Позитивные фрагменты модальных логик

Святловский Михаил

13.05.2014

Научный руководитель — Беклемишев Л.Д.

1 Введение

Изучение позитивных фрагментов модальных логик мотивировано в основном тем, что эти менее богатые языки оказываются одновременно достаточно выразительны и при этом за счёт бедности языка относительно просты. Выразительность этого фрагмента проявляется, например, во многих связанных с интуиционизмом теориях, где нам не нужны негативные суждения. Простота, собственно, позволяет применять это в различных приложениях. Например, в работе Е.Дашкова [1] рассмотрено исчисление RC, соответствующее позитивному фрагменту логики GLP, и оно оказывается разрешимо за полиномиальное время (что неверно для GLP).

Базовые определения

Определение 1. (Строго) позитивная (полимодальная) формула — формула в пропозициональном языке с модальностями $\Diamond_i$ и $\Box_i = \neg\Diamond_i\neg$, $i = 1, 2, \ldots, m$, построенная из переменных и $\top$ с использованием только связок $\wedge$ и $\Diamond_i$.

Определение 2. Секвенция — формула вида $\alpha \to \beta$, где α и β — строго позитивные формулы.

Определение 3. Шкала Крипке — пара $(W, R_1, \ldots, R_m)$, где W — множество точек, R_i — бинарное отношение на W.

Определение 4. Модель Крипке — тройка $(W, R_1, \ldots, R_m, v)$, где $(W, R_1, \ldots, R_m)$ — шкала Крипке, $v : W \times Variables \to \{0, 1\}$ — означивание переменных.

Определение 5. Формула ϕ истинна в модели Крипке $\mathcal{M}$ в точке x (обозначение $\mathcal{M}, x \models \phi$) при выполнении одного из следующих условий:

$\phi = \top$

$\phi = p$, и $v(x, p) = 1$

$\phi = \neg\psi$, и $\mathcal{M}, x \not\models \psi$

$\phi = \psi_1 \to \psi_2$, и $\mathcal{M}, x \not\models \psi_1$ или $\mathcal{M}, x \models \psi_2$

$\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$, и $\mathcal{M}, x \models \psi_1$ и $\mathcal{M}, x \models \psi_2$

$\phi = \Diamond_i\psi$, и $\exists y \in W : xR_iy$ и $\mathcal{M}, y \models \psi$

Определение 6. Формула ϕ истинна в модели Крипке $\mathcal{M}$ (обозначение $\mathcal{M} \models \phi$), если она истинна в любой точке $x \in W$.

Определение 7. Формула ϕ истинна в шкале Крипке (в классе шкал Крипке), если она истинна в любой модели Крипке, построенной для данной шкалы (для произвольной шкалы из данного класса).

Определение 8. Логика (множество формул) есть логика некоторого класса шкал, если для любой модальной формулы принадлежность этой логике равносильна истинности в данном классе шкал.

2 Позитивный фрагмент $S4_m$

Определим исчисление $S4_m^+$ для секвенций следующими аксиомами и правилами вывода:

1. $\alpha \to \alpha$, $\alpha \to \top$
2. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$, $\alpha \wedge \beta \to \beta$
3. $\Diamond_i\Diamond_i\alpha \to \Diamond_i\alpha$, $i = 1, 2, \ldots, m$
4. Если $\alpha \to \beta$, то $\Diamond_i\alpha \to \Diamond_i\beta$, $i = 1, 2, ..m$

5. Если $\alpha \to \beta$ и $\alpha \to \gamma$, то $\alpha \to \beta \wedge \gamma$

6. Если $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \gamma$, то $\alpha \to \gamma$

7. $\alpha \to \Diamond_i \alpha$, $i = 1, 2, ..m$

Если секвенция $\alpha \to \beta$ выводима в $S4^+_m$, будем обозначать это как $\vdash_{S4^+}$ $\alpha \to \beta$.
Определим каноническую модель $\mathcal{M}$ для $S4^+_m$ — тройку $(W, R_1, R_2, \ldots, R_m, v)$, для которой выполнены следующие условия:

1. W — множество теорий, состоящих из строго позитивных формул и замкнутых относительно вывода,
   т.е. $x \in W \Rightarrow (\forall \alpha : x \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \in x)$. Выводимость $x \vdash \alpha$ означает существование таких формул $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in x$,
   что $\vdash_{S4^+} \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \to \alpha$. В том числе, $x \vdash \alpha$, если $\vdash_{S4^+} \top \to \alpha$, поскольку $\bigwedge \emptyset = \top$.

2. $R_1, R_2, \ldots, R_m$ — отношения на W, заданные для каждого i следующим образом: $xR_iy \Leftrightarrow \forall \alpha(\alpha \in y \Rightarrow \Diamond_i \alpha \in x)$.

3. $v : W \times Variables \to \{0, 1\}$ — означивание переменных, определённое как $v(x, p) = 1 \Leftrightarrow p \in x$.

Лемма 1. *Для любых строго позитивной формулы α и теории $x \in W$ выполнено $\alpha \in x$ (или, что то же, $x \vdash \alpha$) тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}, x \models \alpha$.*

Доказательство. Проведём индукцию по построению формулы α:

- Если $\alpha = p$, то требуемое утверждение выполнено согласно определению означивания переменных.

- Если $\alpha = \top$, то $\mathcal{M}, x \models \alpha$ по определению. С другой стороны, $\top$ выводится в любой теории, поскольку $\vdash_{S4^+} \top \to \top$ (аксиома 1).

- Если $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, то $\mathcal{M}, x \models \alpha \Leftrightarrow$ (по определению)$\mathcal{M}, x \models \alpha_1$ и $\mathcal{M}, x \models \alpha_2 \Leftrightarrow$ (по предположению индукции)$\alpha_1, \alpha_2 \in x \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2 \in x$. Последняя равносильность выполнена, так как $\{\alpha_1, \alpha_2\} \vdash \alpha_1 \wedge \alpha_2$ по аксиоме 1 и $\{\alpha_1 \wedge \alpha_2\} \vdash \alpha_1, \alpha_2$ по аксиоме 2.

- Если $\alpha = \Diamond_i \alpha_1$ (для произвольного i), то $\mathcal{M}, x \models \alpha \Leftrightarrow$ (по определению) $\exists y \in W : xR_iy$ и $\mathcal{M}, y \models \alpha_1 \Leftrightarrow$ (по предположению индукции) $\exists y \in W : xR_iy$ и $\alpha_1 \in y$. Последнее равносильно тому, что $\Diamond \alpha_1 \in x$:
  ($\Rightarrow$) из определения отношения R_i;
  ($\Leftarrow$) положим y равным дедуктивному замыканию α_1,
  т.е. $y = \{\beta | \vdash_{S4^+} \alpha_1 \to \beta\}$. По аксиоме 1 получаем, что $\alpha_1 \in y$. Также выполнено свойство xR_iy, поскольку для любой позитивной формулы β имеем: если $\beta \in y$, то $\vdash_{S4^+} \alpha_1 \to \beta$; согласно правилу вывода 4, из этого следует, что $\vdash_{S4^+} \Diamond_i \alpha_1 \to \Diamond_i \beta$. Поскольку $\Diamond_i \alpha_1 \in x$, то $\Diamond_i \beta \in x$.

Из леммы 1 получаем

Предложение 1. *Секвенция $\alpha \to \beta$ выводима в $S4^+_m$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Если для произвольной теории $x \in W$ верно $\mathcal{M}, x \models \alpha$, то (по лемме 1) $x \vdash \alpha$. Это означает, что для некоторых формул $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in x$ выводимо $\bigwedge_{i=1}^n \gamma_i \to \alpha$, или что выводимо $\top \to \alpha$. По правилу вывода 6 (силлогизм) получаем, что выводимо соответственно $\bigwedge_{i=1}^n \gamma_i \to \beta$ или $\top \to \beta$. Значит, $x \vdash \beta$, откуда (по лемме 1) следует $\mathcal{M}, x \models \beta$. Следовательно, $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$.
($\Leftarrow$) От противного: пусть $\alpha \to \beta$ не выводится в $S4^+$. Дедуктивное замыкание α является теорией в модели $\mathcal{M}$, т.е. соответствует некоторому $x \in W$, но наше предположение означает, что $\beta \notin x$. Согласно лемме, $\mathcal{M}, x \not\models \beta$, следовательно, $\mathcal{M}, x \not\models \alpha \to \beta$.

Лемма 2. *Каноническая модель $\mathcal{M}$ транзитивна и рефлексивна (т.е. транзитивно и рефлексивно каждое из отношений R_i этой шкалы).*

Доказательство. Проверим транзитивность. Пусть $x, y, z \in W$ — произвольные теории, такие что xR_iy и yR_iz. Докажем, что xR_iz : если $\alpha \in z$ (где α — произвольная позитивная формула), то $\Diamond_i \alpha \in y$ и, следовательно, $\Diamond_i \Diamond_i \alpha \in x$. По аксиоме 3 и условию о дедуктивной замкнутости x выполнено $\Diamond_i \alpha \in x$, что и требовалось.
Проверим рефлексивность: пусть $x \in W$ — произвольная теория, α — произвольная позитивная формула, и $\alpha \in x$. Тогда по аксиоме 7 имеем $\Diamond_i \alpha \in x$, то есть xR_ix.

Теорема 1. *Для любых позитивных формул* $\alpha, \beta \vdash_{S4^+} \alpha \to \beta$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash_{S4} \alpha \to \beta$.

Доказательство. В одну сторону тривиально, так как аксиомы и правила вывода $S4_m^+$ суть просто "перевод" соответствующих аксиом и правил вывода $S4_m$ на позитивный язык. Иными словами, любой вывод в $S4_m^+$ является также корректным выводом в $S4_m$.
В другую сторону: если $\vdash_{S4} \alpha \to \beta$, то $\alpha \to \beta$ истинно в любой транзитивной и рефлексивной модели Крипке (в частности, в $\mathcal{M}$), поэтому $\vdash_{S4^+} \alpha \to \beta$.

Таким образом, данное исчисление аксиоматизирует в точности позитивный фрагмент $S4_m$.

Теорема 2. *Любая невыводимая в* $S4_m^+$ *секвенция опровергается конечной транзитивной моделью (и, таким образом,* $S4_m^+$ *разрешима).*

Доказательство. Необходимо перестроить каноническую модель. Пусть Φ — некоторое конечное множество формул (которое мы можем для конкретных целей определить различными способами), замкнутое относительно взятия подформул и содержащее $\top$.

1. Новое W — множество теорий, являющихся подмножествами Φ и замкнутых относительно вывода внутри Φ, т.е., если $\vdash_{S4^+} \top \to \beta$ или $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in x$ и $\vdash_{S4^+} \bigwedge_{i=1}^n \alpha_i \to \beta$, причём $\beta \in \Phi$, то $\beta \in x$.

2. Новые отношения R_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$: $xR_iy \Leftrightarrow$ для любой позитивной формулы α выполнено (1) $\alpha \in y$ & $\Diamond_i\alpha \in \Phi \Rightarrow \Diamond_i\alpha \in x$ и (2) $\Diamond_i\alpha \in y \Rightarrow \Diamond_i\alpha \in x$.

3. Определение означивания переменных v не меняется.

Лемма 3. *Новая шкала* $(W, R_1, R_2, \ldots, R_m)$ *транзитивна и рефлексивна.*

Доказательство. Проверим, что из условия xR_iy & yR_iz следует xR_iz (для произвольных $x, y, z \in W$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$). Для этого проверим оба свойства для произвольной позитивной формулы α:

(1) Если $\alpha \in z$ и $\Diamond_i\alpha \in \Phi$, то по свойству (1) отношения yR_iz выполнено $\Diamond_i\alpha \in y$. Тогда по свойству (2) отношения xR_iy имеем $\Diamond_i\alpha \in x$.

(2) Если $\Diamond_i\alpha \in z$, то по свойству (2) отношений yR_iz и xR_iy получаем $\Diamond_i\alpha \in y$ и $\Diamond_i\alpha \in x$.

Проверим в тех же терминах свойство xR_ix:

(1) Если $\alpha \in x$ и $\Diamond_i\alpha \in \Phi$, то $x \vdash \Diamond_i\alpha$ (по аксиоме 7) и $\Diamond_i\alpha \in x$.

(2) Если $\Diamond_i\alpha \in x$, то, очевидно, $\Diamond_i\alpha \in x$.

Лемма 4. *Формула $\alpha \in \Phi$ принадлежит теории $x \in W$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}, x \models \alpha$.*

Доказательство. Индукция по построению формулы α:

- Случаи $\alpha = \top$ и $\alpha = p$ разбираются аналогично лемме 1.
- Если $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, то $\mathcal{M}, x \models \alpha \Leftrightarrow$ (по определению) $\mathcal{M}, x \models \alpha_1$ и $\mathcal{M}, x \models \alpha_2 \Leftrightarrow$ (по предположению индукции) $\alpha_1, \alpha_2 \in x$. Так как $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Phi$, то и $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$. Значит, условия $\alpha_1, \alpha_2 \in x$ и $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in x$ равносильны.
- Если $\alpha = \Diamond_i\alpha_1$ (для произвольного i), то $\alpha_1 \in \Phi$. Поэтому $\mathcal{M}, x \models \alpha \Leftrightarrow$ (по определению) $\exists y \in W : xR_iy$ и $\mathcal{M}, y \models \alpha_1 \Leftrightarrow$ (по предположению индукции) $\exists y \in W : xR_iy$ и $\alpha_1 \in y$. Последнее равносильно тому, что $\Diamond\alpha_1 \in x$:
  ($\Rightarrow$) из определения отношения R_i (условие (1));
  ($\Leftarrow$) положим y равным дедуктивному замыканию $\{\alpha_1\}$ относительно Φ, т.е. $y = \{\beta \in \Phi \mid \vdash_{S4^+} \alpha_1 \to \beta\}$. Тогда (по аксиоме 1) $\alpha_1 \in y$. Проверим, что xR_iy:

  (1) если $\beta \in y$ и $\Diamond_i\beta \in \Phi$, то (по определению теории y) выводимо $\alpha_1 \to \beta$. Тогда выводимо $\Diamond_i\alpha_1 \to \Diamond_i\beta$ (правило вывода 4), следовательно, $\Diamond_i\beta \in x$.

  (2) если $\Diamond_i\beta \in y$, то $\Diamond_i\beta \in \Phi$, и выводимо $\alpha_1 \to \Diamond_i\beta$. Значит, выводимо $\Diamond_i\alpha_1 \to \Diamond_i\Diamond_i\beta$. По аксиоме 3 выводимо $\Diamond_i\Diamond_i\beta \to \Diamond_i\beta$. Применяя правило силлогизма, получаем выводимость $\Diamond_i\alpha_1 \to \Diamond_i\beta$. Поскольку $\Diamond_i\alpha_1 \in x$, то $\Diamond_i\beta \in x$, что и требовалось.

Теперь можно завершить доказательство теоремы 2: для секвенции $\alpha \to \beta$ рассмотрим новую модель, построенную относительно

$$\Phi = \{\top\} \cup Subformulas(\alpha) \cup Subformulas(\beta).$$

Поскольку Φ конечно, рассматриваемая модель тоже будет конечна. В ней есть теория $x = \Phi \cap \{\gamma \mid \vdash_{S4^+} \alpha \to \gamma\}$. Как мы знаем из леммы 4, выводимость $\alpha \to \beta$ в $S4^+_m$ равносильна тому, что $\mathcal{M}, x \models \beta$, то есть выводимость любой секвенции можно проверить за конечное время.

3 Позитивный фрагмент $S5_m$

В том же языке секвенций определим исчисление $S5^+_m$:

1-7. Аксиомы и правила вывода $S4^+_m$

8. $\Diamond_i\alpha \wedge \Diamond_i\beta \to \Diamond_i(\alpha \wedge \Diamond_i\beta)$, $i = 1, 2, ..m$

Определим следующую модель Крипке $\mathcal{M} = (W, R_1, R_2, \ldots, R_m, v)$:

- W — множество теорий, состоящих из позитивных формул и замкнутых относительно вывода в $S5^+$,
  то есть $x \in W \Rightarrow (\forall\alpha : x \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \in x)$. Выводимость $x \vdash \alpha$ теперь означает существование позитивных формул $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in x$, таких что $\vdash_{S5^+} \bigwedge_{i=1}^n \alpha_i \to \alpha$. В том числе, $x \vdash \alpha$, если $\vdash_{S5^+} \top \to \alpha$, поскольку $\bigwedge \emptyset = \top$.

- Для любых $x, y \in W$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ выполнено:
  $xR_iy \Leftrightarrow \forall\alpha(\Diamond_i\alpha \in x \Leftrightarrow \Diamond_i\alpha \in y)$. Сразу отметим, что отношение R_i есть отношение эквивалентности.

- Для любой теории $x \in W$ и переменной p выполнено $v(x, p) = 1 \Leftrightarrow p \in x$.

Лемма 5. *Для любой позитивной формулы α и точки $x \in W$ выполнено $\mathcal{M}, x \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in x$.*

Доказательство. Индукция по построению формулы α:

- Случаи $\alpha = p$, $\alpha = \top$, $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ разбираются точно так же, как и в лемме 1.

- Если $\alpha = \Diamond_i \alpha_1$ (для произвольного i), то $\mathcal{M}, x \models \alpha \Leftrightarrow$(по определению) $\exists y \in W : xR_iy$ и $\mathcal{M}, y \models \alpha_1 \Leftrightarrow$(по предположению индукции) $\exists y \in W : xR_iy$ и $\alpha_1 \in y$. Последнее равносильно тому, что $\Diamond_i \alpha_1 \in x$:
(⇒) Если $\alpha_1 \in y$, то по аксиоме 7 $\Diamond_i \alpha_1 \in y$. Значит, $\Diamond_i \alpha_1 \in x$, поскольку xR_iy;
(⇐) Положим y равным дедуктивному замыканию множества

$$\{\alpha_1\} \cup \{\Diamond_i \beta | \Diamond_i \beta \in x\}.$$

Докажем, что xRy : если $\Diamond_i \beta \in x$, то $\Diamond_i \beta \in y$ по определению и аксиоме 1.
Обратно, если $\Diamond_i \beta \in y$, то для некоторых $\Diamond_i \beta_1, \Diamond_i \beta_2, \ldots, \Diamond_i \beta_n \in x$ выводимо $\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j \to \Diamond_i \beta$. Это означает (по правилу вывода 4), что выводимо $\Diamond_i(\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j) \to \Diamond_i \Diamond_i \beta$. Покажем, что в $S5_m^+$ выводимо $\Diamond_i \alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j \to \Diamond_i(\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j)$. Это удобно показать с помощью индукции по n:

  - Если $n = 0$, то данное утверждение есть аксиома 1.
  - Если $n = 1$, то данное утверждение есть аксиома 8.
  - Если $n > 1$, то в $S5_m^+$ выводимо:
    - $\Diamond_i \alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j \to \Diamond_i \alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} \Diamond_i \beta_j \wedge \Diamond_i \beta_n$;
    - $\Diamond_i \alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} \Diamond_i \beta_j \wedge \Diamond_i \beta_n \to \Diamond_i(\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} \Diamond_i \beta_j) \wedge \Diamond_i \beta_n$ (по предположению индукции);
    - $\Diamond_i(\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} \Diamond_i \beta_j) \wedge \Diamond_i \beta_n \to \Diamond_i(\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} \Diamond_i \beta_j \wedge \Diamond_i \beta_n)$ (аксиома 8);
    - $\Diamond_i(\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-1} \Diamond_i \beta_j \wedge \Diamond_i \beta_n) \to \Diamond_i(\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j)$;
    - $\Diamond_i \alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j \to \Diamond_i(\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j)$ (силлогизм из всех предыдущих).

Формулы $\Diamond_i \alpha_1, \Diamond_i \beta_1, \Diamond_i \beta_2, \ldots, \Diamond_i \beta_n$ принадлежат теории x. Значит, $x \vdash \Diamond_i \alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j$. Отсюда следует, что $x \vdash \Diamond_i(\alpha_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^n \Diamond_i \beta_j)$, значит, $x \vdash \Diamond_i \Diamond_i \beta$. Поскольку $\Diamond_i \Diamond_i \beta \to \Diamond_i \beta$ (аксиома 3), то $\Diamond_i \beta \in x$. Итак, xR_iy и $\alpha_1 \in y$, следовательно, $\mathcal{M}, x \models \Diamond_i \alpha_1$.

Аналогично рассуждениям для $S4_m^+$ получаем

Предложение 2. *Секвенция $\alpha \to \beta$ выводима в $S5_m^+$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \models \alpha \to \beta$.*

Теорема 3. *Для любых позитивных формул α, β выводимость $\alpha \to \beta$ в $S5_m^+$ равносильна выводимости $\alpha \to \beta$ в $S5_m$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Достаточно доказать, что формулу $\Diamond_i\alpha \wedge \Diamond_i\beta \to \Diamond_i(\alpha \wedge \Diamond_i\beta)$ можно вывести в $S5_m$. Вместо предъявления вывода воспользуемся тем, что $S5_m$ — логика всех шкал Крипке $(W, R_1, \ldots, R_m)$, где все R_i — отношение эквивалентности, и докажем, что эта формула истинна в данном классе шкал. Пусть фиксирована произвольная модель Крипке $\mathcal{M} = (W, R_1, R_2, \ldots, R_m, v)$ и $x \in W$. Если $\mathcal{M}, x \models \Diamond_i\alpha \wedge \Diamond_i\beta$, то существуют (не обязательно различные) теории y и z из W, такие что xR_iy и $\mathcal{M}, y \models \alpha$, а также xR_iz и $\mathcal{M}, z \models \beta$. Поскольку R_i — отношение эквивалентности, то yR_iz. Следовательно, $\mathcal{M}, y \models \Diamond_i\beta$. Значит, $\mathcal{M}, x \models \Diamond_i(\alpha \wedge \Diamond_i\beta)$, что и требовалось.
($\Leftarrow$) Докажем от противного. Если секвенция $\alpha \to \beta$ не выводима в $S5_m^+$, то $\mathcal{M} \not\models \alpha \to \beta$. Модель $\mathcal{M}$ транзитивна, рефлексивна и симметрична, поэтому $\alpha \to \beta$ не может быть выведена в $S5_m$.

Теорема 4. *Любая невыводимая в $S5_m^+$ секвенция опровергается конечной транзитивной и рефлексивной моделью (и, таким образом, $S5_m^+$ разрешима).*

Доказательство. Зафиксируем некоторое конечное множество позитивных формул Φ, содержащее $\top$ и замкнутое относительно взятия подформул, и перестроим модель Крипке $(W, R_1, R_2, \ldots, R_m, v)$:

- В новое W входят теории, дедуктивно замкнутые в $S5^+$ относительно Φ, т.е., если $x \in W$ и $x \vdash_{S5^+} \alpha$, причём $\alpha \in \Phi$, то $\alpha \in x$.
- Определения отношений R_i и означивания переменных v не изменяются.

Для новой модели (обозначим её $\overline{\mathcal{M}} = (\overline{V}, \overline{R_1}, \overline{R_2}, \ldots, \overline{R_m}, \overline{v})$) выполняется

Лемма 6. *Если α — произвольная формула из Φ, $\overline{x} \in \overline{W}$ — произвольная теория, то $\alpha \in \overline{x}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\mathcal{M}}, \overline{x} \models \alpha$.*

Доказательство. Для каждого $\overline{x}$ из $\overline{W}$ найдётся такая теория $x \in W$, что $\overline{x} = x \cap \Phi$. Действительно, $x = \{\beta | \, \overline{x} \vdash_{S5^+} \beta\}$. Если $\alpha \in \Phi$, то

$\alpha \in \overline{x} \Leftrightarrow \alpha \in x \Leftrightarrow \mathcal{M}, x \models \alpha \Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}, \overline{x} \models \alpha$. Предпоследняя равносильность вытекает из леммы 5, последнюю равносильность докажем индукцией по построению α:

- Случаи $\alpha = \top$ и $\alpha = p$ тривиальны, поскольку означивание переменных при переходе от $\mathcal{M}$ к $\overline{\mathcal{M}}$ не изменилось.
- Если $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, то $\mathcal{M}, x \models \alpha \Leftrightarrow \mathcal{M}, x \models \alpha_1$ и $\mathcal{M}, x \models \alpha_2 \Leftrightarrow$ (предположение индукции) $\overline{\mathcal{M}}, \overline{x} \models \alpha_1$ и $\overline{\mathcal{M}}, \overline{x} \models \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}, \overline{x} \models \alpha$.
- Если $\alpha = \Diamond_i \alpha_1$, то $\mathcal{M}, x \models \alpha \Leftrightarrow \exists y \in W : xR_iy$ и $\mathcal{M}, y \models \alpha_1 \Leftrightarrow$ (предположение индукции и тот факт, что R_i не изменялось) $\exists \overline{y} \in \overline{W} : \overline{x}\overline{R_i}\overline{y}$ и $\overline{\mathcal{M}}, \overline{y} \models \alpha_1 \Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}, \overline{x} \models \alpha$.

Теперь закончим доказательство теоремы 4: для секвенции $\alpha \to \beta$, выводимость которой нас интересует, положим

$$\Phi = \{\top\} \cup Subformulas(\alpha) \cup Subformulas(\beta).$$

Поскольку в модели Крипке для такого (конечного) множества Φ существует теория $\overline{x} = \Phi \cap \{\gamma | \alpha \vdash_{S5^+} \gamma\} \in \overline{W}$ и выполнена лемма 6, достаточно проверить истинность β в точке $\overline{x}$ данной модели. В силу конечности модели $\overline{\mathcal{M}}$ это делается за конечное время.

4 Позитивный фрагмент K4.3

Определим (одномодальное) исчисление $K4^+$:

1. $\alpha \to \alpha$, $\alpha \to \top$
2. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$, $\alpha \wedge \beta \to \beta$
3. $\Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$
4. Если $\alpha \to \beta$, то $\Diamond\alpha \to \Diamond\beta$
5. Если $\alpha \to \beta$ и $\alpha \to \gamma$, то $\alpha \to \beta \wedge \gamma$
6. Если $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \gamma$, то $\alpha \to \gamma$

Данное исчисление аксиоматизирует позитивный фрагмент K4. Интерес представляет аксиоматизация позитивного фрагмента K4.3, поскольку дополнительная аксиома этой логики, (.3) —
$\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta \to \Diamond(\alpha \wedge \beta) \vee \Diamond(\Diamond\alpha \wedge \beta) \vee \Diamond(\Diamond\beta \wedge \alpha)$ — не "транслируется" в позитивный язык.
Пусть $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — произвольные позитивные формулы, причём $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ не содержат $\Diamond$; Φ — произвольное конечное множество формул. Пусть формулы $A_k(\Phi, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ обозначают следующее: $A_1(\Phi) = \gamma_1 \wedge \bigwedge_{\phi \in \Phi} \Diamond\phi, A_k(\Phi) = \gamma_k \wedge \Diamond A_{k-1}(\Phi)$, $k = 2, \ldots, n$. Добавим следующие правило вывода и аксиому:

7. Если $A_n(\{\alpha \wedge \beta\}) \to \delta, A_n(\{\Diamond\alpha \wedge \beta\}) \to \delta$ и $A_n(\{\alpha \wedge \Diamond\beta\}) \to \delta$, то $A_n(\{\alpha\}) \wedge A_n(\{\beta\}) \to \delta$
8. $A_n(\{\alpha\}) \wedge A_n(\{\beta\}) \to A_n(\{\alpha, \beta\})$

Теорема 5. *Исчисление (1-8) аксиоматизирует $K4.3^+$.*

Доказательство. Проверим, что новые правила (7) и (8) верны в классе линейных шкал: рассмотрим произвольную шкалу Крипке (W, R).
Посылка аксиомы (8), верная в вершине z_n, означает существование вершин $x_n = z_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ и $y_n = z_n, y_{n-1}, \ldots, y_1$ таких, что
$x_{i+1}Rx_i$, $x_i \models \gamma_i, y_{i+1}Ry_i, y_i \models \gamma_i$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$;
$x_1 \models \Diamond\alpha, y_1 \models \Diamond\beta$. В силу линейности шкалы выполнено хотя бы одно из трёх: $x_1 = y_1, x_1Ry_1, y_1Rx_1$. Пусть $z_i = x_i$ в первых двух случаях, $z_i = y_i$ в последнем случае для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда в силу транзитивности $z_1 \models \gamma_1 \wedge \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta$, и последовательность вершин $\{z_i\}_{i=1}^n$ обеспечивает заключение аксиомы (8). Заметим также, что в этой аксиоме выполнено следствие в обратную сторону.
Аксиому (7) для краткости запишем так: если $\epsilon_1 \to \delta, \epsilon_2 \to \delta, \epsilon_3 \to \delta$, то $\epsilon_4 \to \delta$. Достаточно доказать, что $\epsilon_4 \to \epsilon_1 \vee \epsilon_2 \vee \epsilon_3$. Так же, как в доказательстве аксиомы (8), рассмотрим последовательность вершин $\{z_i\}_{i=1}^n$ такую, что $z_n \models \epsilon_4, z_1 \models \gamma_1 \wedge \Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta$. Из аксиомы (.3) следует, что $z_1 \models \gamma_1 \wedge \Diamond(\alpha \wedge \beta) \vee \Diamond(\Diamond\alpha \wedge \beta) \vee \Diamond(\Diamond\beta \wedge \alpha)$, и, следовательно, $z_n \models \epsilon_1 \vee \epsilon_2 \vee \epsilon_3$, что и требовалось.

Лемма 7. *Для любой позитивной формулы α существуют формулы $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ такие, что все $T[\alpha'_i]$ линейны и в $K4.3^+$ выводится $\alpha'_i \to \alpha$ (для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). А также, если в $K4.3^+$ выводится $\alpha'_i \to \gamma$ для всех i, то выводится $\alpha \to \gamma$.*

Доказательство. Рассмотрим набор формул (или, что то же самое, соответствующих канонических деревьев), состоящий изначально из одной

формулы α. Для каждой вершины v обозначим за $h(v)$ её высоту (количество рёбер, соединяющих её с корнем дерева); также введём обозначение $d(v)$, равное числу непосредственных R-потомков v в случае, когда их хотя бы 2, и $d(v) = 0$ иначе.
Для конкретного дерева T "операция" выглядит так: выберем среди всех его вершин с $d(v) > 0$ такую v, которая имеет минимальное значение $h(v)$, и выберем среди её непосредственных R-потомков две произвольные вершины x, y. Удалим из набора дерево T и добавим три новых дерева T_1, T_2, T_3, которые отличаются от удалённого только расположением вершин v, x, y, но не наборами переменных, верных в каждой вершине. В дереве T_1 выполнено $vRx, vRy, x = y$, в T_2 — vRx, xRy, в T_3 — vRy, yRx, причём здесь R обозначает непосредственных R-потомков.
Данная операция корректна: если за ϕ обозначить формулу, соответствующую дереву T, за ϕ_i — соответсвующую дереву T_i, то несложно видеть, что в $K4.3^+$ выводится $\phi_i \to \phi$, и, если $\phi_i \to \delta$ для всех i, то $\phi \to \delta$. Последнее верно в силу аксиом (7) и (8) (из того, что мы выбираем вершину с минимальным $h(v)$, следует, что "ниже" её ветвлений нет, и это как раз соответствует замечанию о том, что $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ не содержат $\Diamond$).
Пусть n обозначает количество вершин в дереве $T[\alpha]$, $\mathbb{T}$ — множество деревьев на каком-то шаге алгоритма. Для каждого дерева T рассмотрим ординал $B(T) = \sum_{v \in T} d(v)\omega^{n-h(v)+1}$ и индикатор $b(T) = \begin{cases} 1, & B(T) > 0 \\ 0, & B(T) = 0 \end{cases}$.
Определение корректно, так как ни одно получаемое алгоритмом дерево не содержит больше вершин, чем исходное, и степень при ω таким образом положительна.
Заметим, что при замене T на T_1, T_2, T_3 степень вершины $d(v)$, играющая роль коэффициента при максимальной степени ω, уменьшается, а новых ветвлений на той же высоте не возникает, т.е. $B(T) > B(T_i)$. При этом $B(T) = 0 \Leftrightarrow b(T) = 0 \Leftrightarrow T$ линейно. Теперь рассмотрим ординал $Z = \sum_{T \in \mathbb{T}} b(T)\omega^{B(T)}$. Если на каждом шаге алгоритма применять операцию, определенную выше, к дереву с максимальным значением $B(T)$, то ординал Z на каждом шаге будет уменьшаться, причём $Z = 0 \Leftrightarrow$ все деревья в наборе линейны. Это доказывает, что алгоритм завершит свою работу, и полученный набор деревьев соответствует искомому набору формул α'_i.

Теперь можно доказать полноту исчисления в теореме 5: пусть $K4.3 \vdash \alpha \to \beta$. Рассмотрим набор позитивных формул α'_i, полученный из леммы 7. Для каждого $i \in \{1 \ldots n\}$ имеем:

- Поскольку $K4.3^+ \subset K4.3$, то $K4.3 \vdash \alpha'_i \to \alpha$ и $K4.3 \vdash \alpha'_i \to \beta$.

- Поскольку $T[\alpha_i']$ линейно и $K4.3$ есть логика класса всех линейных шкал, то $T[\alpha_i'], r \models \beta$.
- Поскольку $T[\alpha_i']$ есть транзитивная модель, то $K4^+ \vdash \alpha_i' \to \beta$.
- Поскольку $K4^+ \subset K4.3^+$, то $K4.3^+ \vdash \alpha_i' \to \beta$.

Следовательно, $K4.3^+ \vdash \alpha \to \beta$, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Е.В.Дашков. **О позитивном фрагменте полимодальной логики GLP**. Математические заметки, 91(3):331-336, 2012
2. A.Chagrov, M.Zakharyaschev, **Modal logic**. Oxford Logic Guides, 35, Clarendon Press, Oxford, 1997.
3. Н.К.Верещагин, А.Шень. **Языки и исчисления**. Москва, МЦНМО, 2000
4. L.Beklemishev, **Positive probability logic for uniform reflection principles**, Ann. Pure Appl. Logic, 2013