

Wiskunde voor CKI

Tentamen

30.01.2004

- (a) Geef een definitie van equivalentierelatie.
(b) Gegeven is een verzameling $X = \{0, 1, \dots, n\}$ en een bijectieve functie $f : X \rightarrow X$. Ieder element $a \in X$ genereert een oneindige rij van elementen van X :

$$a_0 = a, \quad a_1 = f(a), \quad a_2 = f(a_1) = f(f(a)), \quad \text{etc.}$$

Definieer een binaire relatie R op X door

$$aRb \iff \exists n \in \mathbb{N} \ b = a_n.$$

Bewijs dat R een equivalentierelatie is.

- Stel je voor dat autokentekens uit drie letters en vier cijfers zijn gecombineerd. Bepaal het aantal mogelijke kentekens:
 - als de letters en cijfers in willekeurige volgorde mogen voorkomen;
 - als de letters alleen in de eerste, de tweede en de laatste posities kunnen voorkomen.
- De afgeleide van een functie $f(x) = a \cdot x^k$ is de functie $f'(x) = a \cdot k \cdot x^{k-1}$. Definieer met inductie de functies $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(0)}(x) = f(x); \quad f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x).$$

Voor de functies $g_n(x) = x^n$ bewijs met inductie: voor alle $n \in \mathbb{N}$, $g_n^{(n)}(x) = n!$.

- Beschouw n onafhankelijke worpen van een eerlijke dobbelsteen.
 - Bereken de verwachtingswaarde van de som van de uitkomsten (als functie van n).
 - Bereken de kans dat ten minste één uitkomst 6 is.
 - Bereken hoeveel keer de dobbelsteen gegooid moet worden, opdat de kans dat er ten minste één keer 6 wordt gegooid groter is dan $1/2$.