Tentamen Uitwerkingen

Wiskunde voor AI

1. (a) Een equivalentierelatie is een relatie die transitief, reflexief en symmetrisch is.

   (b) Te bewijzen is dat R een equivalentie relatie is en dus transitief, reflexief en symmetrisch.

   Om te beginnen kunnen wij opmerken dat voor een zekere $i \in \mathbb{N}$ geldt dat $a_i = a_0$. Immers, X is eindig groot, maar de te genereren rij van elementen is oneindig. Stel dat het laatste element dat bereikt wordt voordat er een element dubbel bezocht wordt een zekere a_k is. We weten dan dat $a_{k+1} = f(a_k) = a_j$ voor een zekere $j < k$ waar a_j het element is dat het eerst herhaalt wordt. Nu moet wel gelden dat $a_j = a_0$, want anders zou gelden dat $f(a_k) = a_j = f(a_{j-1})$, maar op basis van de injectiviteit van functie f moet dan gelden dat $a_k = a_{j-1}$. We hadden echter net a_k gedefineerd als het laatste element voordat er herhaalt werd: een tegenspraak. Wanneer $a_j = a_0$ is er echter geen element a_{j-1} en is de tegenspraak niet te contrueren.

   Dit betekent dat een rij er ongeveer zo uitziet:

   $$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_0, a_1, \ldots$$

   Natuurlijk kan k ook 0 of 1 zijn, dat is de rij niets meer dan:

   $$a_0, a_0, a_0, \ldots \text{ of } a_0, a_1, a_0, a_1, \ldots$$

   Nu gaan we proberen transitiviteit, reflexiviteit en symmetrie aan te tonen van de gegeven relatie.

   Reflexiviteit:

   $$\forall x(xRx)$$

   Eigenlijk is reflexiviteit in het verhaal hierboven al aangetoond. Er hoeft namelijk alleen bewezen te worden dat ooit het beginpunt a_0 herhaalt wordt. Volgens de uitleg hierboven geldt $x_0 = x_{k+1}$ en dus: $\exists n \in \mathbb{N}(x = x_n)$

   Dat we niet weten wat $k+1$ is maakt niet uit. Het gaat er alleen om dat er zo'n k moet zijn.

   Transitiviteit:

   $$\forall x, y, z(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$$

Aanname: xRy en yRz voor willekeurige x, y, z. Te bewijzen: xRz.
xRy en $yRz \Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N}(y = x_n)$ en $\exists m \in \mathbb{N}(z = y_m)$
Vanuit x moeten er dus n stappen gedaan worden in de rij om in y te komen. Vanuit y kan weer in m stappen in z gekomen worden. Hieruit volgt dat $x_{n+m} = z$ en dus:
$\exists p \in \mathbb{N}(z = x_p)$ (Namelijk $p = m + n$.)
Uit $\exists p \in \mathbb{N}(z = x_p)$ volgt xRz en ons bewijs is compleet.
Symmetrie:

$$\forall x, y(xRy \Rightarrow yRx)$$

Aanname: xRy voor willekeurige x, y. Te bewijzen: yRx.
$xRy \Rightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N}(y = x_n)$
Stel dat er k verschillende elementen in de rij zitten die ontstaat uit x. Stel dat $y = x_j$ voor een zekere $j < (k+1)$. We weten dat zo'n j moet bestaan, want stel $j > k$, dan geldt $x_j = x_{(j \ mod \ k)}$ waar *mod* de modulo operator is en dan kunnen we (j *mod* k) in plaats van j kiezen. (Dus dat was je y eigenlijk al eerder in de rij tegen gekomen. We kiezen j dus zo, dat x_j het eerste voorkomen van y in de rij is. Daarom kunnen we stellen $j < (k+1)$.) We weten nu door het herhalende karater van de rij dat $x = x_0 = x_{k+1} = y_{k+1-j}$. Dus:
$\exists m \in \mathbb{N}(x = y_m)$ en dus ook:
yRx

2. (a) 10 mogelijkheden per cijfer en 26 mogelijkheden per letter maakt voor 1 volgorde: $10^4 \cdot 26^3$. Er zijn 7 boven 3 (of 7 boven 4, dat is hetzelfde) mogelijkheden voor de volgorde, dus in totaal:

$$10^4 \cdot 26^3 \cdot \binom{7}{3}$$

   (b) $10^4 \cdot 26^3$

3. Eerst bewijzen we een inductie basis ($n = 1$), daarna de inductie stap ($n \Rightarrow n+1$). Hieruit volgt dat het geldt voor alle n.

   Inductie Basis: $n = 1$:

$$g_1(x) = x^1 = x$$

$$g_1^{(1)}(x) = g_1'(x) = 1 = 1!$$

   Inductie Step: Aanname: $g_n^{(n)}(x) = n!$. Te bewijzen dat hieruit volgt: $g_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Hieronder herschrijven we $g_{n+1}^{(n+1)}(x)$ totdat we de inductiehypothese kunnen toepassen.

$$g_{n+1}(x) = x^{n+1}$$

Ik schrijf hieronder voor $g_p^{(q)}(x)$ ook $[x^p]^{(q)}$.

$$g_{n+1}^{(n+1)}(x) = [x^{n+1}]^{(n+1)}$$

Dit is hetzelfde als $n+1$ keer de afgeleide trekken van x^{n+1}, wat je natuurlijk ook kan doen door eerst 1 keer de afgeleide te trekken, en daarna nog n keer. Dat is wat met onderstaande notatie bedoeld wordt:

$$[[x^{n+1}]^{(1)}]^{(n)} = [(n+1) \cdot x^n]^{(n)}$$

De afgeleide van een functie $f(x) = a \cdot x^k$ (zoals in de opgave staat gegeven) als $f'(x) = a \cdot k \cdot x^{(k-1)}$. Of in andere woorden, stel $f(x) = a \cdot g(x)$ (met bovenstaand voorbeeld $g(x) = x^k$) dan geldt $f'(x) = a \cdot g'(x)$ en dus ook $f^{(n)}(x) = a \cdot g^{(n)}(x)$. Hieruit volgt:

$$[(n+1) \cdot x^n]^{(n)} = (n+1) \cdot [x^n]^{(n)} = (n+1) \cdot g_n^{(n)}(x)$$

Op basis van de inductie hypothese is dit gelijk aan $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

4. (a)

$$E(n) = 3.5 \cdot n$$

(b)

$$P(\text{"minstens 1 zes"}) = 1 - P(\text{"geen zes"}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(c)

$$1 - (\frac{5}{6})^n > 1/2$$

$$(\frac{5}{6})^n < 1/2$$

$$log_{(5/6)} 1/2 < n$$

$$3.802 < n$$

Dus bij $n = 4$ wordt de kans groter dan $1/2$. Natuurlijk kan je hier ook komen door gewoon verschillende n uit te proberen:

$$1 - (\frac{5}{6})^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} < \frac{1}{2}$$

$$1 - (\frac{5}{6})^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$$