Открытые вопросы, близкие к задачам экзамена

От данных в экзамене задач не очень далеко до вопросов, на которые никто не знает ответа. Вот, по запросам трудящихся, несколько открытых вопросов, связанных с задачами экзамена. Разумеется, решать эти вопросы или даже просто думать о них, совсем необязательно. Просто пример того, что на данный момент неизвестно науке. В основном это не то что бы фундаментальные и центральные вопросы науки, а скорее небольшие головоломки, решение которых может оказаться и простым, никем ранее незамеченным, а может потребовать и развития совершенно новых методов.

Задача 1: в своё время люди очень интересовались вопросом: как бы так «укротить» триангулированные категории, добавить какую-нибудь дополнительную структуру, чтобы меньше страдать от отсутствия единственности морфизма в аксиоме **TR3**, и вообще чтобы всё работало лучше. Последнее время обычно считают, что триангулированные категории — безнадёжное понятие, ничего их не улучшит, и надо изучать вместо них бесконечность-категории или dg-категории. Ну, совсем не все с этим согласны, и не факт, что это хоть в каком-то смысле верно, но много вопросов о поведении триангулированных категорий остались открыты до сих пор:

(a***) С самого появления в 1960-ых годах никто не знает, следует ли аксиома октаэдра **TR4** из прочих аксиом триангулированных категорий. Следует? (Моя чисто интуитивная оценка: наверное, не следует, и подходящий пример категории без аксиомы октаэдра в не очень далеком будущем построят, приспособив компьютер к перебору алгебраических структур в теории категорий...)

(b***) Что образует множество тех морфизмов между выделенными треугольниками, которые возможно продолжить до 3x3 диаграммы? Этим вопросом интересовался Ниман [1], один из главных современных специалистов по триангулированным категориям. Абелеву группу они не образуют, относительно композиции тоже не замкнуты. Есть ли вообще какие-то хорошие свойства?

Задача 2: тут поблизости, пожалуй, нет нерешённых задач, если не считать общие вопросы о классификации триангулированных подкатегорий с каким-нибудь свойствами в данной категории. Смотри, например, статью [2] Краузе и Стивенсона про классификацию подкатегорий в $D(\mathbb{P}^1)$ — у них, правда, речь о «больших» категориях, а не о D^b_{coh}.

Задача 3: сложно сказать, что считать близким вопросом к данному.

Задача 4: изучение нетривиальных эквивалентностей производных категорий — важный вопрос, и вокруг него много нерешённых задач. Например, можно посмотреть на теорию *сферических функторов* и родственные ей теории $\mathbb{P}$-функторов и т.п. Конкретных вопросов приводить не буду.

Задача 5: все эти генераторы — сильные, так как в категории с сильным генератором любой классический генератор — сильный (упражнение, но есть в записках шестой лекции). Будем называть скоростью порождения сильного генератора $G \in T$ наименьшее такое $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, что $\langle G \rangle_N = T$. (В статье [3] скорость порождения обозначают часиками). Какова скорость порождения генераторов из этой задачи?

Для пункта (a) ответ, насколько я помню, известен: на кривой рода $g > 0$ скорость порождения такой прямой суммы равна $4g$ (сейчас не могу найти ссылку, но, по-моему, так). Заметьте, что этот генератор *гораздо* медленнее и оптимального, построенного Орловым (там хватит одного конуса), и даже грубого генератора из утверждения Рукье, дающего общую оценку $\mathrm{rdim}(X) \leq 2\dim(X)$ для любого многообразия (в данном случае хватит двух конусов). Этот результат сложный, требует использования гомологической зеркальной симметрии. Чтобы понять, в чём может скрываться сложность, разберитесь в вычислении Орловым [4] размерности Рукье для кривых.

(e***) Верно ли, что на кривой этот генератор — самый медленный из возможных? Всегда ли чем «проще» генератор, тем он медленнее? Верно ли, что на фиксированном многообразии X существует самый медленный генератор, или могут существовать сколь угодно медленные?

(f***) Какова скорость порождения генератора из пункта (b)? Я не знаю даже адекватной оценки сверху, то есть за сколько конусов заведомо можно всё построить. Даже в простом случае, когда $X_i = \mathbb{P}^{n-i}$ это набор линейных подпространств в проективном пространстве, скорость порождения неизвестна (ну, оценку сверху тут можно написать, но гигантскую). Кажется, Орлов знает ответ для $\mathbb{P}^2$, но не для больших размерностей. (Это вопрос не из тех, ответ на который жаждёт знать множество математиков, но, скорее всего, для ответа на него необходимо будет придумать какие-то новые методы работы с генераторами в триангулированных категориях, и это уже будет интересно.)

В общем, не умеют люди строить ни доказуемо быстрых генераторов (верно ли, что $\mathrm{rdim}(X) = \dim(X)$ для всех X? Открытый вопрос с 2009 года), ни доказуемо медленных (как строить оценки снизу, кроме придуманного Рукье метода («ghost lemma»), и как применять этот метод в большем количестве случаев?).

Задача 6: конечно, это верно не только для исключительных наборов, но и для любых полуортогональных разложений. Из этого получается, например, что если хотя бы одно из многообразий X и Y допускает нетривиальное полуортогональное разложение, то и их произведение тоже не может иметь (полуортогонально) неразложимую производную категорию. Верно ли обратное?

(c***) Пусть X и Y имеют неразложимые производные категории. Верно ли, что $D(X \times Y)$ тоже не допускает нетривиальных полуортогональных разложений? Если X и Y имеют неразложимые производные категории по какой-то внятной конкретной причине (например, у них глобально порождённые канонические линейные системы), то эта же причина годится и для произведения. Но если только знать, что категории неразложимы, то непонятно, что делать.

Задача 7: Пусть X — гладкое проективное однородное пространство. Пусть $\mathrm{Aut}^o(X)$ — полупростая (аффинная) алгебраическая группа. Существует гипотеза: для таких X в $D(X)$ существует полный исключительный набор. С помощью теории представлений алгебраических групп Кузнецов и Полищук в статье [5] построили для любого такого X исключительный набор ожидаемой длины, но в полной общности неизвестно, порождает ли он всю категорию. Даже неизвестно, являются ли построенные ими исключительные объекты векторными расслоениями на X (во всех случаях, где удалось понять — да).

(c***): Пусть $\mathcal{A} \subset D(X)$ — допустимая подкатегория. Верно ли, что $\mathcal{A}$ обязательно содержит какой-то когерентный пучок? Для всех известных допустимых подкатегорий в однородных пространствах это оказывается верно. Положительный ответ на этот вопрос будет означать, что в $D(X)$ не существует *фантомных подкатегорий*, то есть допустимых подкатегорий, у которых класс любого объекта в $K_0(X)$ равен нулю, что в частности будет означать полноту набора Кузнецова–Полищука. В такой формулировке вопрос открыт даже для $X = \mathbb{P}^3$.

Бонус: пара несерьёзных открытых вопросов о полуортогональных разложениях.

(Серьёзные открытые вопросы — это что-нибудь вроде «дать достаточное и необходимое условие на многообразие X, означающее, что категория $D(X)$ не имеет полуортогональных разложений», или там доказать гипотезу Кузнецова о том, что кубический форфолд рационален тогда и только тогда, когда его *K3-компонента* эквивалентна производной категории настоящей K3-поверхности.)

Вообще говоря, пересечение двух допустимых подкатегорий не обязано быть допустимой подкатегорией (придумать пример — несколько сложнее, чем задачи в экзамене, но не безумно сложно). Рассмотрим конкретный пример. Структурный пучок проективного пространства

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ — исключительный объект. Поэтому и левый ортогонал $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\perp}$, и правый ортогонал ${}^{\perp}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ к нему являются допустимыми подкатегориями в $D(\mathbb{P}^n)$. Докажите (или опровергните!), что пересечение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\perp} \cap {}^{\perp}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ этих двух подкатегорий не является допустимой подкатегорией, если $n > 1$. (Я умею это доказывать тупым способом для $\mathbb{P}^2$, и подозреваю, что это верно для любого многообразия Фано. Отмечу, что пересечение допустимых подкатегорий удовлетворяет всем свойствам жёсткости и инвариантности из теоремы Каватани–Окавы.)

Ещё мне кажется, без особенных оснований, что должно быть верно следующее свойство полуортогональных разложений для проективных пространств: если $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset D(\mathbb{P}^n)$ — две ненулевые допустимые подкатегории, то они не могут быть двусторонне ортогональны, т.е. не могут быть одновременно полуортогональны пары $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \rangle$ и $\langle \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1 \rangle$. (В грассманнианах или там $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такие пары вполне могут быть.) Я не знаю доказательства даже для того факта, что два исключительных векторных расслоения на $\mathbb{P}^n$ не могут двусторонне ортогональны, хотя наверняка это не очень сложно.

Библиография

[1] A. Neeman, «Some new axioms for triangulated categories», *J. Algebra*, т. 139, вып. 1, сс. 221–255, 1991.

[2] H. Krause и G. Stevenson, «The derived category of the projective line», *Spectral structures and topological methods in mathematics.* в EMS Ser. Congr. Rep. EMS Publ. House, Zürich, сс. 275–297, 2019 г.

[3] M. Ballard и D. Favero, «Hochschild dimensions of tilting objects», *Int. Math. Res. Not. IMRN*, вып. 11, сс. 2607–2645, 2012.

[4] D. Orlov, «Remarks on generators and dimensions of triangulated categories», *Mosc. Math. J.*, т. 9, вып. 1, с. 153–159, back matter, 2009.

[5] A. Kuznetsov и A. Polishchuk, «Exceptional collections on isotropic Grassmannians», *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, т. 18, вып. 3, сс. 507–574, 2016.