# Экзамен по курсу о $D^b_{\mathrm{coh}}$ (весна 2024)

Для получения максимальной оценки достаточно решить любые пять задач. При решении можно без доказательства пользоваться любыми утверждениями из алгебраической геометрии и гомологической алгебры при условии, что вы чётко сформулируете, что именно используется. Можно без доказательства использовать любые результаты из лекций.

Решения присылайте мне на электронную почту `dpirozhkov@mi-ras.ru` .

**ДЕДЛАЙН: 23:59 вторника 7 мая 2024**

**Задача 1**: Рассмотрим в производной категории абелевых групп $D(\mathrm{Ab})$ выделенный треугольник $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[1]$ и его сдвиг из аксиомы **TR2**:

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}[1]$$

Пусть $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ — ненулевой элемент. Докажите, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}[1] \\
\downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow \xi & & \downarrow 0 \\
\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1] & \xrightarrow{\cdot n} & \mathbb{Z}[1]
\end{array}$$

коммутативна, то есть задаёт морфизм выделенных треугольников в $D(\mathrm{Ab})$, и что при этом этот морфизм выделенных треугольников невозможно продолжить до $3 \times 3$-диаграммы.

**Задача 2**: Рассмотрим производную категорию векторных пространств $D(\mathrm{Vect})$.

(a) Покажите, что любой объект в $D(\mathrm{Vect})$ изоморфен градуированному векторному пространству, то есть комплексу векторных пространств, в котором все дифференциалы нулевые.

(b) Пусть $V^\bullet$ и $W^\bullet$ — два градуированных векторных пространства, $f^\bullet : V^\bullet \to W^\bullet$ — морфизм. Опишите градуированное векторное пространство, изоморфное конусу $f^\bullet$ в $D(\mathrm{Vect})$.

(c) Пусть теперь $D = D^b(\mathrm{vect})$ — ограниченная производная категория конечномерных векторных пространств. Рассмотрим в ней три полных подкатегории:

- $D_1 \subset D$ — градуированные векторные пространства, размерность которых в каждой градуировке чётная.
- $D_2 \subset D$ — градуированные векторные пространства, ненулевые только в чётных градуировках.
- $D_3 \subset D$ — градуированные векторные пространства, у которых сумма размерностей по всем градуировкам чётная.

Какие из подкатегорий $D_1$, $D_2$, $D_3$ являются триангулированными подкатегориями?

**Задача 3**: Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие размерности $n > 1$.

(a) Постройте объект $E \in D(X)$, который не изоморфен прямой сумме своих пучков когомологий $\oplus \mathcal{H}^i(E)[-i]$.

(b) Для каждого $N > 0$ постройте объект $E_N \in D(X)$, у которого $N$ ненулевых пучков когомологий, и который при этом не раскладывается в прямую сумму нетривиальным образом, то есть не представляется в виде прямой суммы двух ненулевых объектов. (*Подсказка*: если у объекта $E_N$ все пучки когомологий неразложимы, то разложить его в прямую сумму можно, только разбив множество пучков когомологий на «попавшие в первое слагаемое» и «попавшие во второе слагаемое». Постройте объект, для которого никакое разбиение на две группы не реализуется разложением $E$ в прямую сумму.)

**Задача 4**: Пусть $X$ и $Y$ — два гладких проективных многообразия, и пусть $\Phi : D(X) \to D(Y)$ — эквивалентность их производных категорий. Предположим, что для каждой точки $x \in X$ объект $\Phi(\mathcal{O}_x) \in D(Y)$, полученный применением функтора $\Phi$ к пучку-небоскрёбу в точке $x$, изоморфен пучку-небоскрёбу в некоторой точке $y \in Y$. Докажите, что тогда многообразия $X$ и $Y$ изоморфны.

**Задача 5**:

(a) Пусть $C$ — гладкая проективная кривая, а $c \in C$ — точка. Докажите, что прямая сумма $G := \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_c$ тривиального линейного расслоения на $C$ и пучка-небоскрёба в точке $c \in C$ является классическим генератором $D(C)$. (*Указание*: достаточно доказать, что подкатегория $\langle G \rangle$ содержит какой-нибудь классический генератор.)

(b) Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие размерности $n$. Пусть дана вложенная цепочка замкнутых подмногообразий:

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_n,$$

где каждое $X_i$ — связное гладкое подмногообразие коразмерности $i$ в $X$, причём для каждого $i \in [0; n-1]$ подмногообразие $X_{i+1}$ является обильным дивизором в $X_i$. Пусть $G := \oplus_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{X_i}$ — прямая сумма структурных пучков этих подмногообразий. Докажите, что $G$ является классическим генератором $D(X)$.

(c) В условиях пункта (b) пусть $F := \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_{X_n}$. Докажите, что если $n > 1$, то $F$ не является классическим генератором $D(X)$.

(d*) (*необязательный вопрос*) В условиях пункта (b) пусть $k \in [0; n]$ некоторое число, и пусть $F_k$ это прямая сумма структурных пучков $\mathcal{O}_{X_i}$ для $i \neq k$ (то есть $G \cong F_k \oplus \mathcal{O}_{X_k}$). Докажите, что $F_k$ не является классическим генератором $D(X)$.

**Задача 6**: Пусть $X$ и $Y$ — два гладких проективных многообразия.

(a) Пусть $E \in D(X)$ и $F \in D(Y)$ — два исключительных объекта. Покажите, что $E \boxtimes F \in D(X \times Y)$ — исключительный объект на произведении $X \times Y$.

(b) Пусть $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle$ — полный исключительный набор в $D(X)$, а $\langle F_1, \ldots, F_m \rangle$ — полный исключительный набор в $D(Y)$. Докажите, что последовательность

$$\langle E_1 \boxtimes F_1, E_2 \boxtimes F_1, \ldots, E_n \boxtimes F_1, \quad E_1 \boxtimes F_2, \ldots, E_n \boxtimes F_2, \quad \ldots, \quad E_1 \boxtimes F_m, \ldots, E_n \boxtimes F_m \rangle$$

это полный исключительный набор в $D(X \times Y)$.

**Задача 7**: Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Пусть $\mathcal{A} \subset D(X)$ — допустимая подкатегория, а $L_{\mathcal{A}} : D(X) \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к вложению подкатегории $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow D(X)$.

(a) Пусть $g : X \to X$ — автоморфизм $X$, лежащий в связной компоненте группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}^o(X)$. Покажите, что для любого объекта $E \in D(X)$ существует изоморфизм $\iota(L_{\mathcal{A}}(g^* E)) \simeq g^* \iota(L_{\mathcal{A}}(E))$ объектов в $D(X)$. (*Указание*: рассмотрите треугольник проекции для $E$ относительно полуортогонального разложения $D(X) = \langle \mathcal{A}, {}^{\perp}\mathcal{A} \rangle$ и воспользуйтесь теоремой Каватани–Окавы о жёсткости.)

(b) Предположим, что $X$ является *однородным пространством*, то есть связная компонента группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}^o(X)$ действует на $X$ транзитивно. (При желании можете считать, что $X = \mathbb{P}^n$.) Пусть $x \in X$ — какая-то точка. Докажите, что объект $\iota(L_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}_x)) \in D(X)$, где $\mathcal{O}_x$ — пучок-небоскрёб в точке $x$, однозначно определяет подкатегорию $\mathcal{A} \subset D(X)$. (*Подсказка*: полезно рассмотреть ортогонал.)