Задачи к спецкурсу
Теоремы Гёделя о неполноте
01.05.2016

1. (1) Докажите, что существует подмножество $\mathbb{N}$, выразимое Π_1-формулой, но не выразимое никакой Σ_1-формулой. И наоборот.

2. (2) Для всякого ли перечислимого множества существует машина Тьюринга, перечисляющая его элементы в порядке возрастания?

3. (2) Приведите пример определимого в $\mathbb{N}$ множества, для которого ни оно само, ни его дополнение не являются перечислимыми.

4. (2) Докажите, что если (тотальная) функция f Σ_1-определима в $\mathbb{N}$, то такова и функция $f(n, x) := f(f(\ldots f(x) \ldots))$ (n раз).

5. (1) Может ли непротиворечивая теория доказывать собственную *противоречивость*?

6. (1) Привести пример арифметической формулы $\varphi(x)$ такой, что
   (a) Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\underline{n})$;
   (b) $\mathsf{PA} \nvdash \forall x \varphi(x)$.

7. (2) Приведите пример арифметической теории T, содержащей PA, для которой теория $U := T + \mathsf{Con}_T$ непротиворечива, а $T + \mathsf{Con}_U$ противоречива.

8. Пусть $\Box(x)$ удовлетворяет условиям Лёба в PA.
   (a) (2) Пусть $m = \ulcorner 0 = 0 \urcorner$. Найти все (с точностью до доказуемой эквивалентности в PA) неподвижные точки формулы $\varphi(x) := (x = \underline{m})$, т.е. такие формулы ψ, что
   $$\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$
   (b) (3) Докажите, что формула $\Box(x)$ имеет единственную (с точностью до доказуемой эквивалентности в PA) неподвижную точку. То же для $\neg\Box(x)$. Найдите эти неподвижные точки.

9. (3) Докажите, что существует тотальная вычислимая функция $f(x)$ такая, что $\mathsf{PA} \nvdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$ для любой Σ_1-формулы $\varphi(x, y)$, выражающей $f(x) = y$ в $\mathbb{N}$. (*Указание:* рассмотрите перечисление всех доказательств в PA и примените канторовскую диагонализацию.)

10. (3) Докажите, что в PA доказуемо:
$$\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}} \leftrightarrow \mathsf{Con}_{\mathsf{PA}+\neg\mathsf{Con}_{\mathsf{PA}}}.$$

11. (Неподвижная точка Россера) Пусть T — перечислимое расширение PA и формула $\mathsf{Prf}_T(y,x) \in \Delta_1$ выражает[1] утверждение *y есть гёделев номер вывода формулы с номером x в теории T*, при этом $\Box_T(x) = \exists y\, \mathsf{Prf}_T(y,x)$ удовлетворяет условиям Лёба. Рассмотрим неподвижную точку

$$\mathsf{PA} \vdash \rho \leftrightarrow \exists x\,(\mathsf{Prf}_T(x, \ulcorner \neg\rho \urcorner) \wedge \forall y < x\, \neg \mathsf{Prf}_T(y, \ulcorner \rho \urcorner).$$

1) (4) Докажите, что формула ρ не доказуема и не опровержима в T, если T непротиворечива.

2) (4) Докажите, что $\mathsf{PA} \vdash \Box_T\rho \to \Box_T\bot$ и $\mathsf{PA} \vdash \Box_T\neg\rho \to \Box_T\bot$.

12. (3) Для данной теории T определим последовательность Тьюринга $T_0 := T$, $T_{n+1} := T_n + \mathsf{Con}_{T_n}$. Доказать, что $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Con}_{T_n} \leftrightarrow \neg\Box_T^{n+1}\bot$.

[1] Δ_1-формлуы — это формулы, эквивалентные в PA как Σ_1, так и Π_1-формуле.