Программа спецкурса Л.Д. Беклемишева

Избранные вопросы теории доказательств

1.05.2004

1. Формулмровка принципов Гудстейна, Гидры, Червя.

2. Теорема Рамсея (конечная, бесконечная версии). Принцип Париса–Харрингтона PH.

3. Вывод конечной т. Рамсея и принципа PH из бесконечной т. Рамсея. Доказательство бесконечной т. Рамсея для частного случая покраски пар натуральных чисел.

4. Вполне упорядоченные множества и ординалы. Доказательство теоремы о канторовской нормальной форме. Представление ординалов $<\epsilon_0$ как термов. Доказательство корректности принципа Гудстейна.

5. Вполне квазиупорядоченные множества (wqo), эквивалентные определения. Доказательства леммы Хигмэна и теоремы Крускала. Конечный вариант Фридмана теоремы Крускала (FKT).

6. Элементарная арифметика, арифметика Пеано PA. Их язык и аксиомы. Доказуемо тотальные вычислимые функции в данной теории. Определение и простейшие свойства.

7. Иерархия Харди. Характеризация доказуемо тотальных вычислимых функций в PA через иерархию Харди (без доказательства). Доказательство на этой основе независимости принципа Гудстейна.

8. Принципы медленного вполне-упорядочения SWO(ϵ_0) и примитивно рекурсивного вполне-упорядочения PRWO(ϵ_0) ординала ϵ_0. Вывод SWO(ϵ_0) из FKT, и вывод PRWO(ϵ_0) из SWO(ϵ_0). Следствие о независимости FKT от PA.

Задачи по курсу

1. Доказать, что всякая последовательность Гудстейна состоит из интервала неубывания вплоть до некоторого значения k, вслед за которым последовательность убывает по закону $f(x) = k - x$.

   Верно ли, что функция $f(n) =$ *количество вершин Червя на шаге* n обладает этим свойством?

2. Доказать корректность принципа Гидры с помощью изложенного на лекции приписывания ординалов $<\epsilon_0$.

3. (*) Доказать, что множество слов в алфавите $\{0, \ldots, n\}$ с отношением гэп-вложения $\leq_*$ есть wqo. Здесь

   $$x_1 \ldots x_n = \alpha \leq_* \beta \iff \exists \beta_1, \ldots, \beta_{n+1} : \beta = \beta_1 x_1 \beta_2 x_2 \ldots \beta_n x_n \beta_{n+1},$$

   где для всех $i \leq n$ слово β_i состоит из букв $\geq x_i$.

Указание: можно свести эту задачу к лемме Хигмэна, либо рассуждать непосредственно, воспользовавшись методом минимальной последовательности (как в доказательства леммы Хигмэна).

4. Вывести принцип Червя из результата предыдущей задачи, то есть показать, что последовательность Червя представляет собой плохую последовательность в смысле $\leq_*$.

Для сдачи спецкурса необходимо решить хотя бы две задачи, и побеседовать с преподавателем на одну (заранее выбранную) тему из программы.