

Чл.-корр. РАН Л.Д. Беклемишев прочтёт годовой курс лекций

**Избранные вопросы теории доказательств:  
ограниченная арифметика**

для студентов 2–5 курса. Лекции пройдут по вторникам, с 16:45 до 18:20, в аудитории 14–05. Первая лекция состоится 30.10.08.

В этом году в курсе будут рассматриваться формальные арифметические теории, связанные с наиболее важными сложностными классами, известные под собирательным названием *ограниченная арифметика*. Исследование таких теорий важно как с точки зрения оснований математики (формализация понятия «эффективной» доказуемости), так и с точки зрения теории сложности вычислений (вопросы доказуемости нижних оценок, сложности пропозициональных выводов и др.). Ограниченная арифметика естественно возникает при исследовании моделей арифметики и общего понятия интерпретируемости для теорий первого порядка. В курсе будет изложено введение в эту тематику.

**Программа**

- Арифметика Пеано и система  $I\Delta_0$ . Нестандартные модели арифметики, начальные сегменты. Арифметическая иерархия.
- $\Delta_0$ -представимые функции в  $I\Delta_0$ . Теорема Париха (теоретико-модельное доказательство).
- Метод сколемизации, теорема Эрбрана. Консервативное бескванторное расширение  $I\Delta_0$ . Конструктивное доказательство теоремы Париха на основе теоремы Эрбрана.
- Схема ограниченности  $B\Sigma_1$ . Недоказуемость  $B\Sigma_1$  в  $I\Delta_0$  (и в теории всех истинных  $\Pi_2$ -предложений).
- Сложность вычислений. Классы P и NP. Полиномиальная иерархия, линейная иерархия по времени.
- Теорема Непомнящего. Теорема о совпадении класса  $\Delta_0$ -определимых языков и языков из линейной иерархии по времени. Сложностная характеристика  $\Delta_0$ -представимых функций в  $I\Delta_0$ .
- Арифметика  $S^1_2$  Басса и эквивалентная арифметика Феррейры. Рекурсия по подсловам. Теорема о совпадении класса полиномиально вычислимых функций с классом  $\Sigma^b_1$ -представимых функций в системе Феррейры.
- Пропозициональные исчисления («системы доказательств») для логики высказываний. Система Фреге, расширенная система Фреге, система резолюций. Проблема нижних оценок. Соответствие между пропозициональными исчислениями и фрагментами арифметики.
- Интерпретируемость. Метод Соловея сокращения начальных сегментов. Теории  $I\Delta_0 + \Omega_n$ . Вторая теорема Гёделя для ограниченной арифметики (теорема Пудлака).