Теория доказательств и формальная арифметика

Задачи и упражнения (часть 2)

Л.Д. Беклемишев

1. Проверить на выводимость в **GL** формулы:
   (a) $\Box\Box(p \to q) \land \Box p \to \Box\Box q$;
   (b) $\Box(\Box p \lor \Box q) \to (\Box\Box p \lor \Box\Box q)$.

2. Для данной теории T определим последовательность Тьюринга $T_0 = T$, $T_{n+1} = T_n + \mathsf{Con}_{T_n}$. Доказать следующий вариант теоремы Булоса: если формула Con_{T_n} следует из конъюнкции некоторых $n+1$ формул вида $\Box_T\varphi \to \varphi$, то верна и обратная импликация, т.е. каждая из этих формул следует из Con_{T_n}. (*Указание:* запишите это утверждение на языке логики доказуемости и установите выводимость соответствующей формулы в **GL**.)

3. Переведите следующие формулы в исчисление Тейта и постройте их выводы без сечения:
   (a) $(p \to q) \land (p \to \neg q) \to \neg p$;
   (b) $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$.

4. Докажите, что для каждой формулы φ в исчислении Тейта выводима без сечения секвенция $\{\varphi, \neg\varphi\}$.

5. Какой класс доказуемо тотальных вычислимых функций имеет теория $\mathsf{EA} + \mathsf{Con}_{\mathsf{EA}}$?

6. Доказать, что класс примитивно рекурсивных функций замкнут относительно ограниченного μ-оператора.

7. Доказать, что класс элементарных функций замкнут относительно оператора ограниченной примитивной рекурсии вида:
$$\begin{cases} f(0,a) & = & g(a) \\ f(n+1,a) & = & h(f(n,a),n,a) \\ f(n,a) & \leq & j(n,a), \end{cases}$$
где g, h, j – данные функции.

8. Доказать, что всякая примитивно рекурсивная функция мажорируется функцией вида $a(m,n)$ для некоторого m, где a – функция Аккермана:
$$\begin{cases} a(0,n) & = & n+1 \\ a(m+1,0) & = & a(m,1) \\ a(m+1,n+1) & = & a(m,a(m+1,n)) \end{cases}$$
То есть, для любой примитивно рекурсивной $f(\vec{x})$ найдётся m такое, что $\forall\vec{x}\, f(\vec{x}) \leq a(m, \max\vec{x})$.

9. (a) Выписать ограниченную формулу в EA, задающую отношение $2^x_n = y$, где $2^x_0 = x$ и $2^x_{n+1} = 2^{2^x_n}$.

   (b) Доказать, что $\mathsf{EA} \nvdash \forall n, x\, \exists y\ 2^x_n = y$.

   (c) Найти класс доказуемо тотальных вычислимых функций теории EA вместе с аксиомой $\forall n, x \exists y 2^x_n = y$.