденбаума теории T оператор

$$[n]_T : \{\varphi\} \longmapsto \{[n]_T\varphi\}.$$

Мы называем алгебру $\mathcal{M}_T^\infty = (\mathcal{L}_T, [0]_T, [1]_T, \dots)$ *градуированной алгеброй доказуемости* для теории T. Мы будем также иногда рассматривать $\mathcal{M}_T^\infty$ как многосортную алгебру, т.е. структуру с выделенным семейством подмножеств

$$\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \Pi_3 \subset \dots \subset \mathcal{M}_T^\infty,$$

определяемых предложениями соответствующего уровня арифметической иерархии.

В качестве наиболее важного примера рассмотрим алгебру $\mathcal{M}_{\mathsf{EA}}^\infty$. Знакомые нам фрагменты PA соответствуют фильтрам этой алгебры, порождаемым некоторыми специфическими элементами. Так, в силу результатов предыдущей главы, ограниченная схема индукции $I\Sigma_n$ соответствует элементу $\langle n+1\rangle_{\mathsf{EA}}\top$ (и порождаемому им фильтру).

Правилам Σ_n- и Π_{n+1}-индукции отвечает оператор $p \mapsto \langle n\rangle_{\mathsf{EA}}p$ для $p \in \Pi_{n+1}$ и $p \in \Pi_{n+2}$, соответственно. Таким образом, $I\Pi_{n+1}^R$ есть фильтр, порождённый из $\top$ этим оператором, то есть замыкание $\{\langle n\rangle_{\mathsf{EA}}^k\top : k < \omega\}$.

Схемы беспараметрической индукции суть множества элементов $\mathcal{M}_{\mathsf{EA}}^\infty$ вида $p \to \langle n\rangle_{\mathsf{EA}}p$, где $p \in \Pi_{n+1}$ и $p \in \Pi_{n+2}$, соответственно.

Термы алгебры $\mathcal{M}_T^\infty$ отождествляются с пропозициональными *полимодальными формулами* с модальностями $[0], [1], \dots$ Тождества этой алгебры задаются следующей логикой **GLP**, введённой Г.К. Джапаридзе [11, 10].

Аксиомы: J1. Аксиомы **GL** для каждой модальности $[n]$;

J2. $[m]\varphi \to [n]\varphi$, для $m \leq n$;

J3. $\langle m\rangle\varphi \to [n]\langle m\rangle\varphi$, для $m < n$.

Правила вывода: modus ponens, $\varphi \vdash [n]\varphi$.

Арифметическая интерпретация $(\varphi)_T^*$ полимодальной формулы φ определена как обычно, при этом для всех n $[n]$ понимается как n-доказуемость:

$$([n]\varphi)_T^* = [n]_T(\varphi)_T^*.$$

Лемма 5.3. *Если* **GLP** $\vdash \varphi$, *то* $\mathsf{EA} \vdash (\varphi)_T^*$ *для любой реализации* $(\cdot)^*$ *переменных* φ.

Доказательство. Корректность аксиом логики **GL** следует из справедливости условий и теоремы Лёба для формул n-доказуемости. Справедливость аксиомы (J3) вытекает из доказуемой Σ_{n+1}-полноты. Аксиома (J2) следует из верифицируемости в EA того тривиального факта, что всякая (истинная) Π_n формула является (истинной) Π_{n+1}-формулой. ⊠

По аналогии с алгебрами Магари мы называем *алгебрами Джапаридзе* булевы алгебры с операторами $[0], [1], \dots$, удовлетворяющие всем тождествам **GLP**. Г.К. Джапаридзе [11, 10] получил следующее глубокое обобщение теоремы Соловея об арифметической полноте.

Теорема 12. *Если теория T корректна, то для любой полимодальной формулы φ,*

$$\mathbf{GLP} \vdash \varphi(\vec{x}) \iff \mathcal{M}_T^\infty \vDash \forall \vec{x}\, (\varphi(\vec{x}) = \top).$$

Таким образом, многообразие алгебр Джапаридзе порождается алгеброй $\mathcal{M}_T^\infty$ для любой корректной теории T. Отметим, что в этой теореме условие корректности T является необходимым.

Первоначально Г.К. Джапаридзе получил свой результат для несколько иной интерпретации модальностей $[n]$. История вопроса такова.

Дж. Булос [34] исследовал модальную логику *ω-доказуемости* (понятие двойственное ω-непротиворечивости по Гёделю) и установил, что теоремы Соловея переносятся на этот случай без больших изменений. ω-доказуемость может быть описана как выводимость с помощью одного применения ω-правила, то есть как доказуемость в теории

$$T' := T + \{\forall x \varphi(x) : \forall n \in \mathbb{N}\; T \vdash \varphi(\bar{n})\}.$$

Таким образом, логика ω-доказуемости совпадает с **GL**.

Г.К. Джапаридзе [10] получил более интересную характеризацию совместной логики доказуемости и ω-доказуемости для PA. Фактически, он сформулировал полимодальную логику **GLP** для интерпретации [1], [2], … как формул доказуемости в теориях PA', PA'' и т. д. В дальнейшем К. Игнатьев [48] упростил работу Г.К. Джапаридзе и подробно исследовал модально-логические свойства **GLP**. Он также заметил, что теорема Джапаридзе имеет место и при более общих условиях на последовательность формул, интерпретирующих модальности $[n]$. В частности, арифметическая полнота **GLP** установлена и для интерпретации модальностей как формул n-доказуемости. Градуированные алгебры доказуемости введены в [30], где была обнаружена их связь с ординальным анализом арифметики Пеано.

Логика Джапаридзе разрешима и может быть исследована с помощью семантики Крипке. Строго говоря, **GLP** не является полной по Крипке, однако она имеет простой перевод в более слабую логику $\mathbf{GLP}^-$, получаемую из **GLP** путём замены аксиомы (J2) на

$$[m]\varphi \to [n][m]\varphi, \quad \text{для } m \leq n.$$

Логика $\mathbf{GLP}^-$ полна относительно хорошего класса конечных моделей Крипке. Игнатьев также получил теорему о нормальной форме для замкнутых формул логики **GLP**, которые играют большую роль в дальнейшем. Подробное изложение логики Джапаридзе дано в [35, 48]. В данной работе нам понадобится лишь арифметическая корректность **GLP**, выражаемая леммой 5.3.

5.4 Свойство редукции

Доказанная нами в §4.5 теорема 11 выражает важное свойство градуированных алгебр доказуемости. Пусть U и V — подмножества $\mathcal{M}_T^\infty$. Пишем

$U \equiv_n V$, если порождаемые ими фильтры (т.е. теории, содержащие T) взаимно Π_{n+1}-консервативны.

Предложение 5.4. *Пусть* T — Π_{n+2}*-расширение* EA*. Тогда для любого* $\varphi \in \mathcal{M}_T^\infty$
$$\{\langle n+1\rangle_T \varphi\} \equiv_n \{Q_k^n(\varphi) : k < \omega\},$$
где
$$\begin{array}{rcl} Q_0^n(\varphi) & = & \langle n\rangle_T \varphi, \\ Q_{k+1}^n(\varphi) & = & \langle n\rangle_T (Q_k^n(\varphi) \wedge \varphi). \end{array}$$

Доказательство. Утверждение получается, если в теореме 11 взять теорию T в качестве U и $T+\varphi$ в качестве T. Заметим, что правило Π_{n+1}-$\mathsf{RR}^n(T+\varphi)$ эквивалентно правилу
$$\frac{\psi}{\langle n\rangle_T(\varphi \wedge \psi)}, \quad \psi \in \Pi_{n+1}.$$
Теория $T + \{Q_k^n(\varphi) : k < \omega\}$ представляет собой замыкание $\top$ относительно этого правила. В самом деле, если $T + Q_k^n(\varphi) \vdash \psi$, то
$$\begin{array}{rcl} T + Q_{k+1}^n(\varphi) & \vdash & \langle n\rangle_T(\varphi \wedge Q_k^n(\varphi)) \\ & \vdash & \langle n\rangle_T(\varphi \wedge \psi). \end{array}$$
⊠

Таким образом, все Π_{n+1}-следствия элемента $\langle n+1\rangle_T\varphi \in \mathcal{M}_T^\infty$, имеющего сложность Π_{n+2}, порождаются Π_{n+1}-элементами $Q_k^n(\varphi)$. Мы называем это свойство алгебры $\mathcal{M}_T^\infty$ *свойством редукции.* В дальнейшем играет существенную роль то обстоятельство, что элементы $Q_k^n(\varphi)$ выражаются через операции алгебры $\mathcal{M}_T^\infty$.

В качестве примера возьмём $\varphi = \top$ в формулировке предложения 5.4. Тогда мы получим
$$\{\langle n+1\rangle_T \top\} \equiv_n \{\langle n\rangle_T^{k+1}\top : k < \omega\}.$$
Нетрудно видеть, что это утверждение выражает следствие 4.33 на языке градуированных алгебр доказуемости.

Следствие 5.5. *Если* $m \le n$*, то*
$$\mathsf{EA}^+ \vdash \langle m\rangle\langle n+1\rangle\varphi \leftrightarrow \forall k \langle m\rangle Q_k^n(\varphi).$$

Доказательство. В $\mathcal{M}_{\mathsf{EA}}^\infty$, по свойству редукции,
$$\{\langle n+1\rangle\varphi\} \equiv_n \{Q_k^n(\varphi) : k < \omega\},$$
и эта эквивалентность установлена средствами EA^+. Поэтому из $\langle n+1\rangle\varphi$ выводимо некоторое Π_{m+1}-предложение, если и только если оно следует из $Q_k^n(\varphi)$, для некоторого k. Тем самым утверждения о Π_{m+1}-корректности левой и правой части равносильны. ⊠

5.5 Замкнутые формулы GLP и система ординальных обозначений для ординала ε_0

Совокупность замкнутых формул логики **GLP** (по модулю доказуемой эквивалентности) можно также описать как свободную 0-порожденную алгебру Джапаридзе $\mathcal{M}_0^\infty$, то есть свободную алгебру, порождённую из констант $\top$ и $\bot$ операциями $\wedge$, $\neg$ и $\langle n\rangle$ для всех n и удовлетворяющую тождествам **GLP**. Заметим, что по теореме Джапаридзе $\mathcal{M}_0^\infty$ естественным образом вкладывается в $\mathcal{M}_T^\infty$, если теория T корректна, и является её наименьшей подалгеброй[6]:

$$\mathcal{M}_0^\infty \vDash \varphi = \psi \iff \mathcal{M}_T^\infty \vDash (\varphi)_T^* = (\psi)_T^*.$$

Строение алгебры $\mathcal{M}_0^\infty$ было подробно изучено К. Игнатьевым [48], который получил теорему о нормальной форме для замкнутого фрагмента **GLP** и элементарную разрешающую процедуру для этого фрагмента. Мы приводим упрощённый и несколько ослабленный вариант этой теоремы.

Замкнутые формулы **GLP** играют центральную роль в ординальном анализе арифметики Пеано, поскольку их можно рассматривать как конечные представления ординалов до ε_0.

Напомним, что ординал ε_0 определяется как $\sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$, где ω — порядковый тип натуральных чисел. По теореме о канторовской нормальной форме всякий ординал $\alpha < \varepsilon_0$, $\alpha \neq 0$ однозначно представим в виде $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_n}$, где $\alpha > \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$. Раскладывая аналогично показатели $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и возникающие при этом меньшие показатели получаем, что всякий ординал $\alpha < \varepsilon_0$ представляется в виде замкнутого терма, построенного из константы 0 и функций $+$ и ω^x. Мы называем такой терм *представлением* α. Говорим, что представление $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_n}$ *в нормальной форме*, если $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ и все подтермы α_i также в нормальной форме. Представление ординала $\alpha < \varepsilon_0$ в нормальной форме единственно.

Хорошо известно, что отношение *быть представлением в нормальной форме* и отношение порядка $\alpha < \beta$, как отношения на гёделевых номерах термов, являются элементарными и выразимыми в EA. Структуру

$$(\varepsilon_0; 0, <, +, \omega^x)$$

вместе с описанной выше нумерацией называют *стандартной системой ординальных обозначений до* ε_0.

Пусть S означает множество полимодальных формул, порождённых из $\top$ операциями $\langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, ... Элементы S имеют вид

$$\alpha = \langle n_1\rangle\langle n_2\rangle \dots \langle n_k\rangle\top.$$

Мы отождествляем такие формулы со словами в алфавите $\mathbb{N}$:

$$\alpha = n_1 n_2 \dots n_k.$$

[6] Если теория T не является корректной, то это уже не верно. В этом случае для некоторого n формула $[n]_T\bot$ будет истинна, а значит $[n]_T[n]_T\bot$ доказуема в EA, то есть $\mathcal{M}_T^\infty \vDash [n]_T[n]_T\bot = \top$.

Пустое слово Λ отождествляем с $\top$. S_n означает ограничение S на алфавит $\{n, n+1, \ldots\}$.

Для каждого n определим порядок $<_n$ на S_n как

$$\beta <_n \alpha \iff \mathbf{GLP} \vdash \alpha \to \langle n \rangle \beta.$$

Нетрудно видеть, что $<_n$ представляет собой транзитивное отношение. Это отношение также иррефлексивно, поскольку выводимость $\mathbf{GLP} \vdash \alpha \to \langle n \rangle \alpha$ влечёт $\mathbf{GLP} \vdash \neg\alpha$ по аксиоме Лёба. Но тогда арифметическая интерпретация $(\alpha)^*_{\mathsf{EA}}$ опровержима в EA и потому ложна, что противоречит корректности EA.

Это рассуждение опирается на сильное предположение о корректности EA, что допустимо в PA, но не в самой EA. Формализуемое в EA доказательство иррефлексивности $<_n$ можно дать, опираясь на развитую Игнатьевым технику моделей Крипке для $\mathbf{GLP}$, однако здесь нам оно не потребуется. Это же относится и к следующему предложению, установленному в [30].

Предложение 5.6. *Порядок $(S_n, <_n)$ фундирован и имеет высоту ε_0. По модулю доказуемой эквивалентности в* $\mathbf{GLP}$ *порядок линеен.*

Поскольку замкнутый фрагмент логики $\mathbf{GLP}$ имеет элементарную разрешающую процедуру, отношение порядка $(S, <_0)$ также элементарно. Таким образом, можно рассматривать элементы S как альтернативные представления ординалов до ε_0. Укажем простое соответствие между S и ординалами до ε_0.

Определение 3. Положим $o(0^k) = k$. Если $\alpha = \alpha_1 0 \alpha_2 0 \cdots 0 \alpha_n$, где все $\alpha_i \in S_1$ и не все из них пусты, то положим

$$o(\alpha) = \omega^{o(\alpha_n^-)} + \cdots + \omega^{o(\alpha_1^-)}.$$

Здесь β^- получается из $\beta \in S_1$ заменой каждой буквы $m+1$ на m.

Аналогично, γ^+ будет означать результат замены в слове γ каждой буквы m на $m+1$. Заметим, что $o(\gamma^+) = \omega^{o(\gamma)}$ и отображение $o : S \to \varepsilon_0$, очевидно, сюръективно. Заметим также, что ординал $o(\alpha)$ предельный, если и только если α начинается с $m > 0$.

Предложение 5.6 может быть более явно сформулировано (для случая $n = 0$) следующим образом: для любых $\alpha, \beta \in S$,

$$\begin{aligned} \mathbf{GLP} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \quad &\iff \quad o(\alpha) = o(\beta); \\ \mathbf{GLP} \vdash \beta \to \Diamond\alpha \quad &\iff \quad o(\alpha) < o(\beta). \end{aligned}$$

В качестве примера возьмём слово 2101. Тогда

$$o(2101) = \omega^{o(0)} + \omega^{o(10)} = \omega + \omega^{\omega^0 + \omega^1} = \omega^\omega = o(2).$$

Соответственно, в $\mathbf{GLP}$ выводимы эквивалентности

$$\mathbf{GLP} \vdash 2101 \leftrightarrow (21 \wedge 01) \leftrightarrow 21 \leftrightarrow 2.$$

Первая из этих эквивалентностей следует из доказываемой ниже леммы 5.8(iv).

Отметим без доказательства следующий вариант теоремы Игнатьева о нормальной форме (см. [48, 30]).

Предложение 5.7. *Всякая замкнутая формула эквивалентна в* **GLP** *булевой комбинации формул из* S.

5.6 Доказательство непротиворечивости PA в стиле Генцена

Здесь мы получим доказательство непротиворечивости PA, опирающееся, помимо узко финитных средств арифметики EA^+, лишь на трансфинитную индукцию по ординалу ε_0. Первое доказательство такого рода было получено Г. Генценом в знаменитых работах [43, 44].

Центральную роль в нашем доказательстве играет свойство редукции градуированных алгебр докауемости (предложение 5.4). Сначала мы установим, что по модулю выводимости в **GLP** множество S замкнуто относительно операции $\langle n+1\rangle\alpha \longmapsto Q^n_k(\alpha)$.

Лемма 5.8. *Следующие выводимости имеют место в* **GLP***:*

(i) *Если* $m \le n$, *то* $\vdash nm\alpha \to m\alpha$;

(ii) *Если* $m < n$, *то* $\vdash \langle n\rangle\varphi \wedge \langle m\rangle\psi \leftrightarrow \langle n\rangle(\varphi \wedge \langle m\rangle\psi)$;

(iii) *Если* $\alpha \in S_{n+1}$, *то* $\vdash \alpha\gamma \wedge n\beta \leftrightarrow \alpha(\gamma \wedge n\beta)$;

(iv) *Если* $\alpha \in S_{n+1}$, *то* $\vdash \alpha \wedge n\beta \leftrightarrow \alpha n\beta$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из (J2) и аксиомы $[m]\varphi \to [m][m]\varphi$ логики $\mathbf{GL}^m$. Утверждение (ii):

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{GLP} \vdash \langle n\rangle\varphi \wedge \langle m\rangle\psi & \to & [n]\langle m\rangle\psi & \text{по аксиоме (J3)} \\ & \to & \langle n\rangle(\varphi \wedge \langle m\rangle\psi). & \end{array}$$

Обратная импликация следует из (i). Утверждение (iii) получается итерацией (ii), а (iv) вытекает из (iii) для $\gamma = \Lambda$. ⊠

Лемма 5.9. (i) *Если* $\alpha = \langle n+1\rangle\beta$ *и* $\beta \in S_{n+1}$, *то для любого* k, $\mathbf{GLP} \vdash Q^n_k(\beta) \leftrightarrow (n\beta)^{k+1}$.

(ii) *Если* $\alpha = \langle n+1\rangle\beta$, *где* $\beta = \gamma m\delta$, $\gamma \in S_{n+1}$ *и* $m \le n$, *то для любого* k, $\mathbf{GLP} \vdash Q^n_k(\beta) \leftrightarrow (n\gamma)^{k+1}m\delta$.

Доказательство. (i) Рассуждаем индукцией по k. Для $k = 0$ имеем $Q^n_0(\beta) = \langle n\rangle\beta \in S$. Шаг индукции:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{GLP} \vdash Q^n_{k+1}(\beta) & \leftrightarrow & \langle n\rangle(\beta \wedge (n\beta)^{k+1}) & \\ & \leftrightarrow & \langle n\rangle(\beta(n\beta)^{k+1}) & \text{по лемме 5.8(iv)} \\ & \leftrightarrow & (n\beta)^{k+2}. & \end{array}$$

(ii) Аналогично, шаг индукции вытекает из

$$\begin{aligned}\mathbf{GLP} \vdash Q^n_{k+1}(\beta) &\leftrightarrow \langle n\rangle(\gamma m\delta \wedge (n\gamma)^{k+1} m\delta)\\ &\leftrightarrow \langle n\rangle(\gamma(m\delta \wedge (n\gamma)^{k+1} m\delta)) \quad \text{по лемме 5.8(iii)}\\ &\leftrightarrow (n\gamma)^{k+2} m\delta \quad \text{по лемме 5.8(i).} \quad \boxtimes\end{aligned}$$

Определение 4. Для непустого $\alpha \in S$ и $k \in \mathbb{N}$ определим $\alpha[\![k]\!]$ следующим образом:

- Если $\alpha = 0\beta$, то $\alpha[\![k]\!] = \beta$.
- Если $\alpha = \langle n+1\rangle\beta$, то $\alpha[\![k]\!]$ определено как выражение для $Q^n_k(\beta)$ из предыдущей леммы.

Следствие 5.10. *Для любого k и непустого $\alpha \in S$ $\alpha[\![k]\!] <_0 \alpha$.*

Доказательство. Индукцией по k, очевидно, получаем

$$\mathbf{GLP} \vdash \langle n+1\rangle\beta \to Q^n_{k+1}(\beta).$$

Отсюда по лемме 5.9 для $\alpha = \langle n+1\rangle\beta$

$$\begin{aligned}\mathbf{GLP} \vdash \alpha &\to \langle n\rangle\alpha[\![k]\!]\\ &\to \langle 0\rangle\alpha[\![k]\!]. \quad \boxtimes\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathsf{TI}^R(\Pi_1, <_0)$ следующее правило вывода, выражающее трансфинитную индукцию по фундированному порядку $(S, <_0)$ для Π_1-формул φ:

$$\frac{\forall\alpha \in S\ (\forall\beta <_0 \alpha\ \varphi(\beta) \to \varphi(\alpha))}{\forall\alpha \in S\ \varphi(\alpha)}.$$

Мы покажем, что непротиворечивость PA может быть доказана с помощью одного применения этого правила над EA^+.

Теорема 13. $[\mathsf{EA}^+, \mathsf{TI}^R(\Pi_1, <_0)] \vdash \mathsf{Con}(\mathsf{PA})$.

Доказательство. Мы будем работать в $\mathcal{M}^\infty_{\mathsf{EA}}$. Обозначим через α^* арифметическую интерпретацию $(\alpha)^*_{\mathsf{EA}}$ формулы $\alpha \in S$. Функция $(\cdot)^*$ как отображение между гёделевыми номерами формул является элементарной и поэтому определима как терм в EA. Мы также пишем $\Diamond$ вместо $\Diamond_{\mathsf{EA}}$.

Вспомним, что по следствию 4.3

$$\mathsf{PA} \subseteq \mathsf{EA} + \{\langle n\rangle\top : n < \omega\}.$$

Доказательство этого результата, то есть вывод аксиомы индукции из соответствующего частного случая равномерной схемы рефлексии, легко формализуемо в EA, поэтому мы имеем

$$\mathsf{EA} \vdash \forall n\, \Diamond(\langle n\rangle\top)^* \to \mathsf{Con}(\mathsf{PA}). \tag{18}$$

Мы докажем $\forall\alpha\in S\,\Diamond\alpha^*$ с помощью трансфинитной индукции над EA^+, при этом Π_1-формула $\varphi(\alpha)=\Diamond\alpha^*$ с переменной α играет роль индукционной формулы. Мы утверждаем, что

$$\mathsf{EA}^+\vdash\forall\alpha\in S\,(\forall\beta<_0\alpha\,\Diamond\beta^*\to\Diamond\alpha^*).$$

Рассуждая в EA^+ допустим, что $\forall\beta<_0\alpha\,\Diamond\beta^*$. Рассмотрим два случая.

- Если $\alpha=0\beta$, то $\Diamond\beta^*$, отсюда $\Diamond\Diamond\beta^*$ опираясь на $\mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA})$ в EA^+.
- Если $\alpha=\langle n+1\rangle\beta$, то $\forall k\,\Diamond\alpha[\![k]\!]^*$, поскольку $\alpha[\![k]\!]<_0\alpha$. Заметим, что по следствию 5.5
$$\mathsf{EA}^+\vdash\Diamond\alpha^*\leftrightarrow\forall k\,\Diamond\alpha[\![k]\!]^*.$$
Поэтому $\forall k\,\Diamond\alpha[\![k]\!]^*$ влечёт $\Diamond\alpha^*$.

Таким образом,

$$\begin{array}{rcl}[\mathsf{EA}^+,\mathsf{TI}^R(\Pi_1,<_0)] & \vdash & \forall\alpha\in S\,\Diamond\alpha^*\\ & \vdash & \mathsf{Con}(\mathsf{PA})\text{ в силу (18),}\end{array}$$

что и требовалось доказать. ⊠

Укажем теперь как вывести из теоремы 13 тот же результат для стандартных обозначений ординалов до ε_0, основанных на канторовской нормальной форме.

Определим отношение $<_0'$ на S полагая

$$\alpha<_0'\beta\iff o(\alpha)<o(\beta),$$

где функция o дана в определении 3. Как нам уже известно из 5.6, на самом деле $<_0'$ совпадает с $<_0$. Однако, доказательство этого факта средствами EA, которое можно дать с помощью моделей Крипке для замкнутого фрагмента **GLP**, достаточно сложно. Чтобы избежать этого, мы используем формализацию отношения $<_0'$ в EA, фундированность которого непосредственно следует из фундированности ординала ε_0.

Лемма 5.11. *$\mathsf{TI}^R(\Pi_1,<_0')$ сводится к $\mathsf{TI}^R(\Pi_1,\varepsilon_0)$.*

Доказательство. Заметим, что функция o, как отображение гёделевых номеров слов из S в стандартные представления ординалов до ε_0, элементарна. Поэтому индукция для формулы $\varphi(\alpha)$ по $(S,<_0')$ сводится к индукции для формулы
$$\psi(x):=\forall\alpha\in S\,(o(\alpha)=x\to\varphi(\alpha))$$
по ординалам $x<\varepsilon_0$. ⊠

Лемма 5.12. *Пусть $\alpha=\alpha_0^+0\dots0\alpha_k^+$ и $o(\alpha)$ — предельный ординал. Тогда*

$$o(\alpha[\![n]\!])=\begin{cases}\omega^{o(\alpha_k)}+\cdots+\omega^{o(\alpha_1)}+\omega^{o(\beta)}\cdot(n+1)+1, & \text{если } o(\alpha_0)=o(\beta)+1;\\ \omega^{o(\alpha_k)}+\cdots+\omega^{o(\alpha_1)}+\omega^{o(\alpha_0[\![n]\!])}, & \text{если } o(\alpha_0)\text{ предельный.}\end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $o(\alpha)$ предельный, α_0 непусто, то есть $\alpha_0^+ = \langle m+1\rangle\beta$ для некоторого $\beta \in S_1$. Слово $\alpha[\![n]\!]$ определено в соответствии с одним из следующих двух случаев:

(a) $m = 0$. Тогда $\alpha[\![n]\!] = (0\beta)^{n+1}0\alpha_1^+0\cdots0\alpha_k^+$, поскольку $\beta \in S_1$ и вслед за β идёт 0.

(b) $m > 0$. Тогда $\alpha[\![n]\!] = \alpha_0'0\alpha_1^+0\cdots0\alpha_k^+$, где $\alpha_0' = \alpha_0^+[\![n]\!] = (\alpha_0[\![n]\!])^+$.

Отсюда следует утверждение леммы. ⊠

Следствие 5.13. *Для любого $\alpha \neq \Lambda$ и любого k $\alpha[\![k]\!] <_0' \alpha$.*

Теперь мы можем повторить доказательство теоремы 13 и вывести

$$\mathsf{EA}^+ \vdash \forall\alpha\,(\forall\beta <_0' \alpha\, \Diamond\beta^* \to \Diamond\alpha^*).$$

Отсюда $\mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ следует по правилу $\mathsf{TI}^R(\Pi_1, <_0')$ и мы получаем следующую теорему.

Теорема 14. $[\mathsf{EA}^+, \mathsf{TI}^R(\Pi_1, \varepsilon_0)] \vdash \mathsf{Con}(\mathsf{PA})$.

Замечание 5.14. Скажем, что $\alpha \in S$ *в нормальной форме*, если таково представление ординала $o(\alpha)$, то есть если $\alpha = \alpha_0^+0\ldots0\alpha_k^+$, где все α_i в нормальной форме и $o(\alpha_k) \geq \cdots \geq o(\alpha_0)$. Слова в нормальной форме представляют собой однозначную систему обозначений для ε_0. Для таких слов последовательность $o(\alpha[\![n]\!])$ отличается от "стандартной" фундаментальной последовательности для $o(\alpha)$ лишь дополнительным членом "+1" в выражении из леммы 5.12. Доказательство теоремы 14 проходит без изменений и для слов в нормальной форме.

Теоремы 13 и 14 имеют некоторые интересные уточнения. Прежде всего отметим, что правило $\mathsf{TI}^R(\Pi_1, \varepsilon_0)$ сводится к формально более слабому правилу трансфинитной индукции для элементарных формул. В самом деле, если данная Π_1-формула имеет вид $\varphi(\alpha) = \forall x\varphi_0(\alpha, x)$, то достаточно определить элементарную формулу $\psi(\beta)$ таким образом, чтобы

$$\psi(\omega\alpha + n) \leftrightarrow \varphi_0(\alpha, n),$$

для любых $\alpha < \varepsilon_0$ и $n < \omega$. Тогда индукция для φ сводится к индукции для ψ.

Во-вторых, формула $\mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ является самой сильной формулой, которую можно вывести из EA^+ с помощью одного применения правила $\mathsf{TI}^R(\Pi_1, \varepsilon_0)$.

Предложение 5.15. $[\mathsf{EA}^+, \mathsf{TI}^R(\Pi_1, \varepsilon_0)] \equiv \mathsf{EA}^+ + \mathsf{Con}(\mathsf{PA})$.

Короткое доказательство можно найти в [30].

Рассмотрим теперь теорию $T = \mathsf{EA} + \mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ и соответствующую алгебру. Заметим, что T имеет Π_1-аксиоматизацию, поэтому $\mathcal{M}_T^\infty$ обладает свойством редукции. Нетрудно видеть также, что

$$\begin{aligned} \mathsf{EA} \vdash \langle n \rangle_T \top \quad &\leftrightarrow \quad \langle n \rangle_{\mathsf{EA}} \mathsf{Con}(\mathsf{PA}) \\ &\leftrightarrow \quad \mathsf{Con}(\mathsf{PA}) \wedge \langle n \rangle_{\mathsf{EA}} \top. \end{aligned}$$

Отсюда

$$T + \mathsf{PA} \equiv T + \{\langle n \rangle_T \top : n < \omega\}.$$

Таким образом, рассуждение теоремы 13 для алгебры $\mathcal{M}_T^\infty$ даёт следующий результат:

$$[\mathsf{EA}^+ + T, \mathsf{TI}^R(\Pi_1, \varepsilon_0)] \equiv \mathsf{EA}^+ + \mathsf{Con}(T + \mathsf{PA}).$$

Итерируя это рассуждение получаем характеризацию замыкания EA^+ относительно правила $\mathsf{TI}^R(\Pi_1, \varepsilon_0)$.

Предложение 5.16. $\mathsf{EA}^+ + \mathsf{TI}^R(\Pi_1, \varepsilon_0)$ *эквивалентно теории*

$$\mathsf{EA}^+ + \mathsf{Con}(\mathsf{PA}) + \mathsf{Con}(\mathsf{PA} + \mathsf{Con}(\mathsf{PA})) + \ldots$$

Аналогично получается и характеризация правила трансфинитной индукции для Π_{n+1}-формул. При этом возникают итерированные формулы n-непротиворечивости PA. Если же рассмотреть правило трансфинитной индукции для произвольных арифметических формул, то это правило будет эквивалентно полной схеме трансфинитной индукции:

$$\mathsf{TI}(\varepsilon_0): \quad \forall \alpha\, (\forall \beta < \alpha\, \varphi(\beta) \to \varphi(\alpha)) \to \forall \alpha \varphi(\alpha).$$

Отсюда вытекает следующий результат, полученный Крайзелем и Леви [54] на основе техники Генцена.

Теорема 15. $\mathsf{EA} + \mathsf{TI}(\varepsilon_0) \equiv \mathsf{EA} + \mathsf{RFN}(\mathsf{PA}) \equiv \mathsf{PA} + \mathsf{RFN}(\mathsf{PA})$.

Доказательство. Достаточно заметить, что итерированные формулы n-непротиворечивости над PA (для любого n) выводимы из схемы $\mathsf{RFN}(\mathsf{PA})$. $\boxtimes$

5.7 Невыводимое в PA комбинаторное утверждение

Теперь мы приведём простой пример (истинного) утверждения комбинаторного характера, недоказуемого в PA и возникающего из алгебр доказуемости. Это утверждение состоит в конечности некоторой последовательности, похожей на известную игру *Геракл и Гидра* Л. Кирби и Дж. Париса [50].

В игре участвуют слова в алфавите $\mathbb{N}$, которые мы будем по аналогии с Гидрой называть *червями*. Последний элемент червя $w = x_0 x_1 \ldots x_n$ называется *головой*.

Игра начинается с произвольного червя и неформально может быть описана следующим образом. На очередном шаге Геракл наносит Червю удар, в результате чего голова Червя уменьшается на 1. В ответ Червь регенерируется в соответствии с двумя простыми правилами, описанными ниже. В отличие от игры *Геракл и Гидра*, возникающая последовательность слов полностью детерминирована.

Более формально, мы определим функцию $\text{next}(w, m)$, где $w = x_0 \dots x_n$ — червь, а $m \in \mathbb{N}$ — шаг последовательности.

1. Если $x_n = 0$, то $\text{next}(w, m) := x_0 \dots x_{n-1}$. В этом случае голова червя отрубается.

2. Если $x_n > 0$ положим $k := \max\{i < n : x_i < x_n\}$.

   Червь w (с головой, уменьшенной на 1) состоит из двух частей: *здоровой*[7] $r := x_0 \dots x_k$, и *больной* $s := x_{k+1} \dots x_{n-1}(x_n - 1)$. Полагаем

$$\text{next}(w, m) := r * \underbrace{s * s * \cdots * s}_{m+1 \text{ раз}}.$$

Последовательность червей, начинающаяся с произвольного червя w, определяется следующим образом:

$$w_0 := w \quad \text{и} \quad w_{n+1} := \text{next}(w_n, n+1).$$

Рассмотрим, к примеру, червя $w = 2031$. На первом шаге получаем $k = 1$; $r = 20$; $s = 30$; $\text{next}(w, 1) = 203030$. Возникает последовательность:

$$\begin{aligned}
&w_0 = 2031 \\
&w_1 = 203030 \\
&w_2 = 20303 \\
&w_3 = 20302222 \\
&w_4 = 2030222122212221222212221 \\
&w_5 = 2030(22212221222122212220)^6 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Заметим, что последовательность w_n определена примитивной рекурсией. Фактически, w_n есть элементарная функция n и (кода) w. Это вытекает из простой оценки

$$|w_n| \leq (n+2)! \cdot |w_0|,$$

показывающей, что длина червей последовательности растёт лишь мультиэкспоненциально. Заметим также, что максимальный элемент червя может лишь уменьшаться. Это позволяет выписать элементарную формулу с тремя переменными, выражающую $w_n = u$.

Интересующее нас утверждение WP говорит о том, что рано или поздно Геракл победит любого Червя: $\quad \forall w \exists n \, w_n = \Lambda$.

Теорема 16. WP *истинно, но не доказуемо в* PA. *Фактически,* WP *эквивалентно* $1\text{-}\mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ *над* EA.

[7] Эта часть может быть и пустой.

Доказательство. Черви имеют естественную интерпретацию в терминах алгебры доказуемости $\mathcal{M}^{\infty}_{\mathsf{EA}}$. Пусть слово $\alpha \in S$ обратно к w, то есть совпадает с w, записанном в обратном порядке. Нетрудно заметить, что тогда червь $\mathrm{next}(w,n)$ будет обратен к слову $\alpha[\![n]\!]$ (это не случайно, поскольку правила игры были фактически списаны нами с определения $\alpha[\![n]\!]$). Отсюда следует истинность WP, поскольку в силу следствия 5.13 последовательность соответствующих ординалов убывает.

Фактически, это рассуждение показывает, что WP доказуемо с помощью одного применения правила $\mathsf{TI}^R(\Pi_2,\varepsilon_0)$. Отсюда следует выводимость WP из $1\text{-}\mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ в силу аналога предложения 5.15. Однако, здесь мы докажем утверждение $\mathsf{EA} + 1\text{-}\mathsf{Con}(\mathsf{PA}) \vdash \mathsf{WP}$ более прямым (и более интересным) методом, не использующим ординалы.

Определим арифметическую интерпретацию $w^\star := (\alpha^+)^*_{\mathsf{EA}}$, где α обратно к w. Как и выше, мы пишем $\langle m\rangle$ вместо $\langle m\rangle_{\mathsf{EA}}$ для всех m.

Лемма 5.17. *Для любого w $\mathsf{PA} \vdash w^\star$.*

Доказательство. Индукция по $|w|$. Если $w = vn$ и m больше любой буквы w, то

$$\begin{aligned}\mathsf{EA} \vdash v^\star \wedge \langle m+1\rangle\top \quad &\to \quad \langle m+1\rangle v^\star \quad \text{по лемме 5.8}\\ &\to \quad \langle n+1\rangle v^\star.\end{aligned}$$

По теореме 4.3 и предположению индукции

$$\mathsf{PA} \vdash v^\star \wedge \langle m+1\rangle\top,$$

таким образом $\mathsf{PA} \vdash \langle n+1\rangle v^\star$, откуда следует шаг индукции. ⊠

Лемма 5.18. *Для любого w*

$$\mathsf{EA} \vdash \forall n\,(w_n \neq \Lambda \to \Box(w_n^\star \to \langle 1\rangle w_{n+1}^\star)).$$

Доказательство. Достаточно доказать в EA

$$\forall w \neq \Lambda\ \forall n\ \mathsf{EA} \vdash w^\star \to \langle 1\rangle \mathrm{next}(w,n)^\star.$$

Пусть α обратно к w, тогда в силу сделанного замечания $\alpha[\![n]\!]$ обратно к $\mathrm{next}(w,n)$. По следствию 5.10 (формализуемому в EA)

$$\mathbf{GLP} \vdash \alpha \to \Diamond\alpha[\![n]\!].$$

Теоремы $\mathbf{GLP}$ переходят в себя при отображении $(\cdot)^+$, поэтому

$$\mathbf{GLP} \vdash \alpha^+ \to \langle 1\rangle\alpha[\![n]\!]^+.$$

Отсюда вытекает требуемое в силу арифметической корректности $\mathbf{GLP}$. ⊠

Лемма 5.19. *Для любого w $\mathsf{EA} \vdash \langle 1\rangle w_0^\star \to \exists n\, w_n = \Lambda$.*

Доказательство. Мы докажем $\forall n\, w_n \neq \Lambda \to \forall n\, [1]\neg w_n^\star$ опираясь на теорему Лёба.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{EA} \vdash \forall n\, w_n \neq \Lambda \wedge [1]\forall n[1]\neg w_n^\star & \to & [1]\forall n[1]\neg w_{n+1}^\star \\ & \to & \forall n[1][1]\neg w_{n+1}^\star \\ & \to & \forall n[1]\neg w_n^\star \text{ по лемме 5.18.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{EA} \vdash [1]\forall n\, w_n \neq \Lambda & \to & [1]([1]\forall n[1]\neg w_n^\star \to \forall n[1]\neg w_n^\star) \\ & \to & [1]\forall n[1]\neg w_n^\star \text{ по теореме Лёба.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{EA} \vdash \forall n\, w_n \neq \Lambda & \to & [1]\forall n\, w_n \neq \Lambda \ (\Sigma_2\text{-полнота}) \\ & \to & [1]\forall n[1]\neg w_n^\star \\ & \to & \forall n[1]\neg w_n^\star \\ & \to & [1]\neg w_0^\star, \end{array}$$

что и требовалось доказать. ⊠

Мы завершаем доказательство первой части теоремы 16. По леммам 5.17 и 5.19 получаем, что для любого w

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{PA} & \vdash & \langle 1\rangle w^\star, \\ \mathsf{EA} & \vdash & \langle 1\rangle w^\star \to \exists n\, w_n = \Lambda. \end{array}$$

Значит, $\forall w$ $\mathsf{PA} \vdash \exists n\, w_n = \Lambda$. Это доказательство формализуемо в EA, поэтому 1-$\mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ влечёт $\forall w \exists n\, w_n = \Lambda$.

5.8 Независимость WP

Положим $w[\![n]\!] := \mathrm{next}(w,n)$ and

$$w[\![n \ldots n+k]\!] := w[\![n]\!][\![n+1]\!]\ldots[\![n+k]\!].$$

Мы введём следующий аналог так называемых функций Харди. Положим $h_w(n)$ равным наименьшему k такому, что

$$w[\![n \ldots n+k]\!] = \Lambda.$$

Нам будут нужны некоторые свойства h, которые можно установить элементарными рассуждениями, формализуемыми в EA. Заметим, что функция

$$W(w,n,k) := w[\![n \ldots n+k]\!]$$

элементарна, поскольку её можно определить ограниченной рекурсией по k аналогично последовательности w_n. Это даёт естественное элементарное представление отношения $h_w(n) = k$ в EA.

Следующее понятие удобно, чтобы установить монотонность функций h_w. Положим $v \trianglelefteq u$, если и только если $v = u[\![0]\!][\![0]\!]\ldots[\![0]\!]$. Это означает, что v есть начальный сегмент u, за исключением последней буквы, которая не превосходит соответствующей буквы в u. Заметим, что в EA, вообще говоря, нельзя установить тотальность функций h_w. Для формализации нижеследующих лемм в EA мы каждый раз будем оговаривать это условие.

Лемма 5.20. *Если $h_w(m)$ определено и $u \trianglelefteq w$, то*

$$\exists k \; w[\![m \dots m+k]\!] = u.$$

Доказательство. Правила игры таковы, что n-ная буква w может измениться, если только все буквы справа от неё удалены. Поэтому, если $w[\![m \dots m+s]\!] = \Lambda$, то для некоторого $k < s$ $w[\![m \dots m+k]\!] = u$. ⊠

Следствие 5.21. *Если $h_w(n)$ определено, то $\forall m \leq n \, \exists k \; w[\![n \dots n+k]\!] = w[\![m]\!]$.*

Доказательство. $w[\![m]\!]$ есть начало $w[\![n]\!]$. ⊠

Лемма 5.22. *Если $v \trianglelefteq u$ и $x \leq y$, то $h_v(x) \leq h_u(y)$.*

Доказательство. Применяя следствие 5.21 несколько раз получаем $s_0, s_1, \dots$ такие, что

$$\begin{array}{rcl} u[\![y \dots y+s_0]\!] & = & v[\![x]\!], \quad \text{где } y+s_0 \geq x; \\ u[\![y \dots y+s_0+s_1]\!] & = & v[\![x]\!][\![x+1]\!], \quad \text{где } y+s_0+s_1 \geq x+1; \\ & \dots & \end{array}$$

Поэтому все элементы последовательности, начинающейся с v, входят в последовательность для u. ⊠

Лемма 5.23. $h_{u0v}(n) = h_u(n + h_v(n) + 2) + h_v(n) + 1 > h_u(h_v(n))$.

Доказательство. Элемент 0 между u и v останется на месте до тех пор пока часть v не будет удалена. Поэтому червь $u0v$ сначала перейдёт в $u0$ за $h_v(n)$ шагов, а затем в Λ. ⊠

Следствие 5.24. *Если $w \in S_1$, то $h_{w1}(n) > h_w^{(n)}(n)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $w1[\![n]\!] = w0w0 \dots w0$. ⊠

Теперь мы сформулируем основную лемму. Как обычно, $h_w{\downarrow}$ означает формулу $\forall x \exists y \; h_w(x) = y$. Определим также $w^* := \alpha^*$, где слово $\alpha \in S$ обратно к w.

Лемма 5.25. $\mathsf{EA} \vdash \forall w \in S_1 \, (h_{1111w}{\downarrow} \to \langle 1 \rangle w^*)$.

Из этой леммы легко следует теорема 16.

Доказательство независимости WP:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{EA} \vdash \forall w \exists n \; w_n = \Lambda & \to & \forall w \in S_1 \; h_w{\downarrow} \\ & \to & \forall n \; \langle 1 \rangle \langle n \rangle \top \\ & \to & 1\text{-}\mathsf{Con}(\mathsf{PA}). \end{array}$$

Здесь первая импликация имеет место, поскольку для любого червя w и числа x мы можем найти $w' := w0^x$ такой, что $w'[\![0\dots x-1]\!] = w$. Отсюда, Геракл побеждает w', если и только если значение $h_w(x)$ определено. ⊠

В доказательстве леммы мы существенно опираемся на лемму 3.5. Заметим, что по следствию 5.24 мы имеем $h_{111}(x) > 2^x$, поэтому то же неравенство имеет место и для функции $h_{111w}(x)$, где w — любое слово.

Доказательство леммы 5.25. Рассуждаем в EA. По теореме Лёба мы можем использовать как дополнительное предположение

$$\forall w \in S_1\, [1](h_{1111w}\!\downarrow\, \to \langle 1\rangle w^*). \qquad (*)$$

Если $1111w = v1$, то $h_{v1}\!\downarrow\, \to \lambda x.h_v^{(x)}(x)\!\downarrow$.
Функция h_v монотонно возрастает, имеет элементарный график и растёт быстрее 2^x. Поэтому для $w = \Lambda$ утверждение очевидно: $h_{1111}\!\downarrow$ влечёт тотальность 2_n^x и, следовательно, $\langle 1\rangle\top$. Если w непусто, мы рассуждаем следующим образом:

$$\begin{array}{rcll} \lambda x.h_v^{(x)}(x)\!\downarrow & \to & \langle 1\rangle h_v\!\downarrow & \\ & \to & \langle 1\rangle\langle 1\rangle v^* & \text{по предположению } (*) \\ & \to & \langle 1\rangle w^*. & \end{array}$$

Если $1111w = v$ оканчивается на $m > 1$, то

$$\begin{array}{rcl} h_v\!\downarrow & \to & \lambda x.h_{v[\![x]\!]}(x+1)\!\downarrow \\ & \to & \forall n\, h_{v[\![n]\!]}\!\downarrow. \end{array}$$

Для вывода последней импликации рассмотрим произвольное n. Если $x \leq n$, то $h_{v[\![n]\!]}(x) \leq h_{v[\![n]\!]}(n+1)$. Если же $x \geq n$, то $h_{v[\![n]\!]}(x) \leq h_{v[\![x]\!]}(x+1)$. В обоих случаях большее значение определено, значит определено и меньшее.

Продолжим рассуждение.

$$\begin{array}{rcl} \forall n\, h_{v[\![n+1]\!]}\!\downarrow & \to & \forall n\, h_{v[\![n]\!]1}\!\downarrow \quad \text{поскольку } v[\![n]\!]1 \trianglelefteq v[\![n+1]\!] \\ & \to & \forall n\, \langle 1\rangle h_{v[\![n]\!]}\!\downarrow \quad \text{как и ранее} \\ & \to & \forall n\, \langle 1\rangle\langle 1\rangle w[\![n]\!]^* \\ & \to & \langle 1\rangle w^* \text{ по свойству редукции.} \end{array}$$

Это завершает доказательство леммы 5.25 и теоремы 16. ⊠

6 Итерированные схемы рефлексии

Здесь мы коротко рассмотрим связь алгебр доказуемости и иерархий итерированных схем рефлексии в смысле Тьюринга–Фефермана [93, 41]. Исторически первым и, вероятно, наиболее важным примером такой иерархии является так назваемая *трансфинитная рекурсивная прогрессия Тьюринга*, которая определяется следующим образом:

T1. $T_0 := T$, где T — данная "начальная" теория;

T2. $T_{\alpha+1} := T_\alpha + \mathsf{Con}(T_\alpha)$;

T3. $T_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$, где α — предельный ординал.

По теореме Гёделя, если начальная теория T Σ_1-корректна, теории T_α образуют строго возрастающую трансфинитную последовательность Σ_1-корректных расширений T. Эта последовательность позволяет сопоставить ординал $\mathrm{ord}_T(U)$ любому расширению U теории T следующим образом:

$$\mathrm{ord}_T(U) := \text{ наименьший } \alpha \text{ такой, что } U \nvdash \mathsf{Con}(T_\alpha).$$

Для наиболее естественных расширений теории T обычно можно установить, что для $\alpha = \mathrm{ord}_T(U)$ теория T_α исчерпывает все арифметические Π_1-следствия U, то есть

$$U \equiv_{\Pi_1} T_\alpha.$$

Таким образом, $\mathrm{ord}_T(U)$ может рассматриваться как ординал, измеряющий "силу" теории U относительно T в смысле доказуемости Π_1-предложений. В качестве T естественно выбрать некоторую фиксированную слабую Π_1-аксиоматизированную теорию, например EA. В этом случае мы будем называть $\mathrm{ord}_{\mathsf{EA}}(U)$ Π^0_1-*ординалом* U.

Преимущество этого подхода перед другими известными способами сопоставления ординалов теориям состоит в том, что при этом получается наиболее тонкая классификация, позволяющая различать теории уже на уровне их Π_1-следствий. Например, теории PA и $\mathsf{PA}+\mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ имеют одни и те же классы д.т.в.ф. и одинаковые ординальные границы доказуемости трансфинитной индукции равные ε_0. Однако (см. ниже теорему 7.25 (i)), $\mathrm{ord}_{\mathsf{EA}}(\mathsf{PA}) = \varepsilon_0$, в то время как $\mathrm{ord}_{\mathsf{EA}}(\mathsf{PA}+\mathsf{Con}(\mathsf{PA})) = \varepsilon_0 \cdot 2$. Аналогично, заменяя в определении прогрессии Тьюринга формулу непротиворечивости $\mathsf{Con}(T)$ на формулу n-непротиворечивости n-$\mathsf{Con}(T)$ мы получаем определение Π^0_n-ординала теории.

Хорошо известная трудность на пути этой программы классификации теорий состоит в том, что условия T1–T3 не определяют последовательность T_α однозначно, то есть теория T_α зависит от формального представления ординала α в арифметике, а не только от самого порядкового типа, а также зависит от конкретного способа арифметизации условий T1–T3.

Для анализа этой проблемы Феферман [41] рассмотрел семейство теорий вида $(T_c)_{c\in\mathcal{O}}$, удовлетворяющее условиям T1–T3 вдоль каждого пути в $\mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ — универсальная система ординальных обозначений Клини. Используя идею Тьюринга, он показал, что каждое истинное Π_1-предложение доказуемо в T_c для подходящего ординального обозначения $c \in \mathcal{O}$, где $|c| = \omega + 1$.[8] Отсюда следует, что найдутся два обозначения $a, b \in \mathcal{O}$, $|a| = |b| = \omega + 1$ такие, что в T_a доказуемо $\mathsf{Con}(T_b)$. Это обстоятельство препятствует реализации программы сопоставления ординалов теориям, описанной выше, по крайней мере в общем случае.

[8]Здесь и ниже $|c|$ означает ординал, кодируемый числом c.

Тем не менее, остается возможность, что для *естественных,* математически осмысленных теорий U можно исчерпать все Π_1-следствия U используя лишь специфические, *естественные* ординальные обозначения, и тщательный выбор таких обозначений должен дать правильные ординальные оценки. Первые примеры успешной реализации этой идеи были получены в работе У. Шмерля [79], который показал среди прочего, что для стандартной системы ординальных обозначений до ε_0 и некоторого конкретного способа арифметизации Т1–Т3 в теориях PA и $\mathsf{PRA}_{\varepsilon_0}$ доказуемы одни и те же Π_1-предложения. Таким образом, $\mathrm{ord}_{\mathsf{PRA}}(\mathsf{PA}) = \varepsilon_0$, что совпадает с ординалом, сопоставляемым PA посредством других теоретико-доказательственных методов.

В работе [22] предложен упрощённый подход к определению итерированных схем рефлексии на основе понятия *гладкой прогрессии Тьюринга.* Там же установлены теоремы о существовании и единственности таких прогрессий для данного элементарного линейного порядка и данной начальной теории. Тем самым понятие гладкости дает удовлетворительный ответ на вопрос об арифметизации условий Т1–Т3 и их аналогов для других схем рефлексии. Это позволило дать корректные определения Π^0_n-ординалов теорий в соответствии с изложенным выше подходом для любой фиксированной системы ординальных обозначений [29]. В этой же работе содержится подробное обсуждение возможных определений ординалов теорий и обзор основных результатов об итерированных схемах рефлексии.

Здесь мы покажем, что система ординальных обозначений, возникающая из градуированной алгебры доказуемости для EA, позволяет непосредственно вычислить Π^0_n-ординалы стандартных фрагментов PA для всех n. Мы также легко получаем отсюда вариант так называемой формулы У. Шмерля, связывающей различные прогрессии итерированных схем равномерной рефлексии. Предлагаемый здесь подход является упрощением [29].

6.1 Гладкие прогрессии Тьюринга

Назовём *элементарным частичным порядком* $(D, \prec)$ пару элементарных формул $x \in D$ и $x \prec y$, таких что в EA доказуемо, что отношение $\prec$ строго частично упорядочивает множество $D \subseteq \mathbb{N}$. Элементарное *вполне упорядочение* — это элементарный порядок, являющийся фундированным порядком в стандартной модели арифметики. (Заметим, что понятие фундированности невыразимо в языке арифметики первого порядка.)

Допустим, что нам даны некоторая "начальная" элементарно аксиоматизированная теория T и элементарный порядок $(D, \prec)$. В [22, 29] показано, что существует единственное с точностью до доказуемой эквивалентности в EA семейство элементарно аксиоматизированных теорий $(T^n_\alpha)_{\alpha \in D}$ такое, что в EA доказуемо

$$\forall \alpha \in D \quad T^n_\alpha \equiv T + \{n\text{-}\mathsf{Con}(T^n_\beta) : \beta \prec \alpha,\ \beta \in D\}.$$

Такую последовательность будем называть *гладкой прогрессией, основанной на итерации формулы n-непротиворечивости.* Обозначаем через T_α

гладкую прогрессию Тьюринга T^0_α. Назовём Π^0_{n+1}-*ординалом* теории U наименьший $\alpha \in D$ для которого $\mathsf{EA}^n_{\alpha+1} \not\subseteq U$.

Гладкие прогрессии обладают рядом естественных свойств, содержащихся в следующей лемме.

Рассмотрим $(S_n, <_n)$ в качестве порядка $(D, \prec)$ и соответствующую прогрессию T^n_α.

Теорема 17. *Если T — элементарно аксиоматизированное Π_{n+1}-расширение EA^+, то доказуемо в EA^+*

$$\forall \alpha \in S_n \quad T + \alpha^*_T \equiv_n T^n_\alpha.$$

Доказательство. По теореме Лёба, достаточно установить

$$\mathsf{EA}^+ \vdash \forall \beta <_n \alpha \, \Box_{\mathsf{EA}^+}(T + \beta^*_T \equiv_n T^n_\beta) \to T + \alpha^*_T \equiv_n T^n_\alpha.$$

Мы дадим неформальное доказательство эквивалентности $T + \alpha^*_T \equiv_n T^n_\alpha$ в EA^+, при этом посылку импликации называем рефлексивным предположением индукции. Заметим, что это предположение влечёт

$$\forall \beta <_n \alpha \quad \mathsf{EA}^+ \vdash \langle n \rangle_T \beta^* \leftrightarrow n\text{-}\mathsf{Con}(T^n_\beta).$$

($\supseteq$) По определению $<_n$, если $\beta <_n \alpha$ то $T \vdash \alpha^*_T \to \langle n \rangle_T \beta^*_T$. По рефлексивному предположению индукции

$$\mathsf{EA}^+ \vdash \langle n \rangle_T \beta^*_T \to n\text{-}\mathsf{Con}(T^n_\beta).$$

Отсюда следует, что для всех $\beta <_n \alpha$

$$T \vdash \alpha^*_T \to n\text{-}\mathsf{Con}(T^n_\beta),$$

то есть $T + \alpha^*_T \vdash T^n_\alpha$.

($\subseteq_n$) Допустим $T + \alpha^* \vdash \pi$, где $\pi \in \Pi_{n+1}$. Если $\alpha = n\beta$, то $T + \langle n \rangle_T \beta^*_T \vdash \pi$, что влечёт $T + n\text{-}\mathsf{Con}(T^n_\beta) \vdash \pi$ по рефлексивному предположению индукции. Поскольку $\beta <_n \alpha$, заключаем, что $T^n_\alpha \vdash \pi$.

Если $\alpha = \langle m+1 \rangle \beta$, где $m \geq n$, то

$$\{\alpha^*_T\} \equiv_m \{\alpha[\![k]\!] : k < \omega\}$$

по свойству редукции. Поэтому $T + \alpha[\![k]\!]^*_T \vdash \pi$, для некоторого k. Поскольку $\alpha[\![k]\!] <_n \alpha$, мы получаем $T^n_{\alpha[\![k]\!]} \vdash \pi$ по рефлексивному предположению индукции. $\boxtimes$

Заметим, что в доказательстве этой теоремы мы нигде не воспользовались свойством фундированности системы ординальных обозначений. Тот факт, что T содержит EA^+, существенен лишь при $n = 0$; для $n > 0$ достаточно предположения о том, что $T \supseteq \mathsf{EA}$. Это относится и к формулируемым ниже следствиям.

Так же как и для теоремы Генцена, мы имеем вариант этого результата для стандартной системы обозначений для ε_0. Обозначим через $o_n(\alpha)$ канторовскую нормальную форму представления ординала $o(\alpha^{-n})$, где α^{-n} получается из $\alpha \in S_n$ заменой всех букв m на $m - n$.

Теорема 18. *Если T — элементарно аксиоматизированное Π_{n+1}-расширение* EA^+, *то доказуемо в* EA^+

$$\forall \alpha \in S_n \quad T + \alpha^*_T \equiv_n T^n_{o_n(\alpha)}.$$

Эта теорема позволяет вычислить Π^0_n-ординалы и получить характеризации Π_n-следствий для всех рассматривавшихся ранее фрагментов PA. Для схем индукции с параметрами ответ даёт следующая теорема. Обозначим $\omega_0(\alpha) = \alpha$, $\omega_{n+1}(\alpha) = \omega^{\omega_n(\alpha)}$, $\omega_n = \omega_n(1)$. Заметим, что $o(n) = \omega_n$.

Следствие 6.1. (i) $\mathsf{PA} \equiv_m \bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} (\mathsf{EA}^+)^m_\alpha$*;*

(ii) $I\Sigma_n \equiv_m (\mathsf{EA}^+)^m_{\omega_{n+1-m}}$, *если* $m \leq n$.

Доказательство. Утверждение (ii) следует из того, что $I\Sigma_n$ есть $\langle n{+}1\rangle_{\mathsf{EA}}\top$ и $o_m(n{+}1) = o(n{+}1{-}m) = \omega_{n+1-m}$. Первое утверждение получается отсюда переходом к пределу по n. ⊠

Характеризация Π_2-ординала некоторой теории в терминах итерированных формул 1-непротиворечивости над EA влечёт характеризацию д.т.в.ф. этой теории в терминах так называемой расширенной иерархии Гжегорчика $\mathcal{E}^\alpha$, то есть $\mathcal{F}(\mathsf{EA}^2_\alpha) = \mathcal{E}^\alpha$ для любых α.

Этот результат имеет место для достаточно общих систем ординальных обозначений и доказывается трансфинитной итерацией леммы 3.5 ([29], см. также [90]). Отсюда получается новое доказательство известной теоремы Швихтенберга–Вэйнера (см. [38, 29]).

Следствие 6.2. $\mathcal{F}(\mathsf{PA}) = \bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathcal{E}^\alpha$.

Рассмотрим теперь более экзотический случай теории $I\Sigma_1 + I\Pi^-_2$. Эта теория интересна тем, что в ней формализуемо наиболее естественное доказательство тотальности функции Аккермана. Следующая теорема, в частности, позволяет дать ответ на вопрос о классе д.т.в.ф. этой теории.

Теорема 19. $I\Sigma_n + I\Pi^-_{n+1} \equiv_m (\mathsf{EA}^+)^m_\alpha$, *где* $\alpha = \omega_{n+1-m}(2)$, $m \leq n$.

Доказательство. По предложению 4.23, $I\Sigma_n + I\Pi^-_{n+1} \equiv_n (I\Sigma_n)^n_\omega$. По свойству редукции для $\mathcal{M}^\infty_{\mathsf{EA}^+}$ мы также имеем

$$(I\Sigma_n)^n_\omega \equiv_n \langle n+1\rangle(I\Sigma_n) \equiv \langle n+1\rangle\langle n+1\rangle\top.$$

По теореме 18, Π_n-ординал этой теории равен

$$o_m(\langle n+1\rangle\langle n+1\rangle\top) = o(\langle n+1-m\rangle\langle n+1-m\rangle\top) = \omega_{n+1-m}(2).$$

⊠

Следствие 6.3. $\mathcal{F}(I\Sigma_n + I\Pi^-_{n+1}) = \mathcal{E}^{\omega_n(2)}$. *В частности,* $\mathcal{F}(I\Sigma_1 + I\Pi^-_2) = \mathcal{E}^{\omega^2}$, *то есть совпадает с классом дважды рекурсивных функций в смысле Р. Петер.*

Наконец, вычислим Π^0_1-ординал теории $\mathsf{PA}+\mathsf{Con}(\mathsf{PA})$. Мы будем работать со стандартой системой обозначений до ε_1, которая представляет собой структуру $(\varepsilon_1;\leq,0,\varepsilon_0,+,\omega^x)$. Ординалы кодируются термами в нормальной форме, построенными из констант 0 и ε_0 с помощью функций + и ω^x.

Следствие 6.4. $\mathsf{PA}+\mathsf{Con}(\mathsf{PA})\equiv_0 \mathsf{EA}^+_{\varepsilon_0+\varepsilon_0}$.

Доказательство. Рассмотрим теорию $T=\mathsf{EA}^+ +\mathsf{Con}(\mathsf{PA})$ и соответствующую алгебру доказуемости $\mathcal{M}^\infty_T$. Заметим, что T является Π_2-расширением EA, поэтому $\mathcal{M}^\infty_T$ обладает свойством редукции. Как мы уже видели,

$$\mathsf{PA}+\mathsf{Con}(\mathsf{PA})\equiv T+\{\langle n\rangle_T\top : n<\omega\}.$$

Отсюда следует по теореме 18, что

$$\mathsf{PA}+\mathsf{Con}(\mathsf{PA})\equiv_0 T_{\varepsilon_0}.$$

С другой стороны, доказуемо в EA^+ мы имеем $\mathsf{PA}\equiv_0 \mathsf{EA}^+_{\varepsilon_0}$, откуда

$$T\equiv \mathsf{EA}^+_{\varepsilon_0+1}.$$

По теореме о единственности гладких прогрессий, если доказуемо $U\equiv V$, то доказуемо $U_\alpha\equiv V_\alpha$ для всех α. Таким образом,

$$\mathsf{PA}+\mathsf{Con}(\mathsf{PA})\equiv_0 T_{\varepsilon_0}\equiv(\mathsf{EA}^+_{\varepsilon_0+1})_{\varepsilon_0}.$$

Свойства функции + для стандартной системы обозначений позволяют установить в EA очевидное свойство $(U_\alpha)_\beta\equiv U_{\alpha+\beta}$ для любых α,β. Поэтому $(\mathsf{EA}^+_{\varepsilon_0+1})_{\varepsilon_0}\equiv\mathsf{EA}^+_{\varepsilon_0+\varepsilon_0}$, что и требовалось доказать. ⊠

Список литературы

[1] Г. Е. Минц. Бескванторные и однокванторные системы. *Записки научных семинаров ЛОМИ*, 20:115–133, 1971.

[2] Ю.Л. Ершов. *Теория нумераций.* Наука, Москва, 1977.

[3] В.П. Оревков. Нижние оценки удлиннения выводов после устранени сечения. *Записки науч. сем. ЛОМИ*, 88:137–162, 1979. English translation in *Journal of Soviet Mathematics*, 20 (1982), 2337–2350.

[4] С.Н. Артёмов. *Расширения арифметики и модальные логики.* Дисс. канд. физ.-мат. наук, Математический институт им. В.А. Стеклова, Москва, 1979.

[5] С.Н. Артёмов. Приложения модальной логики в теории доказательств. В сб.: *Вопросы кибернетики: Неклассические логики и их применения*, с. 3–20. Наука, Москва, 1982.

[6] К. Сморинский. Теоремы о неполноте. В кн.: Дж. Барвайс, ред., *Справочная книга по математической логике, ч.4: теория доказательств и конструктивная математика*, с. ?? Наука, Москва, 1983. Пер. с англ. под ред. В.П. Оревкова.

[7] Г. Швихтенберг. Некоторые приложения устранения сечения. In Дж. Барвайс, ред., *Справочная книга по математической логике, ч.4: теория доказательств и конструктивная математика*, с. ?? Наука, Москва, 1983. Пер. с англ. под ред. В.П. Оревкова.

[8] Н. Катленд. *Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций.* Мир, Москва, 1983. Пер. с англ. под ред. С.Ю. Маслова.

[9] С.В. Горячев. Об интерпретируемости некоторых расширений арифметики. *Математические заметки*, 40:561–572, 1986. English translation in *Math. Notes*, 40.

[10] Г.К. Джапаридзе. Модально-логические средства исследования доказуемости. Дисс. канд. филос. наук, Москва, МГУ, 1986.

[11] Г.К. Джапаридзе. Полимодальная логика доказуемости. В сб. *Интенсиональные логики и логическая структура теорий: материалы 4-го советско-финского сипозиума по логике, Телави, 20–24 мая 1985 г.*, с. 16–48. Мецниереба, Тбилиси, 1988.

[12] Л.Д. Беклемишев. Об ограниченном правиле индукции и итерированных схемах рефлексии над Кальмаровской элементарной арифметикой. В сб. О.Б. Лупанов, ред., *Теоретические и прикладные аспекты математических исследований*, pages 36–39. МГУ, Москва, 1994.

[13] С.С. Гончаров. *Счётные булевы алгебры и разрешимость.* Сибирская школа алгебры и логики. Научная Книга, Новосибирск, 1996. English translation: Countable boolean algebras and decidability. Plenum Press, New York, 1997.

[14] W. Ackermann. Zur Wiederspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Math. Ann.*, 117:162–194, 1940.

[15] T. Arai. Epsilon substitution method for theories of jump hierarchies. *Archive for Mathematical Logic*, 41(2):123–153, 2002.

[16] T. Arai. Epsilon substitution method for $\mathrm{ID}_1(\Pi^0_1 \vee \Sigma^0_1)$. *Annals of Pure and Applied Logic*, 121(2–3):163–208, 2003.

[17] S.N. Artëmov and L.D. Beklemishev. On propositional quantifiers in provability logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 34:401–419, 1993.

[18] S.N. Artemov and L.D. Beklemishev. Provability logic. Logic Group Preprint Series 234, University of Utrecht, November 2004. `http://preprints.phil.uu.nl/lgps/`. To appear in *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 10, D. Gabbay and F. Guenthner, eds., Kluwer, Dordrecht.

[19] J. Avigad. An ordinal analysis of admissible set theory using recursion on ordinal notations. *Journal of Mathematical Logic*, 2(1):91–112, 2002.

[20] J. Avigad and R. Sommer. A model-theoretic approach to ordinal analysis. *Bulletin of Symbolic Logic*, 3(1):17–52, 1997.

[21] J. Avigad and R. Sommer. The model-theoretic ordinal analysis of theories of predicative strength. *Journal of Symbolic Logic*, 64(1):327–349, 1999.

[22] L.D. Beklemishev. Iterated local reflection versus iterated consistency. *Annals of Pure and Applied Logic*, 75:25–48, 1995.

[23] L.D. Beklemishev. Remarks on Magari algebras of PA and $I\Delta_0 + \mathrm{EXP}$. In P. Agliano and A. Ursini, editors, *Logic and Algebra*, pages 317–325. Marcel Dekker, New York, 1996.

[24] L.D. Beklemishev. Induction rules, reflection principles, and provably recursive functions. *Annals of Pure and Applied Logic*, 85:193–242, 1997.

[25] L.D. Beklemishev. Notes on local reflection principles. *Theoria*, 63(3):139–146, 1997.

[26] L.D. Beklemishev. Parameter free induction and reflection. In G. Gottlob, A. Leitsch, and D. Mundici, editors, *Lecture Notes in Computer Science 1289. Computational Logic and Proof Theory, 5-th K.Gödel Colloquium KGC'97, Proceedings*, pages 103–113. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[27] L.D. Beklemishev. A proof-theoretic analysis of collection. *Archive for Mathematical Logic*, 37:275–296, 1998.

[28] L.D. Beklemishev. Parameter free induction and provably total computable functions. *Theoretical Computer Science*, 224(1–2):13–33, 1999.

[29] L.D. Beklemishev. Proof-theoretic analysis by iterated reflection. *Archive for Mathematical Logic*, 42:515–552, 2003. DOI: 10.1007/s00153-002-0158-7.

[30] L.D. Beklemishev. Provability algebras and proof-theoretic ordinals, I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 128:103–123, 2004.

[31] L.D. Beklemishev. The Worm principle. Logic Group Preprint Series 219, University of Utrecht, March 2003. `http://preprints.phil.uu.nl/lgps/`.

[32] G. Boolos. Reflection principles and iterated consistency assertions. *Journal of Symbolic Logic*, 44:33–35, 1979.

[33] G. Boolos. *The Unprovability of Consistency: An Essay in Modal Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[34] G. Boolos. Omega-consistency and the diamond. *Studia Logica*, 39:237–243, 1980.

[35] G. Boolos. *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[36] W. Buchholz. Explaining Gentzen's consistency proof within infinitary proof theory. In G. Gottlob, A. Leitsch, and D. Mundici, editors, *Lecture Notes in Computer Science 1289. Computational Logic and Proof Theory, 5-th K.Gödel Colloquium KGC'97, Proceedings*, pages 4–17. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[37] W. Buchholz. Explaining the Gentzen–Takeuti reduction steps: A second-order system. *Archive for Mathematical Logic*, 40(4):255–272, 2001.

[38] W. Buchholz and S. Wainer. Provably computable functions and the fast growing hierarchy. In *Contemporary Math. 65*, pages 179–198, 1987.

[39] D. de Jongh and G. Japaridze. The Logic of Provability. In S.R. Buss, editor, *Handbook of Proof Theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol.137, pages 475–546. Elsevier, Amsterdam, 1998.

[40] S. Feferman. Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae*, 49:35–92, 1960.

[41] S. Feferman. Transfinite recursive progressions of axiomatic theories. *Journal of Symbolic Logic*, 27:259–316, 1962.

[42] S. Feferman. Three conceptual problems that bug me. Lecture text for 7-th Scandinavian Logic Symposium, ftp://math.stanford.edu/pub/papers/feferman/conceptualprobs.ps.gz, 1996.

[43] G. Gentzen. Die Wiederspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Math. Ann.*, 112:493–565, 1936.

[44] G. Gentzen. Neue Fassung des Wiederspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. *Forschungen zur Logik ung Grundlegung der exakten Wissenschaften*, 4:19–44, 1938.

[45] K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.

[46] P. Hájek and P. Pudlák. *Metamathematics of First Order Arithmetic.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[47] L. Henkin, J.D. Monk, and A. Tarski. *Cylindric algebras. Part I, II. 2nd printing.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vols. 64, 115. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[48] K.N. Ignatiev. On strong provability predicates and the associated modal logics. *Journal of Symbolic Logic*, 58:249–290, 1993.

[49] R. Kaye, J. Paris, and C. Dimitracopoulos. On parameter free induction schemas. *Journal of Symbolic Logic*, 53(4):1082–1097, 1988.

[50] L.A.S. Kirby and J.B. Paris. Accessible independence results for Peano arithmetic. *Bull. London Math. Soc.*, 14:285–293, 1982.

[51] G. Kreisel. On the interpretation of non-finitist proofs, II. *Journal of Symbolic Logic*, 48:182–184, 1952.

[52] G. Kreisel. A survey of proof theory. *Journal of Symbolic Logic*, 33:321–388, 1968.

[53] G. Kreisel. Wie die Beweistheorie zu ihren Ordinalzahlen kam und kommt. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 78(4):177–223, 1977.

[54] G. Kreisel and A. Lévy. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems. *Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 14:97–142, 1968.

[55] D. Leivant. The optimality of induction as an axiomatization of arithmetic. *Journal of Symbolic Logic*, 48:182–184, 1983.

[56] P. Lindström. On partially conservative sentences and interpretability. *Proceedings of the AMS*, 91(3):436–443, 1984.

[57] P. Lindström. Provability logic – a short introduction. *Theoria*, 62(1-2):19–61, 1996.

[58] M.H. Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *Journal of Symbolic Logic*, 20:115–118, 1955.

[59] R. Magari. The diagonalizable algebras (the algebraization of the theories which express Theor.:II). *Bollettino della Unione Matematica Italiana,* Serie 4, 12, 1975. Suppl. fasc. 3, 117–125.

[60] R. Magari. Representation and duality theory for diagonalizable algebras (the algebraization of theories which express Theor.:IV). *Studia Logica*, 34:305–313, 1975.

[61] G. Mints and S. Tupailo. Epsilon-substitution method for the ramified language and Δ^1_1-comprehension rule. In A. et al. Cantini, editor, *Logic and foundations of mathematics. Selected contributed papers of the 10th international congress of logic, methodology and philosophy of science, Florence, August 19–25, 1995.* Synth. Libr. 280, pages 107–130, Dordrecht, 1999. Kluwer.

[62] F. Montagna. On the algebraization of a Feferman's predicate (the algebraiztion of theories which express Theor; X). *Studia Logica*, 37:221–236, 1978.

[63] F. Montagna. On the diagonalizable algebra of Peano arithmetic. *Bollettino della Unione Matematica Italiana,* B (5), 16:795–812, 1979.

[64] F. Montagna. Undecidability of the first order theory of diagonalizable algebras. *Studia Logica*, 39:347–354, 1980.

[65] H. Ono. Reflection principles in fragments of Peano Arithmetic. *Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 33(4):317–333, 1987.

[66] R. Parikh. Existence and feasibility in arithmetic. *Journal of Symbolic Logic*, 36:494–508, 1971.

[67] C. Parsons. On a number-theoretic choice schema and its relation to induction. In A. Kino, J. Myhill, and R.E. Vessley, editors, *Intuitionism and Proof Theory*, pages 459–473. North Holland, Amsterdam, 1970.

[68] C. Parsons. On n-quantifier induction. *Journal of Symbolic Logic*, 37(3):466–482, 1972.

[69] W. Pohlers. A short course in ordinal analysis. In A. Axcel and S. Wainer, editors, *Proof Theory, Complexity, Logic*, pages 867–896. Oxford University Press, Oxford, 1993.

[70] W. Pohlers. Subsystems of set theory and second order number theory. In S.R. Buss, editor, *Handbook of Proof Theory*, pages 210–335. Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1998.

[71] M.B. Pour-El and S. Kripke. Deduction-preserving "recursive isomorphisms" between theories. *Fundamenta Mathematicae*, 61:141–163, 1967.

[72] L.J. Pozsgay. Gödel's Second Theorem for Elementary Arithmetic. *Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 14:67–80, 1968.

[73] M.O. Rabin. Non-standard models and independence of the induction axiom. In *Essays on the Foundations of Mathematics: Dedicated to A. Fraenkel on his 70th anniversary*, pages 287–299. North-Holland, Amsterdam, 1961.

[74] M. Rathjen. Recent advances in ordinal analysis: Π^1_2-CA and related systems. *Bulletin of Symbolic Logic*, 1(4):468–485, 1995.

[75] M. Rathjen. The realm of ordinal analysis. In S.B. Cooper and J.K. Truss, editors, *Sets and proofs. London Math. Soc. Lect. Note Series 258*, pages 219–279. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[76] H.E. Rose. *Subrecursion: Functions and Hierarchies.* Clarendon Press, Oxford, 1984.

[77] J.B. Rosser. Extensions of some theorems of Gödel and Church. *Journal of Symbolic Logic*, 1:87–91, 1936.

[78] J.B. Rosser. Gödel Theorems for non-constructive logics. *Journal of Symbolic Logic*, 2:129–137, 1937.

[79] U.R. Schmerl. A fine structure generated by reflection formulas over Primitive Recursive Arithmetic. In M. Boffa, D. van Dalen, and K. McAloon, editors, *Logic Colloquium'78*, pages 335–350. North Holland, Amsterdam, 1979.

[80] H. Schwichtenberg. Some applications of cut-elimination. In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pages 867–896. North Holland, Amsterdam, 1977.

[81] K. Segerberg. *An essay in classical modal logic.* Filosofiska Föreningen och Filosofiska Institutionen vid Uppsala Universitet, Uppsala, 1971.

[82] V.Yu. Shavrukov. A note on the diagonalizable algebras of PA and ZF. *Annals of Pure and Applied Logic*, 61:161–173, 1993.

[83] V.Yu. Shavrukov. Subalgebras of diagonalizable algebras of theories containing arithmetic. *Dissertationes Mathematicae*, 323, 1993.

[84] V.Yu. Shavrukov. Isomorphisms of diagonalizable algebras. *Theoria*, 63(3):210–221, 1997.

[85] V.Yu. Shavrukov. Undecidability in diagonalizable algebras. *Journal of Symbolic Logic*, 62(1):79–116, 1997.

[86] C. Smoryński. ω-consistency and reflection. In *Colloque International de Logique (Colloq. Int. CNRS)*, pages 167–181. CNRS Inst. B. Pascal, Paris, 1977.

[87] C. Smoryński. The finite inseparability of the first order theory of diagonalizable algebras. *Studia Logica*, 41:347–349, 1982.

[88] C. Smoryński. *Self-Reference and Modal Logic.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[89] R.M. Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel Journal of Mathematics*, 28:33–71, 1976.

[90] R. Sommer. Transfinite induction within Peano arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 76(3):231–289, 1995.

[91] R. Statman. Bounds for proof-search and speed-up in the predicate calculus. *Annals of Mathematical Logic*, 15:225–287, 1978.

[92] S. Tupailo. Epsilon substitution method for Δ^1_1-CR: A constructive termination proof. *Logic Journal of the IGPL*, 11(3):367–377, 2003.

[93] A.M. Turing. System of logics based on ordinals. *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, 45:161–228, 1939.

[94] A. Visser. An overview of interpretability logic. In M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing, and M. Zakhariaschev, editors, *Advances in Modal Logic, v.1, CSLI Lecture Notes, No. 87*, pages 307–359. CSLI Publications, Stanford, 1998.

[95] A. Wilkie and J. Paris. On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas. *Annals of Pure and Applied Logic*, 35:261–302, 1987.

[96] D. Zambella. Shavrukov's theorem on the subalgebras of diagonalizable algebras for theories containing $I\Delta_0 + \exp$. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 35:147–157, 1994.