# Производные категории когерентных пучков

Дмитрий Пирожков

Содержание



## 1. Введение и триангулированные категории

1.1. **Общий обзор курса.** Мы будем изучать производные категории когерентных пучков на алгебраических многообразиях. Я предполагаю, что слушатели уже знают, что такое когерентные пучки на алгебраических многообразиях и умеют с ними обращаться. В первых нескольких лекциях мы обсудим необходимые понятия из гомологической алгебры, а дальше постепенно будет добавляться больше алгебраической геометрии. Сразу предупрежу, что курс в основном про алгебро-геометрические аспекты этой области науки, поэтому многие утверждения из гомологической алгебры будут формулироваться без доказательства.

Итак, о чем же пойдёт речь? Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие над $\mathbb{C}$. Можно рассматривать более широкие классы многообразий, но мы хотим избежать технических сложностей и потому будем рассматривать только такие случаи. По нему строится некоторый инвариант $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, его *производная категория когерентных пучков*. В следующих двух лекциях мы обсудим, что именно из себя представляет этот объект, но пока достаточно понимать, что это некоторая категория, содержащая категорию когерентных пучков на $X$. Например, пучок-небоскрёб в какой-нибудь точке $X$ задаёт объект категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. Этот сложно устроенный инвариант сначала появился в работах Гротендика и Вердье как технический объект, позволяющий более удобно обращаться с производными функторами. Позже категорию $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ стали изучать не только как техническое приспособление, но и как геометрически интересный объект.

Чтобы объяснить, как это произошло, упомяну несколько статей, которые сыграли важную роль в истории развития этой области:

- **1978: А. Бейлинсон, “Когерентные пучки на $\mathbb{P}^n$ и проблемы линейной алгебры”**
  В этой короткой статье Бейлинсон дал альтернативное описание производной категории $D^b_{\mathrm{coh}}(PP^n)$ в терминах представлений некоторой конечномерной алгебры. Заодно из доказательства следует удобный метод построения произвольного объекта производной категории $PP^n$ с помощью линейных расслоений ("спектральная последовательность Бейлинсона"). Этот результат оказался очень полезен для многих классических вопросов о свойствах векторных расслоений на проективных пространствах, об их пространствах модулей и т.п.
- **1981: S. Mukai, “Duality between $D(X)$ and $D(\widehat{X})$ with its application to Picard sheaves”**
  Пусть $A$ — абелево многообразие, а $\widehat{A}$ — двойственное к нему абелево многообразие. Мукаи показал, что существует некоторая эквивалентность производных категорий $D^b_{\mathrm{coh}}(A) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\widehat{A})$, переводящая линейные расслоения степени ноль на $A$ в пучки-небоскрёбы на $\widehat{A}$. Поскольку многообразия $A$ и $\widehat{A}$ обычно не изоморфны, это значит, что у разных многообразий может быть одинаковая производная категория когерентных пучков! Это любопытно, но на практике важно другое — эквивалентность получается совсем не тривиальная: всё-таки небоскрёбы не очень похожи на линейные расслоения, а получаем, что ведут себя они в этой ситуации одинаково. В этой статье тоже результат про производные категории был немедленно применён к вопросам о векторных расслоениях на абелевых многообразиях. После применения эквивалентности производных категорий некоторые расслоения превратились в более простые и понятные объекты на двойственном многообразии.
- **1994: М. Концевич, “Homological Algebra of Mirror Symmetry”**
  Максим Концевич в своём докладе на ICM предложил математическую интерпретацию физического понятия зеркальной симметрии, по крайней мере, некоторых его аспектов. Мы не будем обсуждать гомологическую зеркальную симметрию в этом курсе за недостатком времени. Грубо говоря, физические теории предсказывают, что *нечто*, строящееся по алгебраическому многообразию, должно совпадать с другим *нечто*, строящимся по симплектической структуре на каком-то другом многообразии. Концевич предложил, что в качестве первого *нечто* можно взять не что иное, как производную категорию когерентных пучков на многообразии (а с симплектической стороны должен возникнуть некоторый вариант категории Фукаи). Эта гипотеза оказалась весьма популярной и привлекла внимание многих математиков к изучению производных категорий когерентных пучков. Отметим, что тут производная категория возникает сама себе, как непосредственно интересный объект.

Это, конечно, далеко не полный список важных работ о производных категориях когерентных пучков.

1.2. **Триангулированные категории.** Производная категория когерентных пучков $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, как и вообще производная категория чего бы то ни было, является *триангулированной категорией*. Мы обсудим, что это значит.

1.3. Определение. *Аддитивной категорией* $\mathcal{A}$ называется категория, в которой для каждой пары объектов $A, B \in \mathcal{A}$ на множестве $\mathrm{Hom}(A, B)$ задана структура абелевой группы, согласованная с композицией морфизмов, а также выполнены дополнительные условия:

- существует нулевой объект $0 \in \mathcal{A}$;
- в $\mathcal{A}$ существуют конечные прямые произведения.

*Замечание*: Из этих условий следует, что конечные прямые произведения в $\mathcal{A}$ совпадают с конечными копроизведениями. Используя это, можно доказать, что на самом деле "быть аддитивной категорией" для $\mathcal{A}$ — это не дополнительная структура, а свойство, в том смысле, что структура абелевой группы на Hom'ах определена однозначно.

Мы будем чаще работать не просто с аддитивными категориями, а с $\mathbb{C}$-*линейными категориями*: это вариант определения выше, где $\mathrm{Hom}(A, B)$ предполагается не просто абелевой группой, а векторным пространством над $\mathbb{C}$. Функторы между аддитивными или $\mathbb{C}$-линейными категориями всегда предполагаются согласованными с этой структурой.

1.4. Определение. *Триангулированная категория* — это набор данных:

- аддитивная категория $T$;
- автоэквивалентность $[1]\colon T \to T$, называемая *функтором сдвига*;
- Набор *выделенных треугольников*, то есть последовательностей
$$A \to B \to C \to A[1]$$
из трёх стрелок в категории $T$, удовлетворяющий аксиомам TR1-TR4 ниже.

Аксиомы триангулированной категории таковы:

**TR1**:

- Любой морфизм $A \xrightarrow{f} B$ в $T$ достраивается до выделенного треугольника
$$A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1].$$
Каждое такое $C$ мы будем называть *конусом $f$*.
- Треугольник $A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \to 0 \to A[1]$ является выделенным.
- Любая последовательность из трёх морфизмов, изоморфная выделенному треугольнику, является выделенным треугольником.

**TR2**: Последовательность
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$
является выделенным треугольником тогда и только когда, когда "сдвинутая" последовательность
$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1]$$
является выделенным треугольником.

*Замечание.* Поскольку функтор [1] и обратный к нему (который мы будем обозначать через [−1]) можно применять много раз, аксиому **TR2** стоит воспринимать как утверждение, что любой выделенный треугольник

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

вписывается в бесконечную “спираль”

$$\dots \to B[-1] \to C[-1] \to A \to B \to C \to A[1] \to B[1] \to C[1] \to A[2] \to \dots$$

каждые три стрелки в которой образуют выделенный треугольник.

<u>**TR3**</u>: Для двух выделенных треугольников $A \to B \to C \to A[1]$ и $A'\prime \to B'\prime \to C'\prime \to A''[1]$ и морфизмов $f$, $g$, которые делают первый квадрат в диаграмме ниже коммутативным:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"'] & A[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

существует морфизм $h$, делающий всю диаграмму коммутативной.

Оставшуюся аксиому **TR4** мы обсудим позже, а пока сначала докажем несколько следствий из первых трёх аксиом. Категории, удовлетворяющие только аксиомам **TR1**-**TR3**, называют *предтриангулированными категориями.*

1.5. Лемма. *Пусть* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to A[1]$ *— выделенный треугольник. Тогда* $g \circ f \colon A \to C$ *— это нулевое отображение.*

*Доказательство.* По аксиоме **TR1** существует выделенный треугольник

$$A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \to 0 \to A[1].$$

По аксиоме **TR3** существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & A[1] \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & A[1]
\end{tikzcd}$$

Поскольку $\mathrm{Hom}(0, C) = 0$, отображение $h$ только одно, нулевое. Тогда из коммутативности среднего квадрата следует, что композиция $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ равна нулю. □

1.6. Лемма. *Пусть* $A \to B \to C \to A[1]$ *— выделенный треугольник, а* $X \in T$ *любой объект. Тогда последовательность абелевых групп*

$$\mathrm{Hom}_T(X, A) \to \mathrm{Hom}_T(X, B) \to \mathrm{Hom}_T(X, C) \qquad (1.6.1)$$

*точна.*

*Доказательство.* По лемме 1.5 мы знаем, что композиция стрелок в (1.6.1) равна нулю. Осталось доказать, что если $f \colon X \to B$ — морфизм, для которого композиция с $B \to C$ равно нулю, то он поднимается до морфизма $X \to A$. Рассмотрим существующие по аксиоме **TR2** сдвиги треугольников $A \to B \to C \to A[1]$ и $X \to X \to 0 \to X[1]$, и воспользуемся, как в лемме 1.5, аксиомами **TR1** и **TR3**, чтобы получить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ B \arrow[r] & C \arrow[r] & A[1] \arrow[r] & B[1] \end{tikzcd}$$

Значит, сдвиг $h$ в обратную сторону, $h[-1]$, является искомым подъёмом. $\square$

1.7. Лемма. *Пусть $A \to B \to C \to A[1]$ — выделенный треугольник, а $X \in T$ — любой объект. Тогда существует длинная точная последовательность абелевых групп*

$$\begin{tikzcd} & & \ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_T(X, C[-1]) \arrow[dlll] \\ \mathrm{Hom}_T(X, A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_T(X, B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_T(X, C) \arrow[dll] & \\ \mathrm{Hom}_T(X, A[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_T(X, B[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_T(X, C[1]) \arrow[dll] & \\ \ldots & & & \end{tikzcd}$$

*Доказательство.* Получается из леммы 1.6 и многократного применения аксиомы **TR2**. $\square$

1.8. Лемма. *Конус морфизма определен однозначно с точностью до изоморфизма, т.е., если существует два выделенных треугольника*

$$A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1] \quad \text{и} \quad A \xrightarrow{f} B \to C' \to A[1],$$

*то $C$ изоморфно $C'$.*

*Доказательство.* По аксиоме **TR3** существует морфизм $h\colon C \to C'$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & A[1] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & C' \arrow[r] & A[1] \end{tikzcd}$$

Пусть $X \in T$ какой-нибудь объект. Рассмотрим морфизм длинных точных последовательностей, получаемых применением функтора $\mathrm{Hom}_T(X, -)$ по лемме 1.7:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X, B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X, C) \arrow[r] \arrow[d, "h \circ -"] & \mathrm{Hom}(X, A[1]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(X, B[1]) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}(X, A) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, C') \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, A[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, B[1]) \end{tikzcd}$$

Все вертикальные стрелки, кроме средней, являются изоморфизмами. Тогда по 5-лемме средняя стрелка тоже является изоморфизмом. Это верно для любого выбора $X \in T$, то есть функторы $\mathrm{Hom}_T(-, C)$ и $\mathrm{Hom}_T(-, C')$ изоморфны. По лемме Йонеды представимые функторы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их представляющие объекты, то есть $C$ и $C'$. Это мы и хотели доказать. $\square$

Вернёмся к определению триангулированной категории. Мы его не закончили, потому что сформулировали только три аксиомы из четырёх. Аксиома **TR4** более сложная, чем предыдущие. Как ни странно, человечеству неизвестно, бывают ли категории, которые удовлетворяют **TR1-TR3**, но не удовлетворяют **TR4**; иногда даже случаются попытки доказать, что последняя аксиома следует из первых трёх, но пока все эти попытки оказываются бесплодными. Это до некоторой степени объясняется тем, что все встречающиеся на практике триангулированные категории на самом деле обладают гораздо более тонкой структурой, чем просто набор выделенных треугольников (т.е., допускают "оснащения" до dg-категорий или стабильных $\infty$-категорий, что бы это ни значило). А никакого способа строить категории, в которых кроме выделенных треугольников не было бы ничего хорошего, мы не знаем.

Вместо аксиомы **TR4** в классическом варианте я сначала сформулирую её следствие, иногда называемое "$3 \times 3$-лемма". Оно выглядит строго сильнее самой аксиомы, но на самом деле равносильно ей. В этом курсе мы сами не будем строго доказывать, что что-то является триангулированной категорией, будем только ссылаться на другие источники, поэтому нам не очень важно, чтобы список аксиом был минимальным. С учетом этого мне кажется полезным в первую очередь знать вариант аксиомы, которые проще запомнить и чаще удаётся непосредственно применять.

<u>**TR4(+)**</u> ($3 \times 3$-лемма): Пусть дан коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A' \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

и для всех четырёх морфизмов в квадрате выбраны конусы $C$, $C'$, $A''$, $B''$. Тогда квадрат можно дополнить до диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A[1] \arrow[d] \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A'[1] \arrow[d] \\
A'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & B'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & C'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & A''[1] \arrow[d] \\
A[1] \arrow[r] & B[1] \arrow[r] & C[1] \arrow[r] & A[2]
\end{tikzcd}$$

в которой все строчки и столбцы являются выделенными треугольниками, все квадраты коммутативны, кроме нижнего правого, который антикоммутирует (два отображения $C'' \to A[2]$ отличаются умножением на $-1$).

Важным частным случаем этой $3 \times 3$-леммы является такой. Рассмотрим два морфизма $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ (не из выделенного треугольника, а просто два любых морфизма). Тогда дополним коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "g \circ f"] & C \end{tikzcd}$$

по аксиоме **TR4(+)** до диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] \arrow[d] & A[1] \arrow[d] \\ A \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cone}(g \circ f) \arrow[r] \arrow[d] & A[1] \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cone}(g) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Cone}(g) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ A[1] \arrow[r] & B[1] \arrow[r] & \mathrm{Cone}(f)[1] \arrow[r] & A[2] \end{tikzcd}$$

В третьем столбце мы видим, что из аксиомы **TR4(+)** следует, что конус композиции морфизмов $g \circ f$ вписывается в середину выделенного треугольника между конусом $f$ и конусом $g$. (Конус $g$ в этом столбце возникает как конус отображения $0 \to \mathrm{Cone}(g)$ в третьей строке.) Полезно сравнить эту ситуацию с такой: если бы $A \subset B \subset C$ были бы вложенными абелевыми группами, то существовала бы короткая точная тройка

$$0 \to B/A \to C/A \to C/B \to 0,$$

аналогом которой является полученный нами выделенный треугольник. Этот частный случай $3 \times 3$-леммы и называют обычно аксиомой **TR4**: из него вместе с предыдущего аксиомами следует общее утверждение (см., например, [May01, Lem. 1.7] или [Sta24, Tag 05R0]).

Другое название аксиомы **TR4** — *аксиома октаэдра* — происходит благодаря тому, что коммутативный квадрат из $A$, $B$ и $C$ логичнее представить в виде треугольника (не выделенного, а обычного коммутативного треугольника), и если это делать достаточно последовательно, то $3 \times 3$-квадрат можно превратить во что-то вроде развёртки октаэдра. Если интересно, можно найти это в (английской) википедии или в первой главе [Har66].

*Замечание.* Аксиома **TR4(+)** в таком виде, разумеется, является усилением аксиомы **TR3**: морфизм $h$ из **TR3** не просто существует, а может быть дополнен до большой диаграммы. Как отметили на лекции, это похоже на утверждение леммы о змее в абелевых категориях, но аналогия не совсем полная: не каждый морфизм выделенных треугольников может быть дополнен до такой диаграммы! То есть среди возможных $h$ в **TR3** некоторые морфизмы лучше, чем прочие, но “хорошие” морфизмы ничего осмысленного не образуют — они не замкнуты ни относительно композиции, ни относительно сложения. Подробнее эти нюансы обсуждаются, например, в [Nee91].

1.9. **Комплексы и производные категории.** Объектами категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, которую мы будем изучать, являются комплексы когерентных пучков на многообразии $X$, но морфизмы там устроены сложнее. В этом разделе мы немного обсудим, как именно.

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, например, категория абелевых групп или категория когерентных пучков на каком-нибудь алгебраическом многообразии. Обозначим через $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ категорию комплексов объектов из $\mathcal{A}$.

Будем обозначать через [1] функтор сдвига градуировки на комплексе: а именно, если $A^\bullet$ это комплекс

$$\dots \to A^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \to \dots$$

то его сдвиг $A^\bullet[1]$ это комплекс, где $(A^\bullet[1])^i := A^{i+1}$, а дифференциал $(d[1])_i := -d_{i+1}$, то есть сдвиг "влево".

Определим также конус морфизма комплексов: если $f_\bullet\colon A^\bullet \to B^\bullet$ это морфизм, то его *конусом* называется комплекс $\mathrm{Cone}(f)$ из объектов $\mathrm{Cone}(f)^i := A^{i+1} \oplus B^i$ с дифференциалом $\left(\begin{smallmatrix} -d_{A,i+1} & 0 \\ f_i & d_{B,i} \end{smallmatrix}\right)$.

Такие понятия сдвига и конуса совершенно не делают категорию $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ триангулированной. Основная проблема с аксиомой **TR2**: если мы рассмотрим морфизм комплексов $A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet$ и его конус $\mathrm{Cone}(f)$ с естественными морфизмами комплексов

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} \mathrm{Cone}(f) \to A^\bullet[1]$$

то видно, что конус морфизма $g\colon B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)$ совершенно не изоморфен комплексу $A^\bullet[1]$: если забыть дифференциал, то у $\mathrm{Cone}(g)$ подлежащий градуированный объект это прямая сумма $A^\bullet[1] \oplus B^\bullet \oplus B^\bullet[1]$. Но оказывается, что $\mathrm{Cone}(g)$ *гомотопически эквивалентен* комплексу $A^\bullet[1]$. Напомним, что это значит.

1.10. Определение. *Гомотопией* между двумя морфизмами $f_1, f_2\colon A^\bullet \to B^\bullet$ называется набор отображений $h_i\colon A^i \to B^{i-1}{}_{i\in\mathbb{Z}}$, таких, что $(f_1 - f_2)_i = d_{B,i-1}h_i + h_{i+1}d_{A,i}$.

Из определения видно, что гомотопические классы отображений между комплексами $A^\bullet$ и $B^\bullet$ это фактор группы $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ по подгруппе тех морфизмов, которые гомотопны нулю ("стягиваемые морфизмы"). Это определение пришло из алгебраической топологии, где оно возникает как алгебраическое отражение обычного понятия гомотопии отображений топологических пространств.

1.11. Определение. Морфизм комплексом $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ называется *гомотопической эквивалентностью*, если существует морфизм $g\colon B^\bullet \to A^\bullet$ так, что композиция $g \circ f$ гомотопна тождественному отображению на $A^\bullet$ и композиция $f \circ g$ гомотопна тождественному отображению на $B^\bullet$.

*Пример.* Для любого объекта $A \in \mathcal{A}$ комплекс $0 \to A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \to 0$ гомотопически эквивалентен нулевому комплексу ("стягиваемый комплекс"). Достаточно показать, что тождественное отображение на этом комплексе гомотопно нулевому, что достигается при простой гомотопии:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1.12. Упражнение. Докажите, что любого комплекса $A^\bullet$ конус тождественного морфизма $A^\bullet \to A^\bullet$ является стягиваемым комплексом. (*Подсказка*: комплекс в примере выше это конус тождественного отображения из объекта $A \in \mathcal{A}$, обобщите конструкцию гомотопии.)

1.13. Упражнение. Докажите, что для любого отображения $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ конус естественного отображения $B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)$ гомотопически эквивалентен $A^\bullet[1]$. (Решение можно прочитать в [Huy06, Prop. 2.16])

1.14. Определение. *Гомотопической категорией комплексов* объектов $\mathcal{A}$ называется категория $K(\mathcal{A})$, объектами которой являются комплексы объектов из $\mathcal{A}$, а морфизмы между комплексами $A^\bullet$ и $B^\bullet$ это фактор-группа

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)/\sim$$

всех морфизмов комплексов по подгруппе морфизмов, гомотопных нулевому.

1.15. Упражнение. Проверьте, что это в самом деле определяет категорию, то есть что композиция гомотопических классов морфизмов корректно определена.

С учётом упражнения 1.13 следующая теорема кажется не столь неожиданной:

1.16. Теорема. *Гомотопическая категория комплексов $K(\mathcal{A})$ с функтором сдвига* [1] *является триангулированной категорией, если объявить выделенными треугольниками последовательности морфизмов комплексов*

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f) \to A[1] \tag{1.16.1}$$

*и все изоморфные им в категории $K(\mathcal{A})$ (то есть на уровне комплексов — гомотопически эквивалентные последовательности).*

Мы не будем доказывать эту теорему. Доказательство можно прочитать, например, в [Куз08, Лекция 7, Теорема 3.2]. Основная сложность в том, что возникающие в аксиомах **TR3** и **TR4** коммутативные квадраты в категории $K(\mathcal{A})$ с точки зрения комплексов объектов из $\mathcal{A}$ будут не коммутативными, а только с точностью до гомотопии, и дальше надо аккуратно использовать эту заданную гомотопию.

У нас появился первый пример нетривиальной триангулированной категории. Но вообще более полезна не гомотопическая категория комплексов, а *производная категория* абелевой категории $\mathcal{A}$. Это категория, в которой комплекс и все его “резольвенты” отождествлены, т.е., соответствующие объекты изоморфны друг другу. Резольвента тут понимается в широком смысле — любой комплекс, квазиизоморфный данному. Напомним определение:

1.17. Определение. Морфизм комплексов $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ называется *квазиизоморфизмом*, если отображение на объектах когомологий $H^i(f)\colon H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)$ является изоморфизмом для всех $i \in \mathbb{Z}$.

В гомотопической категории комплекс не всегда изоморфен своей резольвенте. В качестве иллюстрации рассмотрим пока категорию $K(\mathbb{Z}-\mathrm{mod})$, гомотопическую категорию комплексов абелевых групп. Там есть объект $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (абелева группа, рассматриваемая как тривиальный комплекс: сама группа в степени ноль, остальные компоненты комплекса нулевые). У группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ есть свободная резольвента $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$. Для любой абелевой группы все её свободные резольвенты гомотопически эквивалентны друг другу (упражнение по гомологической алгебре), то есть изоморфны в $K(\mathbb{Z}-\mathrm{mod})$. Однако сам объект $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ не изоморфен в $K(\mathbb{Z}-\mathrm{mod})$ своей резольвенте, потому что нельзя придумать никакой нетривиальной гомотопии:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "???"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Оказывается, что из гомотопической категории можно соорудить триангулированную категорию, в которой любой квазиизоморфизм комплексов становится изоморфизмом.

1.18. Теорема. *Существует триангулированная категория $D(\mathcal{A})$ и точный функтор $K(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$, который переводит любой квазиизоморфизм в $K(\mathcal{A})$ в изоморфизм в категории $D(\mathcal{A})$, и является универсальным среди точных функторов в триангулированные категории с таким свойством.*

Эту теорему мы доказывать тоже не будем. Она является частным случаем понятия *локализации* триангулированной категории: при некоторых условиях на класс морфизмов в триангулированной категории существует универсальный способ построить категорию, в которой эти морфизмы станут обратимы. Можно показать, что квазиизоморфизмы в гомотопической категории комплексов удовлетворяют всем необходимым условиям, при которых категорию можно локализовать.

Опишем лишь некоторые свойства производной категории:

- Объекты в $D(\mathcal{A})$ — комплексы объектов из $\mathcal{A}$, так же, как в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ и $K(\mathcal{A})$.
- Комплекс $A^\bullet$ в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ изоморфен нулю в $D(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда все его когомологии $H^i(A^\bullet)$ равны нулю.
- С точностью до изоморфизма в $D(\mathcal{A})$ любой выделенный треугольник в $D(\mathcal{A})$ является образом последовательности комплексов $A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f) \to A^\bullet[1]$.
- Любой морфизм из комплекса $A^\bullet$ в комплекс $B^\bullet$ в категории $D(\mathcal{A})$ можно представить как “домик”

$$\begin{tikzcd} C^\bullet \arrow[d, "\mathrm{qis}"'] \arrow[dr] & \\ A^\bullet & B^\bullet \end{tikzcd}$$

  где $C^\bullet$ — какой-то комплекс с квазиизоморфизмом из $C^\bullet$ в $A^\bullet$. Такое представление далеко не единственно.

*Пример.* Пусть в категории $\mathcal{A}$ дана короткая точная последовательность

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Тогда в категории $D(\mathcal{A})$ существует выделенный треугольник

$$A \to B \to C \xrightarrow{\delta} A[1],$$

где морфизм $\delta$ представляется домиком из комплексов

$$\begin{tikzcd} & {[A \to B]} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ {[0 \quad C]} & & {[A \quad 0]} \end{tikzcd}$$

Тут изображены комплексы, сосредоточенные в градуировках $-1$ и 0: морфизм слева это квазиизоморфизм между отображением $A \to B$ и его коядром $C$, а справа — проекция на одну из компонент.

*Замечание.* Более общо, для двух объектов $A, B \in \mathcal{A}$ из абелевой категории, рассматриваемых как комплексы, сосредоточенные только в степени 0, существует изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, B[i]) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B).$$

Тут Ext определяется по Йонеде (то есть как классы точных последовательностей

$$0 \to B \to C_1 \to \cdots \to C_i \to A \to 0$$

в абелевой категории с точностью до некоторого отношения эквивалентности). Из-за этого часто для любых двух объектов $X, Y$ в триангулированной категории $T$ группу $\mathrm{Hom}_T(X, Y[i])$ обозначают как $\mathrm{Ext}^i_T(X, Y)$.

## 2. Свойства производных категорий.

2.1. **Морфизмы в производной категории.** Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, как в прошлой лекции. В прошлый раз мы обсудили понятия гомотопической категории комплексов $K(\mathcal{A})$ и производной категории $D(\mathcal{A})$. Тогда речь шла про произвольные комплексы, но в сегодняшней лекции нам понадобятся обозначения для некоторых специальных классов комплексов.

2.2. Определение. Объект $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$ в производной категории называется:

- *ограниченным снизу*, если для всех $i \ll 0$ когомологии $H^i(A^\bullet)$ равны нулю;
- *ограниченным сверху*, если для всех $i \gg 0$ когомологии $H^i(A^\bullet)$ равны нулю;
- *ограниченным*, если только для конечного числа $i \in \mathbb{Z}$ когомологии $H^i(A^\bullet)$ ненулевые ($\iff$ он ограничен и сверху, и снизу).

Подкатегории таких комплексов в $D(\mathcal{A})$ обозначаются $D^+(\mathcal{A})$, $D^-(\mathcal{A})$ и $D^b(\mathcal{A})$, соответственно. Аналогичные обозначения используются и для таким же образом определённых подкатегорий в $K(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$.

Обратите внимание, что даже в категории $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ ограниченным снизу называют комплекс, который в достаточно отрицательных степенях *точен*, а не такой, который в достаточно отрицательных степенях состоит из нулевых объектов.

2.3. Лемма. *Пусть $I^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ — ограниченный снизу комплекс, состоящий из инъективных объектов в $\mathcal{A}$, а $A^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ — произвольный ограниченный снизу* *комплекс. Тогда для морфизмов из $A^\bullet$ в $I^\bullet$ в производной категории верно следующее равенство*

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \quad (\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)/\sim)$$

*Доказательство.* Полное доказательство см., например, в [Huy06, Lem. 2.39]. Идея: если домик $A^\bullet \xleftarrow{\text{qis}} C^\bullet \xrightarrow{f} I^\bullet$ представляет какой-то морфизм в $D(\mathcal{A})$, то из свойств инъективных объектов и ограниченности всех комплексов снизу можно вывести, что отображение абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(C^\bullet, I^\bullet)$$

является изоморфизмом. Следовательно, данный нам домик можно “сплющить”, спустив отображение $f\colon C^\bullet \to I^\bullet$ до отображения комплексов напрямую из $A^\bullet$. □

2.4. Лемма. *Если в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов, то для любого комплекса $A^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ существует квазиизоморфизм $A^\bullet \to I^\bullet$ в комплекс $I^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$, состоящий из инъективных объектов. Кроме того, если когомологии $A^\bullet$ нулевые во всех степенях, меньших некоторого $i \in \mathbb{Z}$, то комплекс $I^\bullet$ тоже можно выбрать нулевым в степенях, меньших, чем $i$.*

*Доказательство.* Доказывать не будем. Получается по индукции, идея изложена в [Huy06, Prop. 2.35], подробности есть, например, в [Куз08, Лекция 4, Часть 3]. □

Вывод: группы морфизмов в $D^+(\mathcal{A})$ теоретически можно вычислять, используя инъективные резольвенты. Для неограниченных комплексов какие попало резольвенты комплексами из инъективных объектов брать нельзя (ответ будет неправильный), но можно брать специальным образом устроенные, и этого достаточно для тех производных категорий, которые мы будем рассматривать (“$K$-инъективные комплексы” Спалтенштейна [Spa88]; более понятный ответ с помощью гомотопических (ко)пределов есть в [BN93]).

2.5. Следствие. *Пусть $A, B \in \mathcal{A}$ — два объекта. Если в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов, то $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, B[i]) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B)$.*

*Доказательство.* Это следует из классического определения функтора Ext в абелевой категории: заменить $B$ на инъективную резольвенту, посчитать отображения почленно. □

Из нерассказанного на лекции. Приведём пример морфизма выделенных треугольников, который нельзя дополнить до $3 \times 3$-диаграммы. Рассмотрим в производной категории абелевых групп $D(\mathrm{Ab})$ выделенный треугольник

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[1]$$

и его сдвиг из аксиомы **TR2**:

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}[1]$$

Для любого $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ следующая диаграмма коммутативна: средний квадрат коммутирует, потому что $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, а правый квадрат — потому, что

$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ является группой $n$-кручения:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "0"'] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}[1] \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[1]
\end{tikzcd}$$

Упражнение: докажите, что если $\xi \neq 0$, то из конусов вертикальных стрелок нельзя никаким образом построить выделенный треугольник в $D(\mathrm{Ab})$.

Мы рассмотрим и некоторые другие случаи, когда морфизмы в $D(\mathcal{A})$ устроены просто. Сперва пара лемм.

2.6. Лемма. *Пусть морфизм $f^\bullet \colon A^\bullet \to B^\bullet$ комплексов в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ таков, что каждое отображение $f^i \colon A^i \to B^i$ инъективно. Тогда $\mathrm{Cone}(f^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{qis}} \mathrm{Coker}(f^\bullet)$.*

*Доказательство.* Упражнение. □

2.7. Определение. Пусть $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ — комплекс, $i \in \mathbb{Z}$ целое число. Тогда обозначим через $\tau_{\leq i}(A^\bullet)$ подкомплекс, чьё вложение в $A^\bullet$ изображено в диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker(d_i \colon A^i \to A^{i+1}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r] & A^i \arrow[r] & A^{i+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Назовём коядро этого вложения $\tau_{>i}(A^\bullet)$. Тогда верно следующее:

- при $j \leq i$ имеем $H^j(\tau_{\leq i}(A^\bullet)) = H^j(A^\bullet)$, а при $j > i$ получается $H^j(\tau_{\leq i}(A^\bullet)) = 0$.
- аналогичные равенства верны для $\tau_{>i}(A^\bullet)$.
- в производной категории $D(\mathcal{A})$ существует выделенный треугольник

$$\tau_{\leq i}(A^\bullet) \to A^\bullet \to \tau_{>i}(A^\bullet) \to \tau_{\leq i}(A^\bullet)[1] \qquad (2.7.1)$$

- если комплекс $B^\bullet$ квазиизоморфен $A^\bullet$, то треугольники обрезания для $A^\bullet$ и $B^\bullet$ изоморфны в категории $D(\mathcal{A})$. Иными словами, треугольник (2.7.1) корректно определён и для объекта $A^\bullet$ из производной категории.

Бывают ещё “тупые” (stupid) обрезания, но они, в отличие от “умных” (обычно называемых “каноническими”) выше, зависят от выбора конкретного комплекса $A^\bullet$, а не только от класса с точностью до квазиизоморфизма.

С помощью обрезаний комплексов мы можем продемонстрировать несколько случаев, в которых можно вычислить группу морфизмов в производной категории без необходимости разбираться с “домиками” или с выбором инъективной резольвенты.

2.8. Лемма. *Пусть у комплекса $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ когомологии сосредоточены в степенях $(-\infty, 0]$, а у комплекса $B^\bullet$ — в степенях $[1, \infty)$. Тогда $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) = 0$.*

*Доказательство.* Можно заменить $B^\bullet$ на квазиизоморфный комплекс $\tau_{>0}(B^\bullet)$, который сам по себе сосредоточен в степенях $[1, \infty)$: поскольку отображение $B^\bullet \to \tau_{>0}(B^\bullet)$ является квазиизоморфизмом, в производной категории эти два комплекса представляют изоморфные объекты, и в частности

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, \tau_{>0}(B^\bullet)).$$

Аналогично можно заменить $A^\bullet$ на $\tau_{\le 0}(A^\bullet)$.

Затем заменим $\tau_{>0}(B^\bullet)$ на инъективную резольвенту $I^\bullet$ — по лемме 2.4 это возможно, причём можно выбрать комплекс $I^\bullet$ так, что ненулевые объекты в нём тоже только в степенях $[1,\infty)$. Тогда получаем

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(\tau_{\le 0}(A^\bullet), I^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) = 0,$$

где второй изоморфизм получается по лемме 2.3, а равенство нулю приходит просто из соображений того, что между комплексами $\tau_{\le 0}(A^\bullet)$ и $I^\bullet$ вообще нет ненулевых морфизмов в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$, а значит, по определению категории $K(\mathcal{A})$, и в гомотопической категории комплексов тоже. □

2.9. Упражнение. Пусть $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ — комплекс, у которого только один объект когомологий ненулевой, $H^i(A^\bullet) \simeq A \in \mathcal{A}$. Докажите, что в производной категории $D(\mathcal{A})$ объект $A^\bullet$ квазиизоморфен объекту $A[-i]$. (*Указание*: рассмотрите сначала обрезание $A^\bullet$ в степенях $(-\infty, i]$, а затем обрезание полученного комплекса в степенях $[i,\infty)$.)

2.10. Лемма. *Пусть у комплекса $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ когомологии сосредоточены в степенях $(-\infty, 0]$, а у комплекс $B^\bullet$ — в степенях $[0,\infty)$. Тогда существует изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0(A^\bullet), H^0(B^\bullet)).$$

*Доказательство.* Рассмотрим для $B^\bullet$ треугольник обрезания:

$$\tau_{\le 0}(B^\bullet) \to B^\bullet \to \tau_{>0}(B^\bullet).$$

Заметим, что поскольку у комплекса $\tau_{\le 0}(B^\bullet)$ когомологии только в степени 0, упражнение 2.9 утверждает, что в $D(\mathcal{A})$ этот объект изоморфен просто $H^0(B^\bullet)$, рассмотренному как тривиальный комплекс. Применим к этому треугольнику функтор $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, -)$. Получится точная последовательность (см. лемму 1.7)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, \tau_{>0}(B^\bullet)[-1]) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, H^0(B^\bullet)) \to \\ \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, \tau_{>0}(B^\bullet)) \end{aligned} \tag{2.10.1}$$

Поскольку комплексы $\tau_{>0}(B^\bullet)$ и тем более $\tau_{>0}(B^\bullet)[-1]$ сосредоточены в степенях $[1,\infty)$, по лемме 2.8 первая и последняя абелевы группы в (2.10.1) равны нулю. Следовательно, отображение

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, H^0(B^\bullet)) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$$

является изоморфизмом. Дальше нужно рассмотреть треугольник обрезания для $A^\bullet$, воспользоваться изоморфизмом $\tau_{>-1}(A^\bullet) \simeq H^0(A^\bullet)$ из упражнения 2.9, и аналогичным образом получить равенство

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(H^0(A^\bullet), H^0(B^\bullet)).$$

Отображения между объектами из $\mathcal{A}$ в самой абелевой категории и отображения между ними в $D(\mathcal{A})$ совпадают, например, по лемме 2.3. □

Как вообще устроены морфизмы между объектами в производной категории в терминах их объектов когомологий из $\mathcal{A}$? Сперва рассмотрим вырожденный случай: пусть комплекс $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ квазиизоморфен прямой сумме своих когомологий, то есть в производной категории существует изоморфизм $A^\bullet \simeq \oplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(A^\bullet)[-i]$. Это случается редко, обычно объекты в производной категории не такие (ниже, в разделе 2.15, мы обсудим это подробнее). Предположим дополнительно, что $A^\bullet$ лежит в $D^b(\mathcal{A})$, то есть только конечное число когомологий $A^\bullet$ нетривиально. И пусть комплекс $B^\bullet$ тоже такой же. Тогда из следствия 2.5 для каждого $m \in \mathbb{Z}$ получается изоморфизм

$$\operatorname{Ext}^m_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \simeq \bigoplus_{p+q=m} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ext}^{m+p}_{\mathcal{A}}(H^i(A^\bullet), H^{i-p}(B^\bullet)).$$

Для произвольных объектов производной категории эта формула не годится, полученную прямую сумму нужно “поправить”: а именно, существует спектральная последовательность, начинающаяся с этой прямой суммы, и заканчивающаяся правильным ответом. Строго говоря, нам не понадобится в курсе от этой последовательности ничего, кроме того, что можно аналогично лемме 2.10 вывести из треугольников обрезания, но для полноты картины сформулируем утверждение.

2.11. Теорема ([BBD82, (3.1.3)]). *Пусть $A^\bullet, B^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$ — два объекта. Предположим, что $\mathcal{A}$ — категория конечной гомологической размерности, имеющая достаточно много инъективных объектов. Тогда существует спектральная последовательность*

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ext}^{2p+q}_{\mathcal{A}}(H^i(A^\bullet), H^{i-p}(B^\bullet)), \qquad d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1},$$

*которая сходится к* $\operatorname{Ext}^{p+q}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$.

*Замечание.* Напомним, что условие конечной гомологической размерности здесь означает, что существует $m_0 \in \mathbb{Z}$, при котором для любых двух объектов $A, A' \in \mathcal{A}$ и для любого $m \geq m_0$ выполняется $\operatorname{Ext}^m_{\mathcal{A}}(A, A') = 0$. Поскольку мы предположили, что оба объекта лежат в ограниченной производной категории, это гарантирует, что на первом листе спектральной последовательности лишь конечное число ненулевых клеток. Это условие выполнено, например, в категории когерентных пучков на гладком многообразии (и гомологическая размерность категории равна размерности самого многообразия).

*Замечание.* Во многих источниках, например, в книге Хёйбрехтса [Huy06], эту спектральную последовательность для морфизмов в производной категории формулируют и используют только при условии, что либо $A^\bullet$, либо $B^\bullet$ сосредоточены в одной градуировке. Эти частные случаи получаются из стандартных подходов к спектральным последовательностям, а для построения спектралки в общем случае нужно немного повозиться с категорией фильтрованных комплексов и т.п.

2.12. Упражнение. Передокажите утверждения лемм 2.8 и 2.10 с помощью спектральной последовательности из теоремы 2.11. (Это упражнение по пониманию того, что значат индексы в прямой сумме, написанной в теореме, и того, куда бьют дифференциалы.)

Выпишем в явном виде два простых следствия из существования этой спектральной последовательности. Оба этих следствия можно получить, много раз используя треугольники обрезания и длинные точные последовательности как в лемме 2.10, но раз уж у нас есть спектральная последовательность, то можно не возиться.

2.13. Следствие. *Пусть в условиях теоремы 2.11 для какого-то $m \in \mathbb{Z}$ верно, что для всех разложений $p + q = m$ получается $E_1^{p,q} = 0$. Тогда* $\operatorname{Ext}^m_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) = 0$.

2.14. Следствие. *Пусть в условиях теоремы 2.11 для какой-то пары* $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ *верно, что*

- $E_1^{p,q} \neq 0$;
- *Если* $(p',q') \in \mathbb{Z}^2$ *такие два числа, что* $p' > p$ *или* $q' > q$, *то* $E_1^{p',q'} = 0$.

*Тогда* $\operatorname{Ext}^m_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \simeq E_1^{p,q}$.

2.15. **Устройство объекта производной категории.** В предыдущем разделе мы обсуждали, как можно понимать морфизмы между объектами в производной категории в терминах абелевой категории $\mathcal{A}$, с которой мы начинали. Поговорим немного про то, как можно проанализировать структуру объекта $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$. Если вникать в детали определения производной категории, то объект там по построению был просто комплексом объектов из $\mathcal{A}$. Такой ответ полезен в доказательствах фундаментальных свойств производной категории, но с категорной точки зрения правильнее думать не об отдельном объекте, а о его классе изоморфизма. Как можно описать класс изоморфизма объекта $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$?

Во-первых, у каждого объекта производной категории канонически определены его объекты когомологий $H^i(A^\bullet)$. Поскольку когомологии сохраняются при квазиизоморфизмах, эти объекты корректно определены (более точно, каждый изоморфизм $A^\bullet \simeq B^\bullet$ в $D(\mathcal{A})$ канонически индуцирует изоморфизм объектов когомологий).

Набор объектов когомологий не определяет однозначно с точностью до изоморфизма объект в производной категории. Например, есть такие более тонкие инварианты:

2.16. Определение. Пусть $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$ — объект, а $i \in \mathbb{Z}$ — целое число. Обозначим через $\tau_{i,i-1}(A^\bullet)$ композицию обрезаний $\tau_{\geq i-1}(\tau_{<i+1}(A^\bullet))$. Это комплекс, у которого все объекты когомологий, кроме $i$'тых и $(i-1)$-ых, равны нулю. Рассмотрим для него треугольник обрезания на часть с $i$-тыми и часть с $(i-1)$'ыми когомологиями. По упражнению 2.9 получится выделенный треугольник

$$H^{i-1}(A^\bullet)[-(i-1)] \to \tau_{i,i-1}(A^\bullet) \to H^i(A^\bullet)[-i] \to H^{i-1}(A^\bullet)[-(i-1)+1].$$

Последняя стрелка задаёт по следствию 2.5 класс $\xi_i \in \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(H^i(A^\bullet), H^{i-1}(A^\bullet))$. Его можно назвать *$i$-тым склеивающим классом объекта* $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$.

*Замечание.* Это нестандартное название. Есть ли для этих классов какой-то стандартный термин — я не знаю (ни по-русски, ни по-английски).

2.17. Упражнение. Пусть $A^\bullet$ — комплекс, в котором все дифференциалы нулевые. Проверьте, что все склеивающие классы $\xi_{A,i}$ равны нулю.

2.18. Упражнение. Пусть $f_\bullet \colon A^\bullet \to B^\bullet$ — квазиизоморфизм комплексов. Проверьте, что при индуцированных изоморфизмах

$$H^i(f)\colon H^i(A^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^i(B^\bullet) \qquad \text{и} \qquad H^{i-1}(f)\colon H^{i-1}(A^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^{i-1}(B^\bullet))$$

склеивающий класс $\xi_{A,i} \in \operatorname{Ext}^2(H^i(A^\bullet), H^{i-1}(A^\bullet))$ переходит в аналогичным образом определённый класс для $B^\bullet$. Выведите из этого, что склеивающие классы корректно определены для объекта производной категории. (Это упражнение про то, как устроены треугольники обрезания.)

*Замечание.* Склеивающие классы описывают дифференциалы на первом листе спектральной последовательности из теоремы 2.11. Пусть есть отображение

$$H^i(A^\bullet) \xrightarrow{f} H^j(B^\bullet)[n]$$

в производной категории, соответствующее какому-то классу в прямой сумме Ext'ов из клетки на первом листе спектральной последовательности. Тогда при помощи склеивающих классов для $A^\bullet$ и $B^\bullet$ можно получить два отображения:

$$H^{i+1}(A^\bullet)[-2] \xrightarrow{\xi_{A,i+1}} H^i(A^\bullet) \xrightarrow{f} H^j(B^\bullet)[n] \quad \text{и} \quad H^i(A^\bullet) \xrightarrow{f} H^j(B^\bullet)[n] \xrightarrow{\xi_{B,j}} H^{j-1}(B^\bullet)[n+2]$$

Эти два класса в Ext'а, сложенные с какими-то знаками, и равны $d_1(f)$.

Итак, каждый объект $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$ канонически определяет:

- набор объектов когомологий $H^i(A^\bullet) \in \mathcal{A}_{i\in\mathbb{Z}}$;
- набор склеивающих классов $\xi_i \in \operatorname{Ext}^2(H^i(A^\bullet), H^{i-1}(A^\bullet))_{i\in\mathbb{Z}}$

Эти данные, вообще говоря, не определяют объект с точностью до изоморфизма. Бывают, например, объекты в производной категории, у которых только два объекта когомологий ненулевые, они не соседние, а объект всё равно нетривиален.

2.19. Упражнение. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$ — два объекта абелевой категории, а $\phi \in \operatorname{Ext}^m_{\mathcal{A}}(A, B)$ — ненулевой класс для какого-нибудь $m > 1$. Рассмотрим конус $C^\bullet$ морфизма

$$A[-1] \xrightarrow{\phi} B[m-1]$$

в производной категории (см. следствие 2.5).

- Докажите, что $H^0(C^\bullet) \cong A$ и $H^{-(m-1)}(C^\bullet) \cong B$, а остальные когомологии нулевые.
- Докажите, что если $\phi \neq 0$, то $C^\bullet$ не изоморфен прямой сумме $A[0] \oplus B[m-1]$. (*Указание*: для строгого доказательства удобнее всего обобщить определение 2.16. Если предположить, что в категории $\mathcal{A}$ все Ext'ы конечномерны, то можно доказать более приземлённым методом — рассмотреть длинную точную последовательность Ext'ов из $A$ в выделенный треугольник из морфизма $\phi$ и его конуса.)
- Если $m = 2$, проверьте, что $\xi_{C^\bullet,0}$ равно $\phi$. Если $m > 2$, проверьте, что все склеивающие классы объекта $C^\bullet$ равны нулю.

В случаях, когда гомологическая размерность у категории $\mathcal{A}$ маленькая, указанных нами инвариантов достаточно, чтобы описать классы изоморфизма объектов в производной категории $D(\mathcal{A})$. Например, если гомологическая размерность равна нулю или единице, то любой объект в производной категории получается прямой суммой сдвигов объектов из $\mathcal{A}$:

2.20. Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ — категория гомологической размерности $\leq 1$, то есть для всех $m > 1$ и любых пар объектов $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ абелева группа $\operatorname{Ext}^m_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ нулевая. Тогда любой объект $A^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$ изоморфен в производной категории прямой сумме своих объектов когомологий со сдвигами:*

$$A^\bullet \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(A^\bullet)[-i]$$

*Доказательство.* Докажем по индукции по числу ненулевых объектов когомологий у $A^\bullet$. Если только при одном $i \in \mathbb{Z}$ объект $H^i(A^\bullet)$ не равен нулю, то всё доказано в упражнении 2.9. Иначе пусть $i \in \mathbb{Z}$ — наибольшее, для которого $H^i(A^\bullet) \neq 0$. Рассмотрим треугольник обрезания:

$$\tau_{\leq i-1}(A^\bullet) \to A^\bullet \to H^i(A^\bullet)[-i] \xrightarrow{\phi} \tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1] \tag{2.20.1}$$

По предположению индукции объект $\tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1]$ в производной категории изоморфен прямой сумме сдвигов объектов из $\mathcal{A}$, и все эти объекты находятся в степенях не больших, чем $i-2$ (не забудьте о сдвиге на $[1]$!). Поэтому морфизм $\phi$ по следствию 2.5 лежит в абелевой группе

$$\bigoplus_{j \leq i-2} \operatorname{Ext}^{i-j}_{\mathcal{A}}(H^i(A^\bullet), H^j(A^\bullet)).$$

По предположению гомологической размерности 1 каждая из этих Ext-групп равна нулю. Значит, морфизм $\phi$ нулевой. В силу (2.20.1) комплекс $A^\bullet$ изоморфен сдвигу на $[-1]$ конуса морфизма $\phi$, но для нулевого морфизма мы знаем, что

$$\operatorname{Cone}(H^i(A^\bullet)[-i] \xrightarrow{0} \tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1]) \cong (H^i(A^\bullet)[-i] \oplus \tau_{\leq i-1}(A^\bullet))[1].$$

А это мы и хотели доказать. □

Та часть доказательства, где объясняется, почему морфизм $\phi$ нулевой, на самом деле не требует предположения индукции. Это частный случай такого наблюдения:

2.21. Упражнение. Пусть $\mathcal{A}$ — категория гомологической размерности $\leq n$, и пусть $A^\bullet, B^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$ — два объекта в ней. Предположим, что когомологии $A^\bullet$ сосредоточены в степенях $[0, \infty)$, а когомологии $B^\bullet$ сосредоточены в степенях $(-\infty, -(n+1)]$. Докажите, что тогда $\operatorname{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) = 0$. (*Указание*: можно по индукции с треугольниками обрезания, а можно подставить всё в спектральную последовательность из теоремы 2.11.)

Для категорий гомологической размерности 2 тоже получается понятная классификация:

2.22. Лемма. *Пусть $\mathcal{A}$ — категория гомологической размерности 2. Любой объект $A^\bullet$ в ограниченной производной категории $D^b(\mathcal{A})$ однозначно с точностью до изоморфизма определяется такими данными:*

- *набор объектов $F^i := H^i(A^\bullet)_{i \in \mathbb{Z}}$, из которых только конечное число не равно нулю;*
- *набор склеивающих классов $\xi_i \in \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{A}}(F^i, F^{i-1})$.*

Из нерассказанного на лекции. *Доказательство.* Как в лемме 2.20, доказываем по индукции. Пусть $i \in \mathbb{Z}$ наибольшее число, для которого $H^i(A^\bullet) \neq 0$. Рассмотрим треугольник обрезания

$$\tau_{\leq i-1}(A^\bullet) \to A^\bullet \to H^i(A^\bullet)[-i] \xrightarrow{\phi} \tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1]$$

Для доказательства шага индукции достаточно доказать, что морфизм $\phi$ однозначно определяется склеивающим классом $\xi_i$, который по определению получается композицией $\phi$ с ещё одним обрезанием

$$\tau_{\leq i-1}(A^\bullet) \xrightarrow{\psi} \tau_{>i-2}(\tau_{\leq i-1}(A^\bullet)) \simeq H^{i-1}(A^\bullet)[-(i-1)].$$

Продолжим эту стрелку до выделенного треугольника и посмотрим на длинную точную последовательность, получаемую из него применением функтора

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(H^i(A^\bullet), -).$$

Используя упражнение 2.21, получаем, что отображение

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(H^i(A^\bullet)[-i], \tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1]) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}, (H^i(A^\bullet)[-i], H^{i-1}(A^\bullet)[-(i-1)+1])$$

является изоморфизмом. □

2.23. **Производные функторы.** Как устроены функторы между производными категориями? Начнём с простого замечания:

2.24. Лемма. *Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный функтор между абелевыми категориями. Тогда он задаёт функтор $F\colon D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$, определяемый почленным применением $F$ к комплексам.*

*Доказательство.* Поскольку $F$ — точный, легко проверить, что если отображение комплексов $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ — квазиизоморфизм, то $F(f)\colon F(A^\bullet) \to F(B^\bullet)$ — тоже квазиизоморфизм. Ещё проще доказать, что если два отображения $f, g\colon A^\bullet \to B^\bullet$ гомотопны, то $F(f)$ и $F(g)$ тоже гомотопны. Значит, функтор $F$ спускается сначала с категории $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ на гомотопическую категорию $K(\mathcal{A})$, а затем и на производную $D(\mathcal{A})$. □

Точных функторов между абелевыми категориями довольно мало, особенно в алгебраической геометрии. Нас будут интересовать, например, прямые и обратные образы пучков при морфизмах многообразий: как известно, для $f\colon X \to Y$ функтор прямого образа $f_*\colon \mathrm{QCoh}(X) \to \mathrm{QCoh}(Y)$ точен только слева, а функтор обратного образа $f^*\colon \mathrm{QCoh}(Y) \to \mathrm{QCoh}(X)$ точен только справа. Оказывается, что и для таких функторов удаётся определить соответствующие им функторы между производными категориями.

2.25. Теорема. *Пусть $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный слева функтор между абелевыми категориями. Предположим, что в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов. Тогда существует правый производный функтор $\mathrm{R}F\colon D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$, удовлетворяющий следующим свойствам:*

- $\mathrm{R}F$ *является точным функтором между триангулированными категориями.*
- *Для любого $A^\bullet \in D^{\geq 0}(\mathcal{A})$ результат применения $\mathrm{R}F(A^\bullet)$ лежит в $D^{\geq 0}(\mathcal{B})$.*
- *Для объекта $A \in \mathcal{A}$ нулевой объект когомологий $H^0(\mathrm{R}F(A)) \in \mathcal{B}$ изоморфен $F(B)$.*

*Доказательство.* (не то что бы доказательство...) Для объекта $A^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$ определим $\mathrm{R}F(A^\bullet)$ следующим образом: выберем для $A^\bullet$ инъективную резольвенту, то есть комплекс $I^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$, состоящий из инъективных объектов, с квазиизоморфизмом $A^\bullet \to I^\bullet$. Это возможно по лемме 2.4. Тогда значением функтора $\mathrm{R}F(A^\bullet)$ будет почленное применение $F(I^\bullet)$ функтора $F$ к комплексу $I^\bullet$. Проверку свойств такого определения, в частности его корректность (не зависит от выбора инъективной резольвенты, функториально и т.п.), мы обсуждать не будем, а поверим, что всё работает. Условие про точность в триангулированном смысле морально является следствием леммы о змее. Если интересны подробности — см. [Куз08, Лекция 10] или книгу [ГМ89]. □

*Замечание.* Собственно, ради утверждений в таком духе и создавалось определение производной категории: с помощью производных категорий можно удобно "упаковать" всю информацию о не-точности функтора $F$ в производный функтор $\mathrm{R}F$, согласованный с триангулированной структурой.

Естественно, аналогичное утверждение верно и про левые производные функторы для точных справа функторов и ограниченных сверху категорий $D^-(-)$ — при условии, что в $\mathcal{A}$ имеется достаточно много проективных объектов. Но для нас это серьёзная проблема. В категории квазикогерентных пучков на алгебраическом многообразии всегда достаточно много инъективных объектов, а вот проективных обычно вообще нет. А как же нам изучать производные категории когерентных пучков, если непонятно, что делать, скажем, с функтором обратного образа относительно морфизма многообразий? К счастью, гомологическая алгебра умеет справляться и с такими ситуациями.

Проективные резольвенты годятся для того, чтобы вычислять левый производный функтор от любого точного справа функтора. Но для каждого отдельного функтора $F$ можно использовать резольвенты из более широкого класса объектов, так называемых "$F$-приспособленных" ("$F$-adapted") объектов. Для нужных нам геометрических функторов — тензорного произведения в производной категории и пулбэка относительно морфизма многообразий — в качестве приспособленных объектов можно брать плоские пучки, в частности векторные расслоения. Плоских пучков достаточно много, чтобы писать все нужные резольвенты. На практике всякий раз, когда нам нужно будет посчитать значение функтора пулбэка или вычислить тензорное произведение объектов производной категории когерентных пучков на многообразии, мы будем выбирать резольвенту из векторных расслоений и применять непроизводный функтор почленно.

## 3. Двойственность Серра. Теорема Бондала–Орлова.

В конце прошлой лекции мы обсудили, как точные хотя бы с одной стороны функторы между абелевыми категориями индуцируют точные в триангулированном смысле функторы между производными категориями (при некоторых технических условиях). Обсудим сначала немного специфику производных категорий, возникающих в алгебраической геометрии.

**3.1. $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ и $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$.** Во-первых, производные категории бывают разные. Кроме вариантов с ограниченностью комплексов ($D^b$, $D^+$, $D^-$) есть более существенные отличия. Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. В категории квазикогерентных пучков $\mathrm{QCoh}(X)$ достаточно много инъективных объектов, а вот в категории *когерентных* пучков $\mathrm{Coh}(X)$ — нет, потому что инъективные объекты, как правило, очень большие. Поэтому, формально говоря, не очень понятно, как определять производные функторы между производными категориями именно *когерентных* пучков. Введём такое обозначение:

3.2. Определение. Категорией $D_{\mathrm{coh}}(X)$ называется полная подкатегория в $D(\mathrm{QCoh}(X))$, состоящая из тех комплексов, чьи объекты когомологий являются когерентными пучками.

Легко проверить, что это триангулированная подкатегория, и что существует естественный точный функтор $D(\mathrm{Coh}(X)) \to D_{\mathrm{coh}}(X)$, являющийся "производным" функтором от точного функтора вложения категорий $\mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{QCoh}(X)$. Если вместо $D(\mathrm{Coh}(X))$ рассматривать $D_{\mathrm{coh}}(X)$, то фундаментальная сложность с определением производного функтора пропадает. Но тут есть тонкость.

3.3. Теорема (см., например, [Huy06, Prop. 3.3.5]). *Для любой нётеровой схемы $X$ функтор $D^b(\mathrm{Coh}(X)) \to D_{\mathrm{coh}}(X)$ является эквивалентностью, то есть $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ вкладывается как полная подкатегория в $D^b(\mathrm{QCoh}(X))$.*

В нашем курсе все схемы будут гладкими проективными многообразиями, поэтому нётеровость не накладывает никаких дополнительных условий. Но вообще при работе с "маленькими" категориями вроде $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ иногда приходится опасаться подвохов со стороны гомологической алгебры.

*Замечание.* Поясним на примере, в чём содержательное препятствие к тому, чтобы $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ всегда было эквивалентно $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. На первой лекции мы упоминали, что вне зависимости от наличия инъективных объектов в категории $\mathrm{Coh}(X)$ для двух когерентных пучков $F, G \in \mathrm{Coh}(X)$ абелева группа

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{Coh}(X))}(F, G[i])$$

изоморфна определённому по Ионеде $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Coh}(X)}(F, G)$, то есть классифицирует точные последовательности вида

$$0 \to G \to G_1 \to \cdots \to G_i \to F \to 0 \qquad (3.3.1)$$

в $\mathrm{Coh}(X)$ с точностью до некоторого отношения эквивалентности. А если же рассмотреть $\mathrm{Hom}_{D_{\mathrm{coh}}}(F, G[i])$, что по определению совпадает с Hom в категории $D(\mathrm{QCoh}(X))$, то эта группа классифицирует последовательности вида (3.3.1), где промежуточные объекты $G_1, \dots, G_i$ могут быть квазикогерентными пучками. Если схема $X$ — нётерова, то из того, что $F$ и $G$ когерентны, следует, что любая последовательность (3.3.1) с квазикогерентными (то есть "слишком большими") промежуточными пучками будет эквивалентна аналогичной последовательности, где все $G_1, \dots, G_i$ уже когерентны, а без нётеровости "урезать" последовательность не всегда возможно.

*Замечание.* Для некоторых утверждений технически правильно рассматривать не только $D_{\mathrm{coh}}(X)$ вместо $D(\mathrm{Coh}(X))$, а даже и вместо $D(\mathrm{QCoh}(X))$ брать подкатегорию в производной категории пучков $\mathcal{O}_X$-модулей абелевых групп, состоящую из комплексов, чьи объекты когомологий будут квазикогерентны. Это нужно, например, для построения производных функторов между неограниченными производными категориями. В нашей ситуации эти две категории тоже эквивалентны.

3.4. **Геометрические производные функторы.** Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение многообразий. Тогда, как мы обсудили в прошлой лекции, для "больших" категорий

$D(\mathrm{QCoh}(X))$ и $D(\mathrm{QCoh}(Y))$ определены производные функторы прямого $\mathrm{R}f_*$ и обратного $\mathrm{L}f^*$ образа. Выпишем несколько условий, когда производные функторы существуют и между “маленькими” категория $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ и $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$. Доказывать их мы не будем.

3.5. Лемма. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение многообразий.*

- *Если $Y$ — гладкое многообразие, то функтор $\mathrm{L}f^*\colon D(\mathrm{QCoh}(Y) \to D(\mathrm{QCoh}(X)))$ ограничивается до функтора $D^b_{\mathrm{coh}}(Y) \to D^b_{\mathrm{coh}}(X)$.*
- *Если морфизм $f$ собственный, то функтор $\mathrm{R}f_*\colon D(\mathrm{QCoh}(X)) \to D(\mathrm{QCoh}(Y))$ ограничивается до функтора $D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$.*
- *Функтор $\mathrm{L}f^*$ является левым сопряжённым к функтору $\mathrm{R}f_*$, как между большими категориями, так и между маленькими.*

Бывает удобно обозначать через $\mathrm{R}^i f_*(-)$ объект когомологий $H^i(\mathrm{R}f_*(-)) \in \mathrm{Coh}(X)$ и аналогично для обратного образа.

Ещё есть несколько функторов, связанных с производной категорией одного и того же многообразия. Обозначим через $\mathrm{R}\Gamma(X,-)$ функтор прямого образа относительно морфизма в точку $X \to *$. Это производный функтор от функтора глобальных сечений пучка. Поскольку глобальные сечения пучка $\mathcal{F}$ это то же самое, что его нулевые когомологии, естественно, что $\mathrm{R}\Gamma(X,\mathcal{F})$ это когомологии пучка. Поскольку $\mathrm{R}\Gamma$ можно вычислять на любом объекте производной категории, то называть его функтором когомологий двусмысленно, потому что путается просто с объектами когомологий у комплекса. Поэтому этот функтор часто называют функтором *гиперкогомологий.*

Заметим, что $D(\mathrm{QCoh}(*))$ это производная категория векторных пространств, которая по лемме о гомологической размерности из прошлой лекции эквивалентна просто категории градуированных векторных пространств. а $D^b_{\mathrm{coh}}(*)$ — это категория конечномерных градуированных векторных пространств (т.е., только конечное число градуировок не равно нулю, и все они конечномерны). Будем называть эти две категории $D(\mathrm{Vect})$ и $D^b(\mathrm{vect})$.

Кроме производных функторов в том смысле, что мы говорили, существует вариант для производных функторов от двух аргументов. По сути ничего нового не происходит (надо заменить хотя бы один из аргументов на подходящую резольвенту и применить обычный функтор в $\mathrm{QCoh}(X)$ или $\mathrm{Com}(\mathrm{QCoh}(X))$). Вот некоторые из нужных нам в дальнейшем функторов.

3.6. Лемма. *Пусть $X$ — многообразие.*

- *Существует производный $\mathrm{Hom}$-функтор:*
$$\mathrm{RHom}_{D(\mathrm{QCoh}(X))}(-,-)\colon D(\mathrm{QCoh}(X)) \times D(\mathrm{QCoh}(X)) \to D(\mathrm{Vect}).$$
*На паре объектов $F, G \in D(\mathrm{QCoh}(X))$ его значение — это градуированное векторное пространство $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(F, G[i])$. Если $X$ гладкое и собственное, то $\mathrm{RHom}$ ограничивается до функтора $D^b_{\mathrm{coh}}(X) \times D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b(\mathrm{vect})$.*
- *Если $X$ — гладкое, то существует производное тензорное произведение*
$$- \otimes^{\mathrm{L}} -\colon D^b_{\mathrm{coh}}(X) \times D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(X).$$
- *Если $X$ — гладкое, то существует внутренний производный $\mathrm{Hom}$:*
$$\mathrm{R}\mathcal{H}om(-,-)\colon D^b_{\mathrm{coh}}(X) \times D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(X),$$

*с такими свойством:*
– $\mathrm{R}\Gamma\,(\mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}(F,G)) \cong \mathrm{RHom}(F,G)$*;*
– $\mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}(F,G) \cong \mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}(F,\mathcal{O}_X) \otimes^{\mathrm{L}} G$*;*

В ходе курса появится ещё пара важных функторов. Одному из них посвящён следующий раздел.

**ВАЖНОЕ СОГЛАШЕНИЕ**: поскольку этот курс посвящён производным категориям, по умолчанию все функторы будут предполагаться производными! В частности, под $f^*$ всегда мы имеем в виду производный обратный образ, производное тензорное произведение обозначаем просто $-\otimes-$ и т.п. Если нам нужно будет в какой-то момент говорить, скажем, о не-производном прямом образе для какого-нибудь когерентного пучка, то будем явно писать $\mathrm{R}^0 f_*(\mathcal{F})$.

3.7. **Двойственность Серра на уровне производных категорий.** Поздравляю всех, кто добрался до этого раздела: крэш-курс по гомологической алгебре, нужной для производных категорий как таковых, на этом заканчивается. Дальше нам будет важно, что мы работает именно с многообразиями и когерентными пучками на них. Соответственно, в формулировках и доказательствах будет появляться больше алгебраической геометрии.

Первым делом вспомним про двойственность Серра. Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие размерности $n$. Тогда обозначим через $\omega_X$ его каноническое линейное расслоение, то есть $\Omega^n_X$. Классическая двойственность Серра говорит, что если $E$ — векторное расслоение на $X$, то для любого $i \in \mathbb{Z}$ верна двойственность

$$H^i(X,E) \cong H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee.$$

Оказывается, что если вместо когомологий рассматривать функтор гиперкогомологий, а под двойственностью $(-)^\vee$ в левой части равенства понимать производный внутренний Hom в структурный пучок, то есть $\mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}(-,\mathcal{O}_X)$, то ровно та же самая формула верна и для объектов в производной категории. Часто полезнее более “симметричная” формулировка:

3.8. Теорема. *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Для любых двух объектов $E,F \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ существует функториальный по обоим аргументам изоморфизм градуированных векторных пространств:*

$$\mathrm{RHom}_{D^b_{\mathrm{coh}}(X)}(E,F) \cong \mathrm{RHom}_{D^b_{\mathrm{coh}}(X)}(F, E \otimes \omega_X[n])^\vee.$$

Напомним, что для градуированных векторных пространств переход к двойственному означает не только замену градуированных компонент на двойственные, но и перенумерацию: $i$-тая компонента меняется местами с $(-i)$-той. Исходная формулировка получается, если взять в качестве $E$ тут структурный пучок (тогда $\mathrm{RHom}(\mathcal{O}_X,-) \cong \mathrm{R}\Gamma\,(X,-)$ по определению, а $i$-тые когомологии это как раз группа $i$-тых когомологий комплекса $\mathrm{R}\Gamma\,(X,-)$).

Такой феномен двойственности в триангулированных категориях встречается чаще, чем можно было бы подумать. Во второй части курса, когда мы будем обсуждать полуортогональные разложения, это нам пригодится. Бондал и Капранов ввели такое определение:

3.9. Определение ([БК89]). Пусть $T$ — триангулированная категория, в которой все Hom'ы конечномерны. *Функтором Серра* такой категории $T$ называется эндофунктор $S_T\colon T \to T$ с заданным, функториальным по произвольной паре объектов $E, F \in T$, изоморфизмом

$$\mathrm{Hom}^\bullet_T(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet_T(F, S_T(E))^\vee.$$

Функтор Серра, если он существует у категории $T$, однозначно (с точностью до изоморфизма) определён структурой самой категории. В качестве иллюстрации: для объекта $E \in T$ значение функтора Серра $S_T(E)$ можно определить, как представляющий объект для функтора

$$F \mapsto \mathrm{Hom}_T(E,F)^\vee.$$

По лемме Ионеды представляющий объект по функтору восстанавливается однозначно, если функтор вообще представим. А в статье [БК89] показывается, что если все такие функторы представимы, то функтор Серра существует и однозначно определён.

То, что функтор Серра однозначно определяется структурой самой категории, можно более строго выразить следующим образом: любая эквивалентность триангулированных категорий коммутирует с функтором Серра.

3.10. Лемма (см., например, [Huy06, Lem. 1.30]). *Пусть $\Phi\colon T \to T'$ — эквивалентность триангулированных категорий, обладающих функторами Серра $S_T$ и $S_{T'}$, соответственно. Тогда существует изоморфизм функторов*

$$\Phi \circ S_T \cong S_{T'} \circ \Phi.$$

*Доказательство.* Достаточно показать, что композиция $\Phi \circ S_T \circ \Phi^{-1}$ удовлетворяет свойствам функтора Серра на $T'$. Это следует из определения функтора Серра и того, что $\Phi$ — эквивалентность категорий (в частности, является строго полным функтором). Тогда нужное утверждение следует из единственности функтора Серра на триангулированной категории. □

3.11. **Теорема Бондала–Орлова о реконструкции многообразия.** На первой лекции упоминалось, что иногда для разных многообразий производные категории эквивалентны: например, Мукаи доказал, что у абелева многообразия $A$ и его двойственного абелева многообразия $A^\vee$. Такие пары многообразий называются *партнёрами Фурье–Мукаи* (при чём тут Фурье, спросите вы? Это мы обсудим в следующей лекции). Это, в принципе, не беда: в алгебраической геометрии сплошь и рядом встречаются инварианты алгебраических многообразий, которые иногда совпадают (группа Пикара, структуры Ходжа и т.д.). Однако для широкого класса многообразий триангулированная категория $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ однозначно определяет многообразие $X$. И всё благодаря понятию функтора Серра! Бондал и Орлов доказали в 2001 году такую теорему:

3.12. Теорема ([BO01]). *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, у которого каноническое линейное расслоение $\omega_X$ обильно или антиобильно. Если $Y$ — гладкое собственное многообразие, для которого существует эквивалентность $\Phi\colon D^b_{\mathrm{coh}}(X) \simeq D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ триангулированных категорий, то $Y$ изоморфно $X$.*

*Замечание.* Напомним, что в теореме Мукаи эквивалентность производных категорий была для двух абелевых многообразий, а у них канонический класс тривиален, т.е., ровно "посередине" между обильным и антиобильным. Многообразия с антиобильным каноническим классом называются многообразиями Фано, а многообразия с обильным каноническим классом — многообразиями общего типа.

*Замечание.* Абелева категория $\mathrm{QCoh}(X)$ (или же $\mathrm{Coh}(X)$, доказательство одинаковое) всегда однозначно определяет схему $X$: это доказал Габриэль в [Gab62] для нётеровых схем, а затем обобщали разные люди. Если интересно, рекомендую статью [Bra18], где эта теорема понятно и аккуратно выводится напрямую из определения схемы и когерентного пучка.

*Замечание.* Если кроме триангулированной структуры на $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ знать ещё и тензорное произведение $D^b_{\mathrm{coh}}(X) \times D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, то, как и с абелевыми категориями, никаких условий на $X$ не нужно, чтобы однозначно его восстановить [Bal02].

Это теорема важна с философской точки зрения, но на практике, конечно, она не используется: обычно если удаётся доказать эквивалентность производных категорий, то уж про то, изоморфны ли многообразия или нет, точно всё понятно и без всякой теоремы. Но утверждение, конечно, красивое.

Я расскажу доказательство из оригинальной статьи, с небольшими купюрами. План такой:

(1) С помощью функтора Серра можно описать множество объектов в $D(X)$, которые являются пучками-небоскрёбами в точках $X$. Из этого выводится, что функтор $\Phi$ задаёт биекцию между множеством пучков-небоскрёбов на $X$ и множеством пучков-небоскрёбов на $Y$.
(2) По множеству пучков-небоскрёбов однозначно в категорных терминах описывается множество линейных расслоений. Следовательно, функтор $\Phi$ задаёт биекцию между множеством линейных расслоений на $X$ и множество линейных расслоений на $Y$.
(3) По множеству пучков-небоскрёбов, множеству линейных расслоений и операции "подкрутка на линейное расслоение $L$" на них можно узнать очень много свойств расслоения $L$ (глобальные сечения, обильность и т.п.). Поскольку $\omega_X$ и $\omega_Y$ имеют "одинаковые свойства" (мы уточним в ходе доказательства, что имеется в виду), и одно из них обильно, то и второе тоже. Из этого вместе с предыдущими шагами следует изоморфизм $X$ и $Y$.

3.13. **Как найти пучки-небоскрёбы.** Нам понадобится понятие носителя объекта производной категории. Напомним, что носителем когерентного пучка на многообразии называется множество точек, в которых его слой ненулевой. Это всегда замкнутое множество, и оно пустое тогда и только тогда, когда когерентный пучок нулевой.

3.14. Определение. Пусть $X$ — многообразие, $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — объект производной категории. Тогда (теоретико-множественным) *носителем* $E$ называется объединение $\mathrm{supp}(E) := \cup_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{supp}(H^i(E))$ носителей пучков когомологий $E$.

3.15. Упражнение (простое). Докажите, что для любого $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ носитель $\mathrm{supp}(E)$ — замкнутое множество, и оно пусто тогда и только тогда, когда $E$ — нулевой объект в производной категории.

Докажем сперва такую лемму. В ней $X$ любое, не обязательно с условием из теоремы, то есть канонический класс может быть каким угодно.

3.16. Лемма. *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{L}$ — обильное линейное расслоение на нём. Пусть $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ это объект. Следующие условия эквивалентны:*

- *существует изоморфизм $E \otimes \mathcal{L} \simeq E$*
- *носитель $E$ имеет размерность ноль.*

*Доказательство.* Поскольку подкрутка на $\mathcal{L}$ — точный функтор, достаточно доказать это утверждение для $E$, являющегося когерентным пучком. Если $\dim(\mathrm{supp}(E)) \geq 1$, то найдётся гладкая кривая $C$ с нетривиальным (следовательно, конечным) отображением $f\colon C \to X$ так, что $E_C := f^*E$ имеет полный носитель; тогда $E_C/\mathrm{Tors}(E_C)$ это векторное расслоение $\mathcal{E}$ ненулевого ранга на $C$. По предположению мы знаем, что $\mathcal{E}$ изоморфно подкрутке $\mathcal{E} \otimes f^*\mathcal{L}$, где $f^*\mathcal{L}$ — обильное расслоение, в частности имеет положительную степень. Но при подкрутке меняется степень:

$$\deg(\mathcal{E} \otimes f^*\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{E}) + \deg(f^*\mathcal{L}) \cdot \mathrm{rk}(\mathcal{E}) > \deg(\mathcal{E}).$$

Так быть не может, значит, $\dim(\mathrm{supp}(E)) = 0$. □

Среди объектов с нульмерным носителем легко отличить самые простые — те, которые с точностью до сдвига в производной категории изоморфны просто пучку-небоскрёбу в какой-то точке. Это можно делать разными способами, мы будем следовать формулировке из статьи Бондала–Орлова.

3.17. Лемма. *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, а $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — объект с нульмерным носителем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- $\mathrm{Ext}^{\leq 0}(E, E) \simeq \mathbb{C}[0]$ *(т.е. нет отрицательных экстов, а* Hom *в себя одномерен).*
- *$E \simeq \mathcal{O}_p[m]$ для некоторой точки $p \in X$ и числа $m \in \mathbb{Z}$.*

*Доказательство.* Заметим сначала, что для двух когерентных пучков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с нульмерным носителем можно показать (упражнение по коммутативной алгебре), что $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 0$ тогда и только тогда, когда их носители не пересекаются; а эндоморфизмы $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1)$ одномерны тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_1$ является пучком-небоскрёбом в какой-то точке. Поскольку каждый пучок когомологий объекта $E$ имеет нульмерный носитель, из спектральной последовательности для $\mathrm{Ext}^\bullet(E, E)$ (теорема 2.11) и этого факта легко выводится утверждение леммы.

Можно, конечно, доказать и по индукции с треугольниками обрезания. Ключевой аргумент такой: предположим, что для какой-то точки $p \in X$ более одного пучка когомологий объекта $E$ имеет нетривиальный носитель в $p$. Пусть тогда $i$ — наибольшее, а $j$ — наименьшее целое число, такое, что $p \in \mathrm{supp}(H^i(E))$ или $H^j(E)$, соответственно. Отображение $\tau_{\leq i}(E) \to H^i(E)[-i]$ из треугольника обрезания поднимается до отображения $E \to H^i(E)[-i]$ (докажите!). Аналогично можно построить и отображение $H^j(E)[-j] \to E$, которое задаёт изоморфизм на $j$-тых пучках когомологий. По наблюдению о когерентных пучках тогда существует нетривиальный морфизм $f\colon H^i(E) \to H^j(E)$, с помощью которого можно построить композицию

$$E[i] \to H^i(E) \xrightarrow{f} H^j(E) \to E[j],$$

задающую класс в $\mathrm{Ext}^{j-i}(E, E)$, который не равен нулю, поскольку отображение нетривиально действует на нулевых когомологиях. Однако $j - i$ по предположению это отрицательное число. Получили противоречие, следовательно, каждая точка $p$ из носителя $E$ содержится в носителе ровно одного пучка когомологий. Остальные аспекты доказательства оставляем в качестве упражнения. □

Из двух этих лемм в условиях теоремы 3.12 получается найти все пучки-небоскрёбы в категории $D(X)$, не используя ничего, кроме триангулированной структуры на этой категории.

3.18. Следствие. *Пусть $T$ — триангулированная категория с функтором Серра $S_T$. Предположим, что существует эквивалентность $\Psi\colon T \to D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ триангулированных категорий, где $X$ — какое-то гладкое проективное многообразие, у которого канонический класс $\omega_X$ обилен или антиобилен. Тогда следующие условия на объект $E \in T$ эквивалентны:*

- *для какого-то $m \in \mathbb{Z}$ существует изоморфизм $E \simeq S_T(E)[m]$, и при этом $\mathrm{Ext}^{\leq 0}_T(E, E) \simeq \mathbb{C}[0]$;*
- *объект $\Psi(E) \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ является сдвигом пучка-небоскрёба $\mathcal{O}_x$ для точки $x \in X$ на какое-то число $m' \in \mathbb{Z}$.*

*Доказательство.* Из второго условия первое следует по очевидным причинам. Докажем, что из первого следует второе. В категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ функтор Серра, как мы знаем из теоремы 3.8, это подкрутка на (анти)обильное линейное расслоение $\omega_X$ плюс сдвиг на размерность $X$. По лемме 3.16 из этого следует, что у объекта $\Psi(E) \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ нульмерный носитель (тут сперва надо понять, что происходит со сдвигом в производной категории, но это я оставляю читателю). По лемме 3.17 этот объект ещё и является сдвигом пучка-небоскрёба, что мы и хотели доказать. □

*Замечание.* Отметим, что число $m$ из формулировки обязательно равно размерности многообразия $X$.

Так мы нашли все пучки-небоскрёбы в $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. Что происходит для $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$? С ними можно разобраться с помощью красивого и простого соображения.

3.19. Утверждение. *В условиях теоремы 3.12 функтор $\Phi$ индуцирует биекцию между множеством пучков-небоскрёбов в точках $X$ с точностью до сдвига в производной категории и множеством пучков-небоскрёбов в точках $Y$ с точностью до сдвига. Кроме того,* $\dim(X) = \dim(Y)$.

*Доказательство.* Пусть $y \in Y$ — какая-то точка. Нетрудно проверить, что пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_y$, как объект в производной категории $Y$, удовлетворяет всем условиям следствия 3.18. Значит, $\Phi^{-1}(\mathcal{O}_y)$ изоморфен с точностью до сдвига пучку-небоскрёбу в какой-то точке $x \in X$. При этом из замечания после следствия мы видим, что размерность $Y$ равна размерности $X$.

Предположим теперь, что для какой-то точки $x \in X$ объект $\Phi(\mathcal{O}_x) \in D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ не является сдвигом никакого пучка-небоскрёба в $Y$. Рассмотрим тогда отображения между $\Phi(\mathcal{O}_x)$ и $\mathcal{O}_y$ для произвольной точки $y \in Y$:

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\Phi(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_y) \cong \mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{O}_x, \Phi^{-1}(\mathcal{O}_y)).$$

Мы уже доказали, что $\Phi^{-1}(\mathcal{O}_y)$ является, с точностью до сдвига, пучком-небоскрёбом в какой-то точке $x' \in X$. При этом $x' \neq x$, потому что $\Phi(\mathcal{O}_x)$ по предположению не изоморфно сдвигам пучков-небоскрёбов. Следовательно,

$$\operatorname{Hom}^\bullet(\mathcal{O}_x, \Phi^{-1}(\mathcal{O}_y)) \cong \operatorname{Hom}^\bullet(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_{x'}) = 0.$$

Однако этот аргумент работает для любой точки $y \in Y$. Значит, $\Phi(\mathcal{O}_x) \in D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ это объект, не допускающий отображений ни в какой сдвиг никакого пучка-небоскрёба из $Y$. А так не может быть: если $i \in \mathbb{Z}$ — наибольший индекс, для которого $i$-тый пучок когомологий объекта $\Phi(\mathcal{O}_x)$ ненулевой, а $y \in Y$ — какая-нибудь точка из носителя пучка $H^i(\Phi(\mathcal{O}_x))$, то по лемме 2.10 из прошлой лекции существует нетривиальное отображение $\Phi(\mathcal{O}_x) \to \mathcal{O}_y[-i]$. Это противоречие, следовательно любой пучок-небоскрёб на $X$ переходит, с точностью до сдвига, в пучок-небоскрёб на $Y$, что мы и хотели доказать. □

3.20. **От небоскрёбов к линейным расслоениям.** Благодаря утверждению 3.19 мы теперь знаем, что $\Phi$ задаёт биекцию между точками многообразия $X$ и точками многообразия $Y$. Это уже очень сильное утверждение, и на самом деле является самой сложной частью доказательства. Следующий шаг — описать в терминах пучков-небоскрёбов все линейные (а на самом деле — даже все векторные) расслоения на $X$ и $Y$.

3.21. Утверждение. *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, а $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — какой-нибудь объект. Предположим, что для всех точек $p \in X$ градуированное векторное пространство $\operatorname{Ext}^\bullet(E, \mathcal{O}_p)$ сосредоточено только в какой-то одной степени, т.е. для каждой точки $p \in X$ существует число $m_p \in \mathbb{Z}$ такое, что $\operatorname{Ext}^i(E, \mathcal{O}_p) = 0$ при всех $i \neq m_p$. Тогда:*

- *все числа $m_p$ равны одному и тому же числу $m$;*
- *объект $E$ изоморфен $\mathcal{E}[m]$, где $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на $X$;*
- *ранг расслоения $\mathcal{E}$ равен $\dim \operatorname{Ext}^m(E, \mathcal{O}_p)$ для произвольной точки $p \in X$.*

*Доказательство.* Пусть $j \in \mathbb{Z}$ — наибольшее целое число, при котором $H^j(E) \neq 0$. Если $p \in \operatorname{supp}(H^j(E))$, то по лемме 2.10 из прошлой лекции мы знаем, что

$$\operatorname{Hom}(E, \mathcal{O}_p[-j]) \simeq \operatorname{Hom}(H^j(E), \mathcal{O}_p[-j]) \neq 0$$

С помощью треугольника обрезания

$$\tau_{\leq j-1}(E) \to E \to H^j(E)[-j]$$

несложно доказать, что кроме изоморфизма выше верно ещё и вложение

$$\operatorname{Ext}^1(H^j(E), \mathcal{O}_p) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{O}_p[-j]). \tag{3.21.1}$$

По предположениям леммы градуированное пространство $\operatorname{Hom}^\bullet(E, \mathcal{O}_p[-j])$ нетривиально только в одной градуировке, то есть из того, что $\operatorname{Hom}(E, \mathcal{O}_p[-j]) \neq 0$, следует, что $\operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{O}_p[-j]) = 0$. Из инъективности отображения (3.21.1) следует, что тогда $\operatorname{Ext}^1(H^j(E), \mathcal{O}_p) = 0$ для всех точек $p \in \operatorname{supp}(H^j(E))$.

Из этого уже всё следует при помощи классического утверждения из коммутативной алгебры: *локальный критерий плоскости* утверждает, что если $R$ — нётерово локальное кольцо, $M$ — конечно-порождённый модуль над ним, то следующие свойства эквивалентны:

- $M$ — свободный модуль над $R$;
- $M$ — плоский модуль над $R$;
- $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{m}) = 0$;
- $\mathrm{Ext}^1_R(M, R/\mathfrak{m}) = 0$.

*Замечание.* Эквивалентность первых трёх условий следует из леммы Накаямы, доказательство можно найти в учебниках по коммутативной алгебре ([AM01, Гл. 7, Упр. 15] или, например, в [Sta24, 00MK]); третье и четвёртое оба вычисляются при помощи свободной резольвенты для $M$. (На мой вкус самый удобный способ про это думать — помнить, что над локальными нётеровыми кольцами у конечно-порождённых модулей существуют *минимальные резольвенты*, т.е. такие свободные резольвенты, что каждый дифференциал равен нулю по модулю максимального идеала. В этом случае обращение $\mathrm{Ext}^1(M, R/\mathfrak{m})$ в ноль означает, что минимальная резольвента имеет длину ноль, то есть модуль $M$ — свободный.)

По локальному критерию плоскости когерентный пучок $H^j(E)$ становится свободным модулем над локальным кольцом любой точки из своего носителя, ну а уж вне носителя пучок нулевой и тем самым тоже свободный. Значит, пучок $H^j(E)$ — локально свободный над $X$, то есть является векторным расслоением. Для завершения доказательства осталось проверить, что у объекта $E$, удовлетворяющего условиям утверждения, в таком случае не может быть нетривиальных пучков когомологий, кроме $j$-той. Эту проверку мы оставляем читателю. (*Указание*: рассмотрите треугольник обрезания для $E$ и применяйте функторы $\mathrm{Hom}^\bullet(-, \mathcal{O}_p)$.) Число $m$ из формулировки утверждения равно $j$. ☐

3.22. Следствие. *В условиях теоремы 3.12 функтор $\Phi$ задаёт биекцию между множествами:*

- *векторных расслоений на $X$ как объектов в $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, с точностью до сдвига; и*
- *векторных расслоений на $Y$ как объектов в $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$, с точностью до сдвига,*

*причём эта биекция сохраняет ранги векторных расслоений.*

*Доказательство.* По утверждению 3.19 мы знаем, что $\Phi$ индуцирует биекцию между множествами пучков-небоскрёбов с точностью до сдвига в категориях $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ и $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$. В формулировке утверждения 3.21 неважно, берём ли мы пучок-небоскрёб или какой-то его сдвиг, поэтому из этого утверждения следует, что множества векторных расслоений с точностью до сдвига определяются по структуре триангулированной категории и по множеству пучков-небоскрёбов. ☐

3.23. **Финал доказательства.** По следствию 3.22 мы знаем, что $\Phi(\mathcal{O}_X) \in D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ изоморфно $L[m]$, для какого-то линейного расслоения $L$ на $Y$ и какого-то $m \in \mathbb{Z}$. Заменив $\Phi$ на композицию $[-m] \circ \Phi$, можно считать, что $\Phi$ переводит $\mathcal{O}_X$ в линейное расслоение, размещённое в степени ноль.

3.24. Упражнение. Докажите, что если $\Phi(\mathcal{O}_X) \simeq L$ для линейного расслоения $L$ на $Y$, то тогда $\Phi$ от любого пучка-небоскрёба на $X$ является пучком-небоскрёбом на $Y$ (без сдвига в производной категории) и $\Phi$ от любого расслоения на $X$ является расслоением на $Y$ (тоже без сдвига).

Согласно этому упражнению можно считать, что $\Phi$ переводит линейные расслоения на $X$ в линейные расслоения на $Y$, причём по лемме 3.10 мы знаем, что эта биекция $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(Y)$ коммутирует с операцией подкрутки на канонический класс.

3.25. Лемма. *В условиях теоремы 3.12 для каждого $m \in \mathbb{Z}$ функтор $\Phi$ индуцирует изоморфизм векторных пространств*

$$H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}),$$

*согласованный с операциями умножения $H^0(\omega^{\otimes m_1}) \otimes H^0(\omega^{\otimes m_2}) \to H^0(\omega^{\otimes m_1+m_2})$ слева и справа.*

*Доказательство.* Выберем какое-нибудь линейное расслоение $L$ на $X$ и обозначим через $M \simeq \Phi(L)$ соответствующее линейное расслоение на $Y$. По утверждению 3.19 мы знаем, что размерности $X$ и $Y$ равны (и однозначно определяются по триангулированной структуре категории). Обозначим через $\widetilde{S}_X$ и $\widetilde{S}_Y$ функторы подкруток на $\omega_X$ и $\omega_Y$, соответственно; поскольку функтор $\Phi$ коммутирует с функторами Серра, он коммутирует и с этими двумя функторами тоже. Следовательно,

$$H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \cong \mathrm{Hom}_X(L, \widetilde{S}_X^m(L)) \cong \mathrm{Hom}_Y(M, \widetilde{S}_Y^m(M)) \cong H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}),$$

где первый и третий изоморфизм получаются из того, что подкрутка на линейное расслоение — строго точный функтор, а второй — из того, что $\Phi$ — эквивалентность категорий, коммутирующая с функторами Серра. Поскольку умножение сечений соответствует применению функторов $\widetilde{S}_X$ и $\widetilde{S}_Y$ несколько раз, изоморфизм по построению согласован с этой операцией. □

*Замечание.* Отметим, что утверждение верно и для отрицательных степеней $m \in \mathbb{Z}$, просто надо брать обратный функтор к функтору Серра.

Предположим, что в условиях теоремы $\omega_X$ — обильное линейное расслоение на $X$. В дальнейшем случай обильности от антиобильности ничем по сути не отличается, поэтому мы обсудим только такой случай. Тогда по определению проективного многообразия верно, что

$$X \simeq \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \omega_X^{\otimes m})\right).$$

Если бы мы знали ещё, что и у $Y$ каноническая линейная система обильна, то из леммы 3.25 следовал бы искомый изоморфизм $X$ и $Y$. Осталось каким-нибудь образом вывести, полагаясь на многочисленные доказанные нами свойства функтора $\Phi$, что обильность $\omega_X$ влечёт обильность $\omega_Y$. В оригинальной статье Бондала и Орлова это делается таким способом.

Во-первых, они замечают, что имея в какой-нибудь категории множество пучков-небоскрёбов и множество линейных расслоений, можно определить топологию Зариского: если $f\colon L_1 \to L_2$ это какое-нибудь отображение между линейными расслоениями, то значение $f$ в замкнутой точке $p \in X$ не равно нулю тогда и только тогда, когда отображение

$$\mathrm{Hom}(L_2, \mathcal{O}_p) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}(L_1, \mathcal{O}_p)$$

является изоморфизмом. Значит, можно определить подмножество пучков-небоскрёбов на точках открытого множества, где $f \neq 0$. Легко проверить, что на (квази)проективном многообразии открытые множества такого вида задают базу топологии Зариского (в ограничении на множество замкнутых точек, что при работе над $\mathbb{C}$ достаточно хорошо). Благодаря утверждениям 3.19 и 3.22 из этого следует, что функтор $\Phi$ не просто задаёт биекцию на множестве (замкнутых) точек $X$ и $Y$, а задаёт гомеоморфизм топологий Зариского.

Во-вторых, существует топологический критерий обильности: если для получения базы топологии Зариского вышеописанной процедурой достаточно зафиксировать какие-то два линейных расслоения $L_1$ и $L_2$ и варьировать только отображение между ними, то линейное расслоение $L_1^\vee \otimes L_2$ обильно (в статье ссылка на SGA, но можно доказать и самостоятельно, это интересное упражнение). Тогда для доказательства обильности $\omega_Y$ достаточно взять любое линейное расслоение $L$ в качестве $L_1$, а в качестве $L_2$ взять $\widetilde{S}_Y^m(L_1)$ при каком-нибудь $m \gg 0$. Мы знаем, что сечений будет "столько же", сколько на $X$ по лемме 3.25, поэтому обильность $\omega_X$ и $\omega_Y$ равносильна. И вся теорема теперь доказана.

*Замечание.* В книге Хёйбрехтса другой подход к доказательству этого последнего шага, менее магический: классическое определение обильности через то, что глобальные сечения (какой-то степени) разделяют точки и касательные вектора тоже можно проверять в терминах отображений между пучками-небоскрёбами и линейными расслоениями. См. [Huy06, Prop. 4.11].

## 4. Преобразования Фурье–Мукаи и их свойства

Напомню, что мы, как и всегда, обсуждаем только гладкие проективным многообразия. В этой лекции и дальше для многообразия $X$ мы обычно будем использовать сокращённое обозначение $D(X)$ для категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. Напомню дополнительно, что все функторы по умолчанию подразумеваются производными.

4.1. **Предварительные сведения.** Сегодня нам понадобятся несколько важных свойств "геометрических" производных функторов: прямого образа, обратного образа, тензорного произведения и т.п. Они, в основном, являются обобщениями утверждений о когерентных пучках, но благодаря удачному формализму производных категорий верны в большей общности.

Начнём с важного утверждения о согласованности прямого и обратного образа.

4.2. Лемма (формула проекции). *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм гладких проективных многообразий, а $E \in D(X)$ и $F \in D(Y)$ — пара объектов. Тогда существует функториальный изоморфизм $f_*(E) \otimes F \cong f_*(E \otimes f^*(F))$.*

Доказывать эту формулу мы не будем. Морфизм из левого объекта в правый строится с помощью сопряжённости прямого и обратного образа. Напомню, что для когерентных пучков формулой проекции называется выглядящий ровно так же изоморфизм, только функторы $f_*$ и $f^*$ тогда подразумеваются не-производными, а пучок $F$ — не произвольный, а обязательно векторное расслоение. Поскольку определение производного пулбэка и производного тензорного произведения состоит в том, что надо произвольный объект заменить на резольвенту из векторных расслоений, не так удивительно, что для производных категорий утверждение формулы проекции не накладывает никаких ограничений на $F$.

Из нерассказанного на лекции. Есть приятный, хоть и не особенно полезный, способ думать про формулу проекции: категория $D(Y)$ является моноидальной категорией, т.е., в ней есть прямые суммы и тензорные произведения. Моноидальные категории можно воспринимать как категорификацию понятия кольца. Обратный образ $f^*$ задаёт на категории $D(X)$ структуру "модуля" над $D(Y)$, а формула проекции утверждает, что прямой образ $f_*\colon D(X) \to D(Y)$ является гомоморфизмом модулей над $D(Y)$.

4.3. Следствие. *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм гладких проективных многообразий. Тогда для любого объекта $F \in D(Y)$ существует изоморфизм $f_* f^* F \cong F \otimes f_* \mathcal{O}_X$.*

*Доказательство.* Возьмём в формуле проекции в качестве объекта $E$ структурный пучок $\mathcal{O}_X$. Поскольку он локально свободный, то производное тензорное умножение на $\mathcal{O}_X$ совпадает с почленным обычным тензорным произведением, то есть является тождественным функтором. Значит, в этом случае формула проекции даёт в точности нужный нам изоморфизм. □

Как мы упоминали раньше, производные функторы прямого и обратного образа сопряжены друг другу. На самом деле верно ещё более сильное утверждение: у производного прямого образа есть не только левый сопряжённый (обратный образ), но и правый. Существование правого сопряжённого функтора, его явное описание и изучение его свойств называется двойственностью Гротендика (в книге [Huy06] используется термин "двойственность Гротендика–Вердье"). Это, вообще говоря, очень сложная деятельность, но для морфизмов между гладкими проективными многообразия всё легко следует из двойственности Серра.

4.4. Теорема. *Пусть $f\colon X \to Y$ — морфизм гладких проективных многообразий. Тогда у функтора $f_*\colon D(X) \to D(Y)$ существует правый сопряжённый функтор*

$$f^!\colon D(Y) \to D(X),$$

*иногда его называют исключительным обратным образом), который задаётся формулой*

$$f^!(-) := f^*(-) \otimes \omega_X \otimes f^*(\omega_Y^\vee)[\dim X - \dim Y].$$

*Замечание.* Из такого определения функтора $f^!$ видно, что он действует локально по базе, в том смысле, что знания того, как объект устроен на открытом множестве $U \subset Y$, достаточно, чтобы вычислить ограничение его исключительного обратного образа на открытое подмножество $f^{-1}(U) \subset X$. Сопряжённость с функтором прямого образа тоже выполняется локально, т.е., для любых двух объектов $E \in D(X)$, $F \in D(Y)$ существует функториальный изоморфизм

$$f_* \mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_X(E, f^!(F)) \cong \mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_Y(f_*(E), F).$$

Напомним, что одним из свойств внутренного Hom-функтора является изоморфизм

$$\mathrm{R}\Gamma\left(\mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}(A, B)\right) \cong \mathrm{RHom}(A, B)$$

для любых $A$ и $B$, поэтому применение $\mathrm{R}\Gamma$ к двум сторонам этого изоморфизма как раз демонстрирует сопряжённость функторов в обычном смысле.

*Доказательство.* Пусть $E \in D(X)$ и $F \in D(Y)$ — два объекта. Для вычисления левого сопряжённого функтора к прямому образу $f_*$ рассмотрим градуированное пространство $\mathrm{RHom}_Y(f_*E, F)$ и применим сначала двойственность Серра на $Y$, затем сопряжённость прямого и обратного образа, а потом — снова двойственность Серра, но уже на $X$. Напомним, что функтор Серра для $X$ имеет вид $- \otimes \omega_X[\dim X]$ и аналогично для $Y$.

$$\begin{aligned}\mathrm{RHom}_Y(f_*E, F) &\cong \mathrm{RHom}_Y(F, f_*E \otimes \omega_Y[\dim Y])^\vee \cong \mathrm{RHom}_Y(F \otimes \omega_Y^\vee[-\dim Y], f_*E)^\vee \cong \\ &\cong \mathrm{RHom}_X(f^*(F) \otimes f^*(\omega_Y^\vee)[-\dim Y], E)^\vee \cong \\ &\cong \mathrm{RHom}_X(E, f^*(F) \otimes f^*\omega_Y^\vee[-\dim Y] \otimes \omega_X[\dim X]).\end{aligned}$$

Легко видеть, что в конце написано как раз выражение $f^!(F)$. Поскольку все проделанные нами преобразования функториальны, это доказывает сопряжённость $f_*$ и $f^!$. $\square$

*Замечание.* Существование правого сопряжённого функтора к производному прямому образу между *большими* категориями $D(\mathrm{QCoh}(X)) \to D(\mathrm{QCoh}(Y))$ следует из чисто категорных соображений [Nee96], причём далеко не только в случае, когда оба многообразия $X$ и $Y$ гладкие и проективные. Но при таком подходе сложно выяснить, как именно действует функтор $f^!$.

Ещё один чрезвычайно важный факт о функторах производного прямого и обратного образа — теореме о замене базы. Она часто позволяет упростить вычисление композиции нескольких производных функторов, а так же, с более концептуальной точки зрения, позволяет доказывать некоторые утверждения о производных категориях локально по базе. Мы, как обычно, сформулируем теорему не в полной степени общности, а в минимальной достаточной для целей этого курса.

4.5. Теорема. *Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y' \to Y$ — два морфизма гладких проективных многообразий. Рассмотрим расслоенное произведение:*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

*Если хотя бы один из двух морфизмов $f$ и $g$ является плоским, то для любого объекта $E \in D(X)$ функториальное отображение $g^*f_*E \xrightarrow{\sim} f'_*g'^*E$ объектов в $D(Y')$ является изоморфизмом.*

Если сравнить это утверждение, например, с теоремой о замене базы для когерентных пучков в Хартсхорне ([Хар81, Утв. 9.3]), то кажется удивительным, что нам достаточно плоскости любого из двух морфизмов $f$ и $g$. В книге Хартсхорна, как и во многих других классических источниках, требуют плоскости именно морфизма $g$, вдоль которого берётся обратный образ. Там это делается для минимизации технической работы с производными функторами, а вообще в естественной общности нужна даже не плоскость какого-нибудь из морфизмов $f$ и $g$, а только их *Tor-независимость*: нужно, чтобы для любых трёх аффинных открытых подсхем

$$\mathrm{Spec}(R_X) \cong U_X \subset X, \quad \mathrm{Spec}(R_Y) \cong U_Y \subset Y, \quad \mathrm{Spec}(R_{Y'}) \cong U_{Y'} \subset Y',$$

для которых $f(U_X) \subset U_Y$ и $g(U_{Y'}) \subset U_Y$, было верно, что производное тензорное произведение $R_X$ и $R_{Y'}$ в категории $R_Y$-модулей было просто модулем, а не комплексом модулей, то есть, что $\mathrm{Tor}_i^{R_Y}(R_X, R_{Y'}) = 0$ при всех $i \neq 0$. Этого условия Tor-независимости достаточно, чтобы была верна теорема о замене базы (см., например, [Sta24, Tag 08IB]).

Если хотя бы один из морфизмов плоский, то Tor-независимость автоматически выполняется, но есть и другие ситуации. Например, бывает полезно применять замену базы в случае, когда и $f$, и $g$ являются вложениями гладких подмногообразий в $Y$, и тогда условие Tor-независимости означает, что коразмерность пересечения $X$ и $Y'$ в $Y$ равна ожидаемой, то есть сумме коразмерностей этих двух подмногообразий.

## 4.6. **Преобразования Фурье–Мукаи.**

4.7. Определение. Пусть $X$ и $Y$ — гладкие проективные многообразия. Пусть $K \in D(X \times Y)$ — какой-нибудь объект. Тогда *преобразованием Фурье–Мукаи с ядром* $K$ называется функтор $\Phi_K \colon D(X) \to D(Y)$, определённый формулой

$$\Phi_K(-) := \pi_{Y*}(\pi_X^*(-) \otimes K).$$

Такого рода определения встречаются отнюдь не только при изучении производных категорий: таким же образом, с помощью объектов на произведении многообразий, определяются соответствия в теории мотивов, операции на когомологиях и в $K$-теории, и т.п.

*Замечание.* Свойства функторов такого вида между производными категориями в явном виде начал изучать Мукаи [Muk81]. Фурье тут особенно ни при чём, определение больше похоже на общее понятие интегрального преобразования, чем именно на преобразование Фурье. В статье Мукаи основные результаты были про один конкретный функтор, который мы обсудим в разделе 4.17. Именно этот один функтор был в чём-то аналогичен преобразованию Фурье, а дальше название прижилось.

Обсудим примеры.

*Пример.* Наверное, самым важным примером преобразования Фурье–Мукаи является тождественный функтор. Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Рассмотрим структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_{\Delta_X} \in D(X \times X)$. Он изоморфен прямому образу $\Delta_*(\mathcal{O}_X)$ при диагональном вложении $\Delta \colon X \hookrightarrow X \times X$. Отметим, кстати, что поскольку при замкнутом вложении прямой образ точен, то тут производный прямой образ от пучка $\mathcal{O}_X$ совпадает с обычным прямым образом. Покажем, что $\Phi_{\Delta_X}$ — тождественный функтор на $D(X)$. В самом деле, для объекта $E \in D(X)$ имеем

$$\Phi_{\Delta_X}(E) \cong \pi_{2*}(\pi_1^*(E) \otimes \Delta_{X*}(\mathcal{O}_X)) \cong \pi_{2*}(\Delta_{X*}(\Delta_X^*(\pi_1^* E) \otimes \mathcal{O}_X))$$

по формуле проекции для вложения $\Delta_X \colon X \hookrightarrow X \times X$. Поскольку композиция $\pi_1 \circ \Delta_X$ это тождественное отображение $X \to X$, а тензорное произведение на структурный пучок это тождественное отображение на $D(X)$, мы доказали пока что, что

$$\Phi_{\Delta_X}(E) \cong \pi_{2*}(\Delta_{X*}(E)).$$

Но опять-таки, поскольку $\pi_2 \circ \Delta_X$ это тождественное отображение, получаем, что $\Phi_{\Delta_X}(E)$ канонически изоморфно $E$. Формула проекции и все проделанные нами отождествления функториальны по $E$, поэтому мы доказали изоморфизм функторов между $\Phi_{\Delta_X}$ и тождественным функтором $D(X)$.

*Пример.* Прямые образы и обратные образы — тоже примеры преобразований Фурье–Мукаи. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение гладких проективных многообразий. Графиком отображения $f$ называется подмногообразие $\Gamma_f \subset X \times Y$, состоящее из пар $(x, f(x))$. Иначе говоря, это образ естественного отображения $X \to X \times Y$. Тогда функтор $\Phi_{\Gamma_f}$ (где мы имеем в виду структурный пучок этого подмногообразия в качестве ядра) изоморфен функтору прямого образа $f_*\colon D(X) \to D(Y)$. Если же рассмотреть график морфизма $f$ как подмногообразие в $Y \times X$, что мы будем обозначать через $\tau(\Gamma_f)$, то $\Phi_{\tau(\Gamma_f)}$ изоморфен функтору обратного образа $f^*\colon D(Y) \to D(X)$. Оба утверждения несложно доказываются с помощью формулы проекции, как в предыдущем примере (упражнение).

*Пример.* Тензорное произведение на фиксированный объект $E \in D(X)$ — тоже преобразование Фурье–Мукаи. В качестве подходящего ядра можно взять $\Delta_*(E) \in D(X \times X)$, где $\Delta\colon X \hookrightarrow X \times X$ это диагональ. Доказательство идентично первому примеру. Отметим, кстати, что частным случаем тензорного произведения является сдвиг в производной категории, потому что для любого $F \in D(X)$ и любого $k \in \mathbb{Z}$ верно $F \otimes \mathcal{O}_X[k] \cong F[k]$, а ядром Фурье–Мукаи для сдвига будет $\Delta_*(\mathcal{O}_X[k])$.

4.8. **Свойства преобразований Фурье–Мукаи.** Композиция преобразований Фурье–Мукаи тоже является преобразованием Фурье–Мукаи, и ядро для композиции можно выписать в терминах двух данных ядер.

4.9. Утверждение. *Пусть $X, Y, Z$ — три гладких проективных многообразия. Пусть $K_{XY} \in D(X \times Y)$ и $K_{YZ} \in D(Y \times Z)$ — два объекта. Тогда существует изоморфизм функторов между композицией $\Phi_{K_{YZ}} \circ \Phi_{K_{XY}}$ и преобразованием Фурье–Мукаи $\Phi_{K_{XZ}}$, где $K_{XZ}$ определяется в терминах морфизмов из диаграммы*

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \times Z \arrow[dl, "\pi_{XY}"'] \arrow[d, "\pi_{XZ}"'] \arrow[dr, "\pi_{YZ}"] & \\ X \times Y & X \times Z & Y \times Z \end{tikzcd}$$

*как объект $\pi_{XZ*}(\pi_{XY}^*(K_{XY}) \otimes \pi_{YZ}^*(K_{YZ}))$*

*Доказательство.* Доказательство пропустим. Это утверждение на многократное применение формулы проекции и замену базы для плоских морфизмов. Подробное доказательство дано в книжке [Huy06, Prop. 5.10]. Там, кстати, красивая диаграмма, на которой удалось изобразить все нужные морфизмы проекции. ☐

Из Утверждения 4.9 и примеров, данных в разделе 4.6, следует, что все функторы, которые можно определить, используя сочетания стандартных геометрических функторов между производными категориям когерентных пучков (прямые образы, обратные образы, тензорные произведения, сдвиги), являются преобразованиями Фурье–Мукаи, к тому же с явно построенными ядрами. Какие ещё функторы являются преобразованиями Фурье–Мукаи и что про этот вопрос известно, мы обсудим в разделе 4.11.

Другое важное свойство преобразований Фурье–Мукаи связано с сопряжёнными функторами. У каждого преобразования Фурье–Мукаи существуют и левый, и правый сопряжённый функтор, и к тому же они являются преобразованиями Фурье–Мукаи с явно выписываемыми ядрами. (Тут мы используем, что для нас все многообразия гладкие и проективные! Иначе сопряжённые функторы есть только между "большими" категориями, а не для $D^b_{\mathrm{coh}}$.)

4.10. Утверждение. *Пусть $K \in D(X \times Y)$ — какой-нибудь объект. Обозначим через $\tau(K)$ его пулбэк при перемене мест множителей $X \times Y \to Y \times X$. Рассмотрим объекты*

$$K_L := \tau(K)^\vee \otimes \pi_Y^* \omega_Y[\dim Y]$$
$$K_R := \tau(K)^\vee \otimes \pi_X^* \omega_X[\dim X]$$

*в категории $D(Y \times X)$, где $\pi_X$ и $\pi_Y$ — две проекции из $Y \times X$ на $X$ и $Y$, соответственно, а двойственный объект, как всегда, имеется в виду в производном смысле. Тогда функтор $\Phi_{K_L}$ — левый сопряжённый к функтору $\Phi_K$, а функтор $\Phi_{K_R}$ — правый сопряжённый к $\Phi_K$.*

*Доказательство.* Это следует из двойственности Гротендика (теоремы 4.4). Вычислим, например, правый сопряжённый к функтору $\Phi_K$. Пусть $E \in D(X)$, $F \in D(Y)$ — два объекта. Тогда, используя определение $\Phi_K$ и сопряжённость между функторами $\pi_{Y*}$ и $\pi_Y^!$, получаем:
(4.10.1)

$$\mathrm{RHom}_Y(\Phi_K(E), F) \cong \mathrm{RHom}_Y(\pi_{Y*}(\pi_X^*(E) \otimes K), F) \cong \mathrm{RHom}_X(\pi_X^*(E) \otimes K, \pi_Y^!(F)).$$

По теореме 4.4 функтор $\pi_Y^!$ отличается от обычного функтора обратного образа $\pi_Y^*$ подкруткой на сдвиг линейного расслоения

$$\omega_{X \times Y} \otimes \pi_Y^*(\omega_Y^\vee)[\dim X \times Y - \dim Y] \cong \pi_X^*(\omega_X)[\dim X],$$

где мы использовали, что $\omega_{X \times Y} \cong \pi_X^*(\omega_X) \otimes \pi_Y^*(\omega_Y)$ (упражнение).

Вернёмся к вычислению сопряжённого функтора. Подставив в формулу (4.10.1) определение функтора $\pi_Y^!$, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{RHom}_Y(\Phi_K(E), F) &\cong \mathrm{RHom}_X(\pi_X^*(E), K^\vee \otimes \pi_Y^*(F) \otimes \pi_X^*(\omega_X)[\dim X]) \cong \\ &\cong \mathrm{RHom}_X(E, \pi_{X*}(K^\vee \otimes \pi_Y^*(F) \otimes \pi_X^*(\omega_X)[\dim X])).\end{aligned}$$

Поскольку все изоморфизмы были функториальны по паре объектов $E$ и $F$, это вычисление доказывает, что преобразование Фурье–Мукаи относительно $K_R$ является правым сопряжённым функтором к $\Phi_K$, что мы и хотели проверить. □

Из нерассказанного на лекции. Пусть $K_1, K_2 \in D(X \times Y)$ — два объекта, а $f\colon K_1 \to K_2$ — отображение между ними в производной категории $X \times Y$. Тогда $f$ индуцирует естественное преобразование $\Phi_f\colon \Phi_{K_1} \to \Phi_{K_2}$ между функторами $D(X) \to D(Y)$. Более того, если вписать морфизм $f$ в выделенный треугольник

$$K_1 \xrightarrow{f} K_2 \to \mathrm{Cone}(f) \to K_1[1],$$

то получится “выделенный треугольник” из функторов:

$$\Phi_{K_1} \to \Phi_{K_2} \to \Phi_{\mathrm{Cone}(f)} \to \Phi_{K_1}[1],$$

в том смысле, что при применении этих функторов к какому-нибудь объекту $E \in D(X)$ получится функториальный выделенный треугольник в $D(Y)$. Убрать кавычки в фразе про выделенный треугольник из функторов сложно: категория (триангулированных) функторов из $D(X)$ в $D(Y)$ триангулированной совсем не является. Что-то осмысленное можно сказать, только перейдя к более сложным объектам, чем триангулированные категории (dg-категории, стабильные $\infty$-категории и т.п.). Или же нужно последовательно говорить исключительно про ядра Фурье–Мукаи вместо функторов.

4.11. **Фурье–Мукаи и не Фурье–Мукаи: теорема Орлова.** Понятие преобразования Фурье–Мукаи позволяет по любому объекту из производной категории $D(X \times Y)$ строить функтор между триангулированными категориями $D(X)$ и $D(Y)$. Но какие свойства у этой конструкции? Например, любой ли функтор $D(X) \to D(Y)$ является преобразованием Фурье–Мукаи? Или: если про функтор известно, что он является преобразованием Фурье–Мукаи, то однозначно ли определёно его ядро $K \in D(X \times Y)$, или может быть несколько вариантов?

Из нерассказанного на лекции. По морфизмам в $D(X \times Y)$ строятся естественные преобразования между функторами. Иными словами, конструкция из определения 4.7 — это функтор из производной категории $D(X \times Y)$ в категорию триангулированных функторов $\mathrm{Fun}_{\mathrm{triang}}(D(X), D(Y))$. И тогда возникает ещё ряд вопросов, связанных не только с функторами, но и с естественными преобразованиями между ними. Верно ли, что любое естественное преобразование между функторами Фурье–Мукаи получается морфизмом ядер? И прочие.

Неформально ответ такой: категория $D(X \times Y)$ во всех смыслах лучше, правильнее и удобнее, чем категория точных функторов $D(X) \to D(Y)$ между триангулированными категориями, а у самой этой категории функторов никаких хороших свойств нет. Но есть и хорошие новости. Орлов доказал в 1997 году, что если функтор $D(X) \to D(Y)$ строго полный, т.е. является вложением полной подкатегории, то такой функтор всегда допускает ядро Фурье–Мукаи.

4.12. Теорема ([Orl97]). *Пусть $X$ и $Y$ — гладкие проективные многообразия, и пусть $\Psi\colon D(X) \to D(Y)$ — точный функтор между производными категориями когерентных пучков на $X$ и $Y$, имеющий сопряжённый функтор хотя бы с одной стороны. Тогда существует единственный с точностью до единственного изоморфизма объект $K \in D(X \times Y)$, для которого преобразование Фурье–Мукаи $\Phi_K$ изоморфно функтору $\Psi$.*

*Замечание.* Как мы увидим в дальнейших лекциях, наличие сопряжённых функторов к $\Psi$ получается автоматически из гладкости и собственности $X$ и $Y$.

Поскольку эквивалентность категорий по определению является строго полным функтором, а обратный функтор к эквивалентности является к ней заодно и сопряжённым, получаем такое важное следствие:

4.13. Следствие. *Любая эквивалентность производных категорий когерентных пучков $D(X) \xrightarrow{\sim} D(Y)$ является преобразованием Фурье–Мукаи.*

Доказательство теоремы Орлова довольно сложное, поэтому мы её доказывать не будем. В принципе, могли бы, но для этого нужна была бы целая отдельная лекция. Ограничусь двумя замечаниями:

- искомое ядро $K \in D(X \times Y)$ строится в доказательстве явно. Пишется некоторый комплекс на $D(X \times Y)$, преобразование Фурье–Мукаи для которого по построению ведёт себя "так же", как данный функтор $\Psi$, при вычислении на линейных расслоениях $\mathcal{O}_X(n) \in D(X)$ для некоторого конечного числа подкруток $n$, а дальше показывается, что из этой совместимости следует изоморфизм функторов $\Psi$ и $\Phi_K$.
- существенно отличающихся доказательств теоремы Орлова не появилось, но с годами люди придумали некоторые упрощения отдельных шагов. Если хочется понять доказательство, рекомендую читать не оригинальную статью, а, например, [Ola24]. Там, заодно, утверждение доказано для любых собственных многообразий, а не только для проективных.

В качестве замены доказательству обсудим такой **вопрос**: пусть мы заранее откуда-то знаем, что функтор $\Psi$ является преобразованием Фурье–Мукаи относительно *когерентного пучка* $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X \times Y) \subset D(X \times Y)$. Как нам тогда по функтору $\Psi$ понять, что это был за пучок?

**Ответ**: сначала введём обозначения. Пусть $\mathcal{O}(H)$ — обильное линейное расслоение на $X$, а $\mathcal{O}(h)$ — на $Y$. Тогда линейное расслоение $\mathcal{O}(H+h)$ будет обильным на $X \times Y$. Здесь мы используем стандартное соглашение, что пулбэк линейного расслоения обозначается той же буквой, что и снизу, то есть строго говоря под $\mathcal{O}(H+h)$ мы имеем в виду расслоение $\pi_X^*(\mathcal{O}_X(H)) \otimes \pi_Y^*(\mathcal{O}_Y(h))$.

Напомним важную теорему Серра о когерентных пучках на проективных многообразиях: пучок $\mathcal{F}$ однозначно восстанавливается по градуированному модулю

$$\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n \cdot (H+h)))$$

над градуированной алгеброй

$$\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X \times Y, \mathcal{O}(n \cdot (H+h))),$$

причём достаточно знать градуированный модуль не целиком, а только в градуировках при $n \gg 0$. Поскольку глобальные сечение — это (не-производный) прямой образ при отображении в точку, то для вычисления градуированного модуля можно сначала взять прямой образ подкрутки пучка $\mathcal{F}$ при проекции $X \times Y \to Y$, и посчитать глобальные сечения на $Y$. Это уже начинает напоминать определение преобразования Фурье–Мукаи. И в самом деле, используя формулу проекции, легко увидеть, что

$$\Phi_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_X(nH)) \otimes \mathcal{O}_Y(nh) \cong \pi_{Y*}(\mathcal{F} \otimes \pi_X^*\mathcal{O}_X(nH) \otimes \pi_Y^*\mathcal{O}_Y(nh)).$$

Значит, при $n \gg 0$ (гипер)когомологии $\mathrm{R}\Gamma_Y(\Phi_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_X(nH)) \otimes \mathcal{O}_Y(nh))$ — это как раз прямая сумма когомологий подкрутки пучка $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n \cdot (H+h))$. Наконец, вспомним, что раз $\mathcal{O}(H+h)$ обильно, то при $n \gg 0$ у этой подкрутки останутся только нулевые когомологии. Получается, что как только мы знаем значения функтора $\Phi_{\mathcal{F}}$ на линейных расслоениях $\mathcal{O}_X(nH)$ и на морфизмах между ними (это нужно для структуры модуля, иначе мы получили бы только градуированное векторное пространство), то пучок $\mathcal{F}$ однозначно определён по теореме Серра.

*Замечание.* Вариация этого аргумента показывает, что для любого объекта $K \in D(X \times Y)$ по функтору $\Phi_K$ довольно легко восстановить все *пучки когомологий* объекта $K$ (см., например, [CS12, Prop. 4.3]). Однако извлечь из этого наблюдения полное доказательство теоремы Орлова, по-видимому, невозможно: как мы обсуждали ранее, объект в производной категории это не просто набор пучков когомологий, а ещё и хитрые "высшие" данные склейки между ними, которые даже чётко выписать сложно, не то что построить явно таким грубым методом с вычислением когомологий больших подкруток.

4.14. **Фурье–Мукаи и не Фурье–Мукаи: контрпримеры.** Теорема Орлова обрадовала многих математиков, даже была гипотеза, что любой триангулированный функтор является преобразованием Фурье–Мукаи. Но, увы, это совсем не так. В 2014 году, через семнадцать лет после статьи Орлова, появились убедительные контрпримеры (опубликован этот результат был ещё чуть позже).

4.15. Теорема ([RVN19]). *Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ — трёхмерная гладкая квадрика. Тогда существует точный функтор $F\colon D(Q) \to D(\mathbb{P}^4)$ между триангулированными категориями, имеющий оба сопряжённых, и не являющийся преобразованием Фурье–Мукаи.*

Главная сложность в том, что все "естественные", геометрические функторы по построению допускают ядра Фурье–Мукаи, и надо как-то соорудить "искусственный" функтор, скорее алгебраического характера, а как это делать — непонятно. Простого ответа не нашлось. Если для полного доказательства теоремы Орлова нам потребовалась бы целая отдельная лекция, то доказательство теоремы 4.15 это уже скорее тема для спецкурса на семестр. Сейчас есть существенные обобщения этого результата, и в целом между более-менее любой парой производных категорий построены функторы, не приходящие из ядер в $D(X \times Y)$, но доказательства остаются сложными.

Вскоре после этого Вологодский заметил [Vol19], что если интересоваться не только комплексными числами, но и полями конечной характеристики (напомню, что у нас-то в курсе всё подразумевается над $\mathbb{C}$! Многие утверждения остаются верными над любым полем, но не все), то функторы, не являющиеся преобразованиями Фурье–Мукаи, легко найти и среди естественно встречающихся в жизни геометрических операций. А именно, если $X$ — схема над $\mathbb{F}_p$, которая поднимается до гладкой проективной схемы $\mathcal{X}$ над кольцом целых $p$-адических чисел, то композиция прямого образа при вложении $X \hookrightarrow \mathcal{X}$ и ограничения обратно на $X$ может быть функтором Фурье–Мукаи только для многообразий $X$ с очень серьёзными ограничениями. В частности, для пространств флагов, кроме $\mathbb{P}^1$, эта композиция функторов, как отображение $\mathbb{F}_p$-линейных триангулированных категорий $D(X) \to D(X)$, не будет преобразованием Фурье–Мукаи.

Эти печальные известия можно до некоторой степени уравновесить следующей обнадёживающей теоремой Тоэна 2007 года. Она подтверждает расхожую мудрость, что триангулированные категории — это не самый удачный математический объект, и как только начинаешь рассматривать функторы между триангулированными категориями, так всё сразу идёт наперекосяк, а надо вместо триангулированных категорий с самого начала изучать "оснащённые" варианты (стабильные $\infty$-категории, dg-категории, ...), и тогда проблем не будет. Поскольку мы о dg-категориях ничего не говорили, формулировку теоремы ниже понять нельзя, но предлагаю поверить, что это осмысленные слова.

4.16. Теорема ([Toë07]). *Точный функтор $F\colon D(X) \to D(Y)$ между триангулированными категориями изоморфен некоторому преобразованию Фурье–Мукаи тогда и только тогда, когда $F$ поднимается до dg-функтора $F_{\mathrm{dg}}\colon D_{\mathrm{dg}}(X) \to D_{\mathrm{dg}}(Y)$ между dg-оснащениями производных категорий. Более того, категория dg-функторов из $D_{\mathrm{dg}}(X)$ в $D_{\mathrm{dg}}(Y)$, рассмотренная как dg-категория, квазиэквивалентна dg-оснащению $D_{\mathrm{dg}}(X \times Y)$ производной категории $D(X \times Y)$.*

Иными словами, если работать в dg-мире, то конструкция Фурье–Мукаи это прямо-таки (квази)эквивалентность категорий: задать функтор между производными категориями $X$ и $Y$ на dg-уровне это *в точности* то же самое, что выбрать ядро преобразования Фурье–Мукаи на их произведении, и даже естественные преобразования между dg-функторами это в точности морфизмы между их ядрами.

4.17. **Теорема Мукаи.** На первой лекции я упоминал, что Мукаи доказал, что производные категории когерентных пучков для абелева многообразия и для двойственного к нему абелева многообразия эквивалентны, хоть сами многообразия могут быть и не изоморфны. Эту теорему мы докажем. Поскольку в формулировке встречаются абелевы многообразия, нам придётся поверить в довольно много фактов о них. Подробнее об абелевых многообразиях можно почитать, например, в книге Мамфорда "Абелевы многообразия".

Сначала напомню, что такое абелевы многообразия. Абелево многообразие — это гладкое проективное алгебраическое многообразие $A$, на котором задана структура группы так, что умножение $A \times A \to A$ и взятие обратного элемента $A \to A$ являются морфизмами алгебраических многообразий. Группа автоматически будет коммутативна. Более того, абелево многообразие — это всегда комплексный тор, то есть фактор векторного пространства $\mathbb{C}^g$ по решётке $\mathbb{Z}^{2g} \simeq \Lambda \subset \mathbb{C}^g$.

Пусть $A$ — абелево многообразие размерности $g$ (это стандартный выбор обозначения в теории абелевых многообразий). Обозначим отображение сложения в $A$ символом $m\colon A \times A \to A$. *Двойственным абелевым многообразием* $\widehat{A}$ называется многообразие $\mathrm{Pic}^0(A)$ топологически тривиальных линейных расслоений на $A$. Это тоже абелево многообразие, той же размерности, что и $A$, но обычно не изоморфное ему. Это в самом деле двойственность: существует естественный изоморфизм $(\widehat{A})^{\widehat{}} \xrightarrow{\sim} A$. Для формулировки и доказательства теоремы Мукаи очень важно следующее понятие:

4.18. Определение. *(Нормализованным) расслоением Пуанкаре* называется линейное расслоение $\mathcal{P}$ на $A \times \widehat{A}$ со следующими свойствами:

- Для любого $L \in \mathrm{Pic}^0(A)$ ограничение $\mathcal{P}|_{A \times \{L\}}$ как линейное расслоение на $A$ изоморфно $L$.

- Для любой точки $a \in A$, ограничение $\mathcal{P}|_{\{a\}\times\widehat{A}}$ как линейное расслоение на $\widehat{A} \simeq \mathrm{Pic}^0(A)$ изоморфно расслоению, соответствующему точке $a$ при изоморфизме $A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0(\mathrm{Pic}^0(A))$.

Расслоение Пуанкаре существует. Про него полезно думать, как про универсальное семейство расслоений из $\mathrm{Pic}^0(A)$. Именно расслоение Пуанкаре $\mathcal{P} \in \mathrm{Coh}(A \times \widehat{A})$ мы будем использовать в качестве ядра для преобразования Фурье–Мукаи. Сложная часть доказательства состоит в вычислении прямого образа этого расслоения относительно проекции на $A$. Нам нужно следующее утверждение.

4.19. Утверждение. *Производный прямой образ $\pi_{A*}(\mathcal{P}) \in D(A)$ при проекции на первую координату $\pi_A\colon A \times \widehat{A} \to A$ изоморфен $\mathcal{O}_{\{0\}}[-g]$, где $\mathcal{O}_{\{0\}}$ — пучок-небоскрёб в групповой единице $0 \in A$.*

Я более-менее следую доказательству из записок лекций [Sch13, Lec. 25], которое по сути совпадает с доказательством из главы 13 в книге Мамфорда “Абелевы многообразия”. У Шнелла это доказательство начинается фразой “the proof takes longer than you expect, but it is very clever”, и, в целом, так всё и есть. Вообще, на правах рекламы, очень рекомендую записки [Sch13] — там очень понятно изложены много важных тем: кэлерова геометрия, теория Ходжа, теория абелевых многообразий и комплексных торов, производные категории когерентных пучков и, наконец, сама теорема об обращении в ноль в общей точке, которой был посвящён этот курс Шнелла, тоже интересная и полезная.

*Доказательство.* Сначала изучим, как объект $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ ограничивается на разные точки многообразия $A$. Пусть $a \in A$ — какая-то точка. Рассмотрим расслоенное произведение

$$\begin{tikzcd} \{a\} \times \widehat{A} \arrow[r, hook] \arrow[d] & A \times \widehat{A} \arrow[d, "\pi_A"] \\ \{a\} \arrow[r, hook] & A \end{tikzcd}$$

Поскольку морфизм $\pi_A$ плоский, по теореме 4.5 производный пулбэк объекта $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ на точку $a$ изоморфен производному прямому образу линейного расслоения $\mathcal{P}|_{\{a\}\times\widehat{A}}$ при отображении в точку. Поскольку производный прямой образ при отображении в точку это, по определению, вычисление когомологий $\mathrm{R}\Gamma\left(\{a\} \times \widehat{A}, -\right)$, нужно знать, как устроены когомологии линейных расслоений степени ноль на абелевых многообразиях. Это стандартный факт, который мы используем без доказательства. Ответ такой: для абелева многообразия $B$ и для линейного расслоения $L \in \mathrm{Pic}^0(B)$ когомологии $\mathrm{R}\Gamma\left(B, L\right)$ равны:

- нулю, если $L$ — нетривиальное расслоение;
- внешней алгебре $\Lambda^\bullet(T^\vee_{\{0\}}(B))$ на кокасательном пространстве к групповой единице на $B$, если $L \simeq \mathcal{O}_B$ — тривиальное линейное расслоение.

По второй части определения 4.18 мы знаем, что над любой точкой $a \neq 0 \in A$ ограничение линейного расслоения $\mathcal{P}$ на срез $\{a\} \times \widehat{A}$ — это нетривиальное линейное расслоение из $\mathrm{Pic}^0(\widehat{A})$. Значит, у прямого образа $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ ограничение на любую точку $a \neq 0$ равно нулю, а на точку $0 \in A$ — внешней алгебре на $g$-мерном векторном пространстве (помещённой в градуировки от 0 до $g$, как обычная внешняя алгебра).

4.20. Упражнение. Пусть $X$ — какое-нибудь гладкое проективное многообразие, $x \in X$ — точка на нём, а $P \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — объект производной категории. Докажите, что $x \in \mathrm{supp}(P)$ тогда и только тогда, когда (производное) ограничение $P|_x$ в категории $D^b_{\mathrm{coh}}(x) \simeq D(\mathrm{Vect})$ не равно нулю. (*Указание*: пусть $i\colon x \hookrightarrow X$ — вложение. Тогда по сопряжённости прямого и обратного образа $i^*(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}^\bullet(P, \mathcal{O}_x) = 0$, где $\mathcal{O}_x$ — пучок-небоскрёб в точке $x \in X$.)

По упражнению выше мы теперь знаем, что теоретико-множественный носитель объекта $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ — это только одна точка $\{0\} \in A$. Кроме того, производное ограничение на эту точку изоморфно внешней алгебре на $g$-мерном векторном пространстве в степенях $[0, g]$. У объекта $\mathcal{O}_{\{0\}}[-g]$, упоминаемого в формулировке утверждения, тоже выполняются эти свойства. На лекции я хотел на этом месте остановиться, сказав, что других объектов с такими свойствами нет, но меня справедливо поймали на попытке всех обмануть: это неправда! Как мы увидим ниже, эти свойства гарантируют, что объект $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ является сдвигом в степень $g$ структурного пучка некоторой подсхемы в $A$, но без дополнительного изучения расслоения Пуанкаре вывести, что эта подсхема — просто приведённая точка, не получится. Например, в двумерном случае в аффинном пространстве $AA^2 \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ у пучка, соответствующего модулю $\mathbb{C}[x, y]/(x^2, y)$, производное ограничение на начало координат не отличается от производного ограничения пучка-небоскрёба.

В связи с этим я решил вернуться к этому утверждению на следующей лекции и дать полное подробное доказательство. Итак,

**ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ...**

$\square$

В конце лекции я начал с помощью утверждения 5.2 доказывать теорему Мукаи, и рассказал несколько шагов доказательства, но поскольку я всё равно в следующий раз буду всё повторять, в записках лекций эти шаги появятся только в следующий раз.

## 5. Теорема Мукаи (продолжение). Генераторы.

5.1. **Теорема Мукаи.** В прошлый раз мы начали, но не закончили, рассказ о производных категориях абелевых многообразий и теореме Мукаи. Напомним обозначения:

- $A$ — абелево многообразие, т.е., комплексный тор с алгебраической структурой;
- $m\colon A \times A \to A$ — групповая операция для $A$;
- $\widehat{A}$ — двойственное абелево многообразие, оно же $\mathrm{Pic}^0(A)$;
- $\mathcal{P}$ — расслоение Пуанкаре, то есть линейное расслоение на $A \times \widehat{A}$, являющееся универсальным семейством линейных расслоений степени ноль на $A$ (параметризованное $\widehat{A} \cong \mathrm{Pic}^0(A)$, и одновременно универсальным семейством линейных расслоений степени ноль на $\widehat{A}$ (параметризованное $A \cong \mathrm{Pic}^0(\mathrm{Pic}^0(A))$).

Продолжим прерванное доказательство следующего важного утверждения о свойствах расслоения Пуанкаре:

5.2. Утверждение. *Производный прямой образ* $\pi_{A*}(\mathcal{P}) \in D(A)$ *при проекции* $\pi_A\colon A\times\widehat{A} \to A$ *изоморфен* $\mathcal{O}_{\{0\}}[-g]$, *где* $\mathcal{O}_{\{0\}}$ *— пучок-небоскрёб в групповой единице* $0 \in A$.

В прошлый раз мы доказали, что теоретико-множественный носитель объекта $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ — это только одна точка $\{0\} \in A$. Кроме того, производное ограничение на эту точку изоморфно внешней алгебре на $g$-мерном векторном пространстве в степенях $[0, g]$. Этот факт очень много говорит об объекте $\pi_{A*}(\mathcal{P})$, но чтобы понять, что именно, нам понадобится несколько лемм.

5.3. Лемма. *Пусть* $\mathcal{F}$ *— когерентный пучок на гладком многообразии* $X$ *размерности* $g$ *с носителем в одной точке* $x \in X$. *Пусть* $i\colon \{x\} \hookrightarrow X$ *— вложение точки. Тогда производное ограничение* $i^*(\mathcal{F}) \in D(\{x\})$, *как объект в производной категории векторных пространств, имеет когомологии в степенях от* $-g$ *до* $0$, *причём если* $\mathcal{F}$ *ненулевой, то пучки когомологий* $\mathcal{H}^0(i^*(\mathcal{F}))$ *и* $\mathcal{H}^{-g}(i^*(\mathcal{F}))$ *тоже не равны нулю.*

*Доказательство.* Рассмотрим производный прямой образ производного ограничения $i^*\mathcal{F}$ при вложении обратно в $X$. По формуле проекции $i_*(i^*(\mathcal{F}))$ изоморфно тензорному произведению $\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_{\{x\}}$ пучка $\mathcal{F}$ с пучком-небоскрёбом в точке $x$. Отметим, что функтор прямого образа $i_*$ при замкнутом вложении, во-первых, точен, то есть пучки когомологий производного прямого образа $i_*i^*(\mathcal{F})$ изоморфны прямым образам пучков когомологий объекта $i^*(\mathcal{F})$, а, во-вторых, *консервативен*, в том смысле, что прямой образ ненулевого пучка при вложении не может быть стать нулевым. Значит, утверждения про пучки когомологий из формулировки леммы можно доказывать не для пулбэка $i^*(\mathcal{F})$, а для тензорного произведения $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\{x\}}$.

Поскольку всё происходит в окрестности точки $x$, можно перейти к локальному кольцу $R := \mathcal{O}_{X,\{x\}}$ этой точки. Тогда $\mathcal{F}$ соответствует некоторому конечномерному модулю $F$ над $R$, а пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_{\{x\}}$ — модулю $R/\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал локального кольца $R$. Многообразие $X$ по предположению было гладким размерности $g$, то есть $R$ — регулярное локальное кольцо, и идеал $\mathfrak{m} \subset R$ порождается элементами $m_1, \ldots, m_g$. Более того, регулярность влечёт, что у модуля $R/\mathfrak{m}$ есть резольвента Кошуля:

$$0 \to R \to R^{\oplus g} \to R^{\oplus\binom{g}{2}} \to \cdots \to R^{\oplus g} \to R \to 0,$$

где члены резольвенты — свободные модули на подмножествах порождающих $m_1, \ldots, m_g$ максимального идеала, а дифференциалы — знакочередующиеся “вычёркивания” элементов из этих подмножеств.

По определению производное тензорное произведение пучков $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\{x\}}$, то есть, в терминах модулей над кольцом $R$, производное тензорное произведение $F \otimes R/\mathfrak{m}$, можно вычислять, как почленное тензорное произведение $F$ и свободной резольвенты для $R/\mathfrak{m}$. Значит, в производной категории объект $F \otimes R/\mathfrak{m}$ представляется комплексом

$$0 \to F \xrightarrow{\begin{pmatrix} m_1 \\ \cdots \\ m_g \end{pmatrix}} F^{\oplus g} \to \cdots \to F^{\oplus g} \xrightarrow{(m_1\ \ldots\ m_g)} F \to 0.$$

Видно, что этот комплекс не ноль только в степенях от $-g$ до 0, причём его нулевые когомологии изоморфны $F/\mathfrak{m}F$. Это векторное пространство над $R/\mathfrak{m}R$, чья размерность по лемме Накаямы равна минимальному числу порождающих для $F$, то есть, в частности, не ноль, если сам модуль $F$ ненулевой. Кроме того, $(-g)$-тый модуль когомологий это *цоколь* модуля $F$, то есть подпространство элементов, аннулирующихся всем максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Поскольку носитель $F$ равен максимальному идеалу и конечно порождён, это подпространство тоже ненулевое (упражнение по коммутативной алгебре). □

5.4. Следствие. *Пусть $X$ — гладкое многообразие размерности $g$, $x \in X$ — точка, а $i\colon \{x\} \hookrightarrow X$ — вложение точки. Пусть $E \in D(X)$ — объект, у которого* $\mathrm{supp}(E) = \{x\}$, *и пусть $m$ и $n$ — наименьшее (соответственно, наибольшее) число, для которого пучок когомологий $\mathcal{H}^m(E)$ ненулевой. Тогда у производного ограничения $i^*E \in D(\{x\})$ пучки когомологий $\mathcal{H}^{m-g}(i^*E)$ и $\mathcal{H}^n(i^*E)$ не равны нулю.*

*Доказательство.* Из того, что $m$ — номер самого левого ненулевого пучка когомологий $E$, мы выведем, что пучок $\mathcal{H}^{m-g}(i^*(E))$ изоморфен $\mathcal{H}^{-g}(i^*(\mathcal{H}^m(E)))$, а это не ноль по лемме 5.3, потому что $\mathcal{H}^m(E)$ — ненулевой когерентный пучок с носителем в точке $\{x\}$. Аналогично с самым правым ненулевым пучком когомологий. Выводить это можно разными способами: например, можно это доказывать по индукции, используя треугольники обрезания для $E$. Но на этот раз мы для разнообразия докажем по-другому, с помощью спектральной последовательности.

На объекте $E$ есть то, что называется *канонической фильтрацией*: это та фильтрация, которую мы использовали для определения треугольников обрезания, и у неё присоединённые градуированные факторы квазиизоморфны просто пучкам когомологий $E$. Когда что-то гомологически интересное делается с фильтрованным объектом, часто возникает спектральная последовательность, позволяющая оценить, что же происходит с объектом в терминах того, что происходит с присоединёнными градуированными факторам. Как обычно, в этом курсе мы не углубляемся в детали гомологической алгебры, поэтому просто поверим, что для пучков когомологий объекта $i^*(E)$ существует спектральная последовательность:

$$E_2^{p,q} := \mathcal{H}^q(i^*\mathcal{H}^p(E)) => \mathcal{H}^{p+q}(i^*E), \text{дифференциал} d_k^{p,q}\colon E_k^{p,q} \to E_k^{p-k+1,q+k}.$$

Если разобраться, какой индекс что означает, становится видно, что по лемме 5.3, применённой к каждому пучку когомологий $E$, на втором листе спектральной последовательности ненулевые объекты лежат в прямоугольнике, чей нижний левый угол это $(m, -g)$, а верхний правый — $(n, 0)$. Направления стрелок дифференциалов показывают, что объекты, находящиеся в этих углах, останутся неповреждёнными во всех листах спектральной последовательности, а поскольку все остальные элементы на диагоналях $p + q = m - g$ и $p + q = n$, кроме них, равны нулю, то в пределе получим

$$\mathcal{H}^{m-g}(i^*E) \cong \mathcal{H}^{-g}(i^*\mathcal{H}^m(E)), \quad \mathcal{H}^n(i^*E) \cong \mathcal{H}^0(i^*\mathcal{H}^n(E)),$$

а оба этих объекта ненулевые по лемме 5.3, что мы и хотели доказать. □

*Доказательство утверждения.* Теперь мы можем вернуться к доказательству утверждения 5.2. Мы в прошлый раз показали, что производное ограничение объекта $\pi_{A*}(\mathcal{P})$

на точку $0 \in A$ изоморфно внешней алгебре на $g$-мерном векторном пространстве, сидящей в степенях от 0 до $g$, и носитель равен этой точке. По следствию 5.4 это означает, что самый правый ненулевой пучок когомологий $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ располагается в степени $g$, и самый левый тоже в степени $g$, то есть $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ имеет лишь один пучок когомологий, и тогда этот объект квазиизоморфен сдвигу некоторого когерентного пучка $\mathcal{F}$ в степень $g$. Кроме того, из доказательства леммы 5.3 мы дополнительно знаем, что размерность $\mathcal{H}^0(i^*\mathcal{F})$, то есть размерность $\mathcal{H}^g(i^*\pi_{A*}(\mathcal{P}))$, равна минимальной длине набора порождающих для $\mathcal{F}$ как модуля над локальным кольцом. У нас это пространство — старшая компонента внешней алгебры, и она одномерна. Значит, $\mathcal{F}$ можно локально породить одним элементом, а это означает, что $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_A/I$, где $I \subset \mathcal{O}_A$ — некоторый пучок идеалов некоторой подсхемы в $A$, сосредоточенной в точке $0 \in A$. Обозначим эту подсхему через $A_I \subset A$. Осталось доказать, что $I$ равен пучку идеалов замкнутой точки $\{0\}$. Мы выведем это из описания $\mathcal{P}$ как универсального семейства линейных расслоений степени 0.

Воспользуемся сначала двойственностью Гротендика: если $\pi_{A*}(\mathcal{P}) \simeq \mathcal{O}_A/I[-g]$, то векторное пространство

$$0 \neq \mathrm{Hom}_A(\pi_{A*}(\mathcal{P}), \mathcal{O}_A/I[-g]) \cong \mathrm{Hom}_{A\times\widehat{A}}(\mathcal{P}, \pi_A^!(\mathcal{O}_A/I[-g]))$$

ненулевое. Из описания функтора исключительного обратного образа, данного в теореме 4.4 из прошлой лекции, мы знаем, что поскольку канонические классы $A$ и $A \times \widehat{A}$ тривиальны (это два абелевых многообразия), то $\pi_A^!(-) \cong \pi_A^*(-)[g]$. Кроме того, поскольку морфизм проекции $\pi_A\colon A \times \widehat{A} \to A$ плоский, то производный пулбэк $\pi_A^*(\mathcal{O}_A/I)$ изоморфен обычному, а он, в свою очередь, является структурным пучком подсхемы $\pi_A^{-1}(A_I) = A_I \times \widehat{A}$. Следовательно, ненулевым векторным пространством является

$$\mathrm{Hom}_{A\times\widehat{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{A_I\times\widehat{A}}) \cong \mathrm{Hom}_{A_I\times\widehat{A}}(\mathcal{P}|_{A_I\times\widehat{A}}, \mathcal{O}) \cong H^0(A_I \times \widehat{A}, \mathcal{P}^\vee|_{A_I\times\widehat{A}}).$$

Поскольку $A_I \times \widehat{A}$ — это инфинитезимальное утолщение схемы $\{0\} \times \widehat{A}$, на которой линейное расслоение $\mathcal{P}$ тривиально, нетрудно убедиться, что если у $\mathcal{P}^\vee$ на $A_I \times \widehat{A}$ есть сечение, то ограничение $\mathcal{P}|_{A_I\times\widehat{A}}$ — тривиальное линейное расслоение (упражнение! *Указание*: ненулевое сечение не может обращаться в ноль ни в одной замкнутой точке по лемме Накаямы, поэтому оно задаёт изоморфизм между $\mathcal{O}_{A_I\times\widehat{A}}$ и ограничением $\mathcal{P}^\vee$).

Вспомним, что $A$ изоморфно $\mathrm{Pic}^0(\widehat{A})$, то есть является пространством модулей линейных расслоений степени ноль на $\widehat{A}$, а $\mathcal{P}$ — универсальное семейство этих расслоений. Будем думать про ограничение $\mathcal{P}$ на $A_I \times \widehat{A}$ как про семейство линейных расслоений на $\widehat{A}$, параметризованное схемой $A_I$. По определению пространства модулей и универсальному свойству $\mathcal{P}$ любое такое семейство должно единственным образом получаться пулбэком от $\mathcal{P}$ относительно некоторого отображению $f\colon A_I \to A$. По построению мы знаем, что тавтологическое вложение подсхемы $A_I \hookrightarrow A$ годится. Но если семейство $\mathcal{P}|_{A_I\times\widehat{A}}$ тривиально, то можно с тем же успехом использовать и отображение $A_I \twoheadrightarrow \{0\} \hookrightarrow A$, пропускающееся через замкнутую точку $0 \in A$. Следовательно, противоречия с универсальным свойством $\mathcal{P}$ можно избежать, только если эти два отображения равны, то есть $A_I$ — это и есть подсхема $\{0\} \subset A$. А мы именно это и хотели доказать. $\square$

Вот, наконец, мы и завершили доказательство этого утверждения. С помощью него мы получим теорему Мукаи об эквивалентности производных категорий абелева многообразия и его двойственного. Это доказательство уже будет гораздо проще.

5.5. Теорема ([Muk81]). *Пусть $A$ — абелево многообразие, $\widehat{A}$ — его двойственное, а $\mathcal{P}$ — расслоение Пуанкаре на $A\times\widehat{A}$. Пусть $\iota_A\colon A\to A$ и $\iota_{\widehat{A}}\colon \widehat{A}\to\widehat{A}$ — отображения перехода к групповому обратному элементу в группах $A$ и $\widehat{A}$. Рассмотрим преобразования Фурье–Мукаи $\Phi_{\mathcal{P}}\colon D(A)\to D(\widehat{A})$ и $\Phi_{\tau(\mathcal{P})}\colon D(\widehat{A})\to D(A)$ относительно $\mathcal{P}$, где $\tau\colon A\times\widehat{A}\to\widehat{A}\times A$ — перемена мест множителей. Тогда существуют изоморфизмы функторов*

$$\Phi_{\tau(\mathcal{P})}\circ\Phi_{\mathcal{P}}\cong\iota_A^*[-g],\qquad \Phi_{\mathcal{P}}\circ\Phi_{\tau(\mathcal{P})}\cong\iota_{\widehat{A}}^*[-g].$$

5.6. Следствие. *Функтор $\Phi_{\mathcal{P}}\colon D(A)\to D(\widehat{A})$ — это эквивалентность категорий.*

*Доказательство.* Чтобы функтор был эквивалентностью категорий, достаточно, чтобы у него нашёлся обратный слева и обратный справа функтор (упражнение). Поскольку взятие обратного элемента в группе — это автоморфизм многообразия $A$, по теореме Мукаи получаем

$$(\iota_A^*[g]\circ\Phi_{\tau(\mathcal{P})})\circ\Phi_{\mathcal{P}}\cong\mathrm{Id}_{D(A)},\qquad \Phi_{\mathcal{P}}\circ(\Phi_{\tau(\mathcal{P})}\circ\iota_{\widehat{A}}^*[g])\cong\mathrm{Id}_{D(\widehat{A})}.$$

Значит, $\Phi_{\mathcal{P}}$ — эквивалентность категорий. А ещё из этого доказательства получается, что, раз существует обратный функтор к $\Phi_{\mathcal{P}}$, то обратные слева и справа к нему изоморфны:

$$\iota_A^*[g]\circ\Phi_{\tau(\mathcal{P})}\cong\Phi_{\tau(\mathcal{P})}\circ\iota_{\widehat{A}}^*[g].$$

$\square$

*Доказательство (теоремы 5.5).* Чтобы доказать изоморфизм двух функторов, достаточно показать, что они оба являются преобразованиями Фурье–Мукаи, а их ядра изоморфны. Мы будем рассматривать только композицию функторов $\Phi_{\tau(\mathcal{P})}\circ\Phi_{\mathcal{P}}$, композиция в другом порядке полностью аналогична (а ещё следует напрямую из первой при рассмотрениии абелева многообразия $\widehat{A}$). Доказательство идёт по шагам.

Шаг 1: по утверждению 4.9 из прошлой лекции композиция преобразований Фурье–Мукаи $\Phi_{\tau(\mathcal{P})}\circ\Phi_{\mathcal{P}}$ тоже является преобразованием Фурье–Мукаи, относительно объекта, который в терминах морфизмов

$$\begin{tikzcd} & A\times\widehat{A}\times A \arrow[dl, "\pi_{12}"'] \arrow[d, "\pi_{13}"] \arrow[dr, "\pi_{23}"] & \\ A\times\widehat{A} & A\times A & \widehat{A}\times A \end{tikzcd}$$

равен $\pi_{13*}(\pi_{12}^*\mathcal{P}\otimes\pi_{23}^*\tau(\mathcal{P}))$.

Шаг 2: Отметим, что поскольку $\mathcal{P}$ — линейное расслоение, объект $\pi_{12}^*\mathcal{P}\otimes\pi_{23}^*\tau(\mathcal{P})$, от которого мы берём прямой образ, тоже является линейным расслоением. Для вычисления производного обратного и производного тензорного расслоения надо заменять объект на резольвенты из расслоений, а тут $\mathcal{P}$ и так является расслоением. Покажем, что у этого линейного расслоения на $A\times\widehat{A}\times A$ есть другое описание: $\pi_{12}^*\mathcal{P}\otimes\pi_{23}^*\tau(\mathcal{P})\cong m_{13}^*\mathcal{P}$, где $m_{13}\colon A\times\widehat{A}\times A\to A\times\widehat{A}$ это сложение первой и третьей координаты, т.е., $m_{13}(x,y,z)=(x+z,y)$.

Для проверки, что на произведении трёх алгебраических многообразий два линейных расслоения изоморфны, можно использовать *теорему о кубе*:

5.7. Теорема ([Мам71, Thm. II.10] или [Sta24, Tag 0BF4]). *Пусть $X$, $Y$, $Z$ — три связных многообразия над полем, из которых хотя бы два — собственные. Пусть $L_1$ и $L_2$ — два линейных расслоения на $X \times Y \times Z$. Если существуют такие точки $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, что ограничения расслоений $L_1$ и $L_2$ на каждую из трёх "граней" куба*

$$\{x\} \times Y \times Z, \quad X \times \{y\} \times Z, \quad X \times Y \times \{z\},$$

*изоморфны, то $L_1$ и $L_2$ изоморфны на всём $X \times Y \times Z$.*

У нас как раз такая ситуация: мы имеем два линейных расслоения на тройном произведении $A \times \widehat{A} \times A$: $\pi_{12}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{23}^*\tau(\mathcal{P})$ и $m_{13}^*\mathcal{P}$. Возьмём в качестве точек из теоремы о кубе групповые единицы в $A$ и $\widehat{A}$. Рассмотрим ограничения:

- ограничение на $\{0\} \times \widehat{A} \times A$: поскольку $\mathcal{P}$ ограничивается на $\{0\} \times \widehat{A}$ тривиально, на этом подмногообразии $\pi_{12}^*\mathcal{P}$ — тривиальное расслоение. Значит, $\pi_{12}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{23}^*\tau(\mathcal{P})|_{\{0\}\times\widehat{A}\times A}$ изоморфно $\tau(\mathcal{P})$. По определению отображение $m_{13}$ отображает $\{0\} \times \widehat{A} \times A$ в $A \times \widehat{A}$ просто с помощью $\tau$. Значит, ограничения двух линейных расслоений на $\{0\} \times \widehat{A} \times A$ изоморфны.
- ограничение на $A \times \{0\} \times A$: аналогично предыдущему пункту мы видим, что и $\pi_{12}^*\mathcal{P}$, и $\pi_{23}^*\tau(\mathcal{P})$, и $m_{13}^*\mathcal{P}$ ограничиваются на это подмногообразие тривиально.
- ограничение на $A \times \widehat{A} \times \{0\}$: здесь всё так же, как в первом пункте, только первая и третья координата поменялись местами.

Следовательно, по теореме о кубе $\pi_{12}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{23}^*\tau(\mathcal{P}) \cong m_{13}^*\mathcal{P}$.

Шаг 3: Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \times \widehat{A} \times A \arrow[r, "m_{13}"] \arrow[d, "\pi_{13}"'] & A \times \widehat{A} \arrow[d, "\pi_A"] \\ A \times A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd}$$

В двух предыдущих шагах доказательства мы показали, что ядро Фурье–Мукаи для композиции $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ изоморфно $\pi_{13*}m_{13}^*\mathcal{P}$. Квадрат выше — декартов, причём морфизмы $\pi_A$ и $m$ оба плоские.

Из нерассказанного на лекции. Почему $m\colon A \times A \to A$ плоский? Рассмотрим автоморфизм $A \times A$, заданный формулой $(x, y) \mapsto (x, x + y)$. Тогда отображение $m$ это композиция этого автоморфизма и проекции на вторую координату. Композиция плоских морфизмов всегда плоская. Но на самом деле для теоремы о замене базы достаточно плоскости одного из морфизмов, поэтому это несущественно.

В этой ситуации мы можем применить теорему о плоской замене базы (теорема 4.5) из прошлой лекции. Она утверждает, что объект $\pi_{13*}m_{13}^*\mathcal{P} \in D(A \times A)$ изоморфен объекту $m^*\pi_{A*}\mathcal{P}$. По утверждению 5.2 объект $\pi_{A*}\mathcal{P}$ изоморфен $\mathcal{O}_{\{0\}}[-g]$. Следовательно, ядро Фурье–Мукаи для композиции $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ изоморфно объекту $m^*\mathcal{O}_{\{0\}}[-g] \in D(A \times A)$.

Шаг 4: Поскольку $m\colon A \times A \to A$ — плоский морфизм, производный обратный образ относительно $m$ совпадает с непроизводным. Обратный образ пучка-небоскрёба $\mathcal{O}_{\{0\}}$, то есть структурного пучка замкнутой подсхемы $\{0\} \subset A$, это структурный пучок прообраза $m^{-1}(0) \subset A \times A$ нулевой точки относительно сложения. Иными словами, $m^*\mathcal{O}_{\{0\}}$ это структурный пучок антидиагональной подсхемы

$$A \hookrightarrow A \times A, \quad x \mapsto (x, -x),$$

а это не что иное, как график $\Gamma_\iota$ морфизма $\iota_A$. Значит, композиция $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ это преобразование Фурье–Мукаи с ядром, изоморфным $\Gamma_\iota[-g]$.

В прошлый раз мы видели, что преобразование Фурье–Мукаи относительно ядра, которое является графиком морфизма, это производный прямой образ вдоль этого морфизма (в данном случае совпадающий с обратным, так как $\iota_A$ это инволюция). Следовательно, функторы $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ и $\iota_A^*[-g]$ оба являются преобразованиями Фурье–Мукаи, а их ядра изоморфны в $D(A \times A)$. Поэтому эти два функтора изоморфны, и теорема Мукаи доказана. □

5.8. **Генераторы в триангулированных категориях.** В теореме Мукаи мы видели, что одна и та же триангулированная категория может иметь несколько разных геометрических описаний. Сейчас мы поговорим о более алгебраическом способе описывать триангулированные категории. В алгебре объекты часто задаются с помощью набора образующих и соотношений. Для триангулированных категорий есть вполне удовлетворительный способ сказать, что значит, что категория порождается объектом или набором объектов. Это мы сейчас и обсудим.

Из нерассказанного на лекции. Если аналог "порождающих элементов" для триангулированных категорий получается вполне естественным, то что такое в этой аналогии "соотношения" — сложный вопрос, и не факт, что вообще осмысленный. Что-то непонятное.

5.9. Определение. Пусть $T$ — триангулированная категория, $E \in T$ — какой-нибудь объект. Тогда через $\langle E \rangle \subset T$ обозначим наименьшую триангулированную подкатегорию в $T$, которая содержит $E$ и замкнута относительно взятия прямых слагаемых.

5.10. Определение. Объект $G \in T$ называется *классическим генератором*, если $\langle G \rangle = T$. Иначе говоря, любой объект из $T$ можно соорудить из $G$, применяя операции прямых сумм, сдвигов, конусов морфизмов, а так же переходя к прямым слагаемым.

*Замечание.* Зачем в определении нужны прямые слагаемые, мы немного обсудим позже. Легко сказать неправильный ответ: для удобства. Как правило, при построении классического генератора доказывается, что есть набор объектов $G_1, \ldots, G_k$ такой, что с помощью этих объектов можно соорудить любой объект из $T$, и тогда можно в качестве классического генератора взять их прямую сумму $\oplus_{i=1}^k G_i$. При определении, где разрешается переходить к прямым слагаемым, этот переход от конечного множества порождающих к одному объекту, являющемуся их прямой сумме, ничего не меняет. Это, в целом, удобно, но возможность писать "пусть $G$ — классический генератор" вместо чего-то в духе "пусть $G_1, \ldots, G_k$ — классическое порождающее множество" — недостаточно серьёзная причина для того, чтобы добавлять это подозрительное условие в определение 5.9. Есть и более серьёзные.

Из нерассказанного на лекции. Другой естественный вопрос — что в этом термине означает слово “классический”. Просто *генератором* в триангулированной категории $T$ называют такой объект $G \in T$, что для любого ненулевого объекта $E \in T$ градуированные пространства $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, E)$ и $\mathrm{Ext}^\bullet_T(E, G)$ оба не равны нулю. Любой классический генератор является генератором (упражнение!), но не наоборот. Оба вида генераторов бывают полезны, но для нас, поскольку мы работает с “маленькими” категориями вроде $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ для гладкого проективного $X$, оказываются важнее классические генераторы.

Пусть $G \in T$ — какой-нибудь объект. Прямые суммы и сдвиги — это простые операции. Но в подкатегории $\langle G\rangle$ содержатся, например, конусы всяких морфизмов вроде

$$G \oplus G[-1] \to G[11] \oplus G[3].$$

Как мы знаем, любые подобные морфизмы между прямыми суммами сдвигов объекта $G$ задаются матрицей из элементов $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, G)$ разных степеней. Поэтому в первом приближении можно сказать, что информация о том, какие объекты лежат в подкатегории $\langle G\rangle$ и как вообще эта подкатегория устроена, зависит от структуры градуированной алгебры $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, G)$. Если же $G \in T$ — классический генератор, то тогда получилось бы, что эта градуированная алгебра что-то нам сообщает обо всей категории $T$. Эта интуитивная картинка в самом деле может быть доведена до на удивление мощного результата.

5.11. Теорема. *Пусть $T$ — достаточно хорошая триангулированная категория (например, $D(X)$ для гладкого проективного многообразия $X$), а $G \in T$ — классический генератор. Тогда:*

- *Если $\mathrm{Ext}^i_T(G, G) = 0$ при $i \neq 0$, а $\mathrm{Hom}_T(G, G)$ это алгебра $A$, то $T$ эквивалентна категории $\mathrm{Perf}(A-\mathrm{mod})$, то есть подкатегории в производной категории конечно-порождённых $A$-модулей, состоящей из комплексов, квазиизоморфных конечным комплексам из свободных модулей (это называется категорией совершенных комплексов).*
- *([Kel94, (4.3)][1]) Без ограничений на $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, G)$ всегда существует некоторая dg-алгебра $\mathcal{A}$, чьи когомологии изоморфны $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, G)$, и эквивалентность категорий $T \simeq \mathrm{Perf}(\mathcal{A}-\mathrm{dgmod})$ с категорией совершенных dg-модулей над $\mathcal{A}$.*

Иными словами, классический генератор и его алгебра отображений в себя (по крайней мере в dg-смысле) полностью описывают категорию.

5.12. **Существование классических генераторов.** В этом разделе мы докажем, что для любого гладкого (квази)проективного многообразия $X$ в категории $D(X)$ существует классический генератор. Мы, как всегда, формулируем только нужный нам случай, а вообще это верно в очень большой общности (по крайней мере если рассматривать не всю

[1] В статье Келлера речь о стабильных категориях фробениусовых категорий (что бы это ни значило); производная категория от абелевой категории, в которой достаточно много инъективных объектов, является таковой. А именно, надо рассмотреть категорию комплексов объектов в абелевой категории, задать на ней точную структуру, где точными тройками будут почленно расщепимые короткие точные последовательности комплексов, и взять стабильную категорию от получившейся фробениусовой категории.

ограниченную производную когерентных пучков $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, а подкатегорию совершенных комплексов). Общее утверждение доказано в [BB03].

Из нерассказанного на лекции. Легко видеть, что если $X$ — аффинное гладкое многообразие, то структурный пучок $\mathcal{O}_X$ является классическим генератором в $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. В самом деле, если $X \cong \mathrm{Spec}(R)$ для кольца $R$, то $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ это ограниченная производная категория конечно-порождённых модулей над кольцом $R$. Любой ограниченный комплекс свободных модулей заведомо лежит в категории $\langle R\rangle \subset D^b(R\!-\!\mathrm{mod})$. Поскольку $X$ гладкое, кольцо $R$ имеет конечную гомологическую размерность, и у любого ограниченного комплекса модулей есть свободная резольвента конечной длины. Значит, $\langle R\rangle$ совпадает со всей категорией $D^b(R-\mathrm{mod}) \cong D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. И тут даже не нужно брать прямые слагаемые для того, чтобы породить всю категорию.

Чтобы доказывать, что объект, который мы укажем ниже, в самом деле будет классическим генератором, нам понадобятся две леммы. Первая из них — более-менее про линейную алгебру.

5.13. Лемма. *Пусть $X$ — многообразие, а*

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

*— короткая точная последовательность из векторных расслоений на $X$. Тогда для любого целого числа $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существует длинная точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{Sym}^k\mathcal{E} \to \cdots \to \mathrm{Sym}^2\mathcal{E}\otimes\Lambda^{k-2}\mathcal{F} \to \mathcal{E}\otimes\Lambda^{k-1}\mathcal{F} \to \Lambda^k\mathcal{F} \to \Lambda^k\mathcal{G} \to 0,$$

*где дифференциалы получаются при помощи коумножения $\mathrm{Sym}^i\mathcal{E} \to \mathrm{Sym}^{i-1}\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ симметрических степеней, вложения $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{F}$ и умножения $\mathcal{F}\otimes\Lambda^j\mathcal{F} \to \Lambda^{j+1}\mathcal{F}$ внешних степеней.*

*Доказательство.* Поскольку дифференциалы заданы универсальным образом, достаточно проверить, что последовательность точна в слое над каждой точкой, то есть достаточно проверить случай, где $X = \{*\}$, а вместо векторных расслоений просто векторные пространства. Этот случай оставляю в качестве упражнения по мультилинейной алгебре (проще всего проверять точность, выбрав базис; все ядра и коядра порождены разложимыми тензорами). □

*Замечание.* Этот комплекс полезно воспринимать как резольвенту для $\Lambda^k\mathcal{G}$ в терминах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Конечно же, есть аналогичная резольвента для $\mathrm{Sym}^k\mathcal{G}$, и, с другого конца, резольвенты для внешних и симметрических степеней $\mathcal{E}$ в терминах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

5.14. Лемма. *Рассмотрим в $D(\mathbb{P}^n)$ объект $G := \oplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i)$. Тогда в порождённой им подкатегории $\langle G\rangle \subset D(\mathbb{P}^n)$ содержатся линейные расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)$ для всех $i \in \mathbb{Z}$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathbb{P}^n$ это проективизация векторного пространства $V$, где размерность $V$ равна $n+1$. Рассмотрим последовательность Эйлера для проективного пространства:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}\otimes V \to T_{\mathbb{P}(V)}(-1) \to 0.$$

Рассмотрим старшую, то есть $n$-тую, внешнюю степень $T_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ и напишем для неё резольвенту из леммы 5.13:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-n) \to \cdots \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-2) \otimes \Lambda^{n-2}V \to \\ \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \otimes \Lambda^{n-1}V \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes \Lambda^{n}V \to \Lambda^n(T_{\mathbb{P}(V)}(-1)) \to 0. \tag{5.14.1}$$

Поскольку старшая внешняя степень $T_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ это $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ (упражнение; несложно выводится из последовательности Эйлера), то мы получили описание для $\mathcal{O}(1)$, использующее только прямые суммы линейных расслоений от $\mathcal{O}(-n)$ до $\mathcal{O}$. Эту же точную последовательность можно рассматривать, как описание $\mathcal{O}(-n)$ в терминах линейных расслоений от $\mathcal{O}(-n+1)$ до $\mathcal{O}(1)$.

Осталось объяснить, почему же из этого следует утверждение леммы. Рассмотрим набор “тупых” (stupid) обрезаний комплекса (5.14.1):

$$\begin{aligned}
&Q_n := [\mathcal{O}(-n)],\\
&Q_{n-1} := [\mathcal{O}(-n) \to \mathcal{O}(-n+1) \otimes V],\\
&\dots,\\
&Q_0 := [\mathcal{O}(-n) \to \cdots \to \mathcal{O} \otimes \Lambda^n V].
\end{aligned}$$

Точность последовательности (5.14.1) означает, что комплекс $Q_0$ имеет когомологии только в самом правом члене, и поэтому в производной категории $D(\mathbb{P}^n)$ комплекс $Q_0$ квазиизоморфен $\mathcal{O}(1)$. С другой стороны, покажем по индукции, что каждый комплекс $Q_i$ лежит в подкатегории $\langle G\rangle \subset D(\mathbb{P}^n)$. Для комплекса $Q_n$ это очевидно: $\mathcal{O}(-n)$ является прямым слагаемым $G$. Для комплекса $Q_i$ при $i < n$ естественное отображение комплексов $Q_i \to Q_{i+1}$ вписывается в выделенный треугольник

$$\mathcal{O}(-i) \otimes \Lambda^{n-i}V[n-i] \to Q_i \to Q_{i+1} \to \mathcal{O}(-i) \otimes \Lambda^{n-i}V[n-i+1].$$

По предположению индукциии $Q_{i+1}$ лежит в $\langle G\rangle$. Кроме того, поскольку $\mathcal{O}(-i)$ для $i \in [0;n]$ является прямым слагаемым $G$, то объект $\mathcal{O}(-i) \otimes \Lambda^{n-i}V[n-i]$, как сдвиг прямой суммы нескольких копий $\mathcal{O}(-i)$, тоже лежит в $\langle G\rangle$. По определению категория $\langle G\rangle$ — это триангулированная подкатегория в $D(\mathbb{P}^n)$, то есть конус любого морфизма между двуми объектами из этой подкатегории тоже лежит в ней. Значит, $Q_i \in \langle G\rangle$ для всех $i \in [0;n]$; в частности, мы доказали, что $\mathcal{O}(1) \in \langle G\rangle$.

Если рассмотреть подкрутку последовательности (5.14.1) на $\mathcal{O}(1)$, то получается описание того, как соорудить $\mathcal{O}(2)$, используя только линейные расслоения $\mathcal{O}(-n+1)$, ..., $\mathcal{O}(1)$, все из которых, как мы теперь знаем, лежат в $\langle G\rangle$. Поэтому $\mathcal{O}(2)$ лежит в этой подкатегории. Итерируя это рассуждение, получаем, что для любого $i \geq 0$ верно, что $\mathcal{O}(i) \in \langle G\rangle$.

Аналогичным образом, если рассмотреть подкрутку последовательности (5.14.1) на $\mathcal{O}(-1)$ и обрезать комплекс не с правого края, а с левого, то получится, что линейное расслоение $\mathcal{O}(-n-1)$ лежит в $\langle G\rangle$. Итерируя аргумент с более отрицательными подкрутками последовательности (5.14.1), получим, что для всех отрицательных $i$ расслоения $\mathcal{O}(i)$ тоже содержатся в $\langle G\rangle$. Это завершает доказательство. □

Теперь мы можем доказать, что в производных категориях когерентных пучков существуют классические генераторы.

5.15. Теорема. *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Тогда в $D(X)$ существует классический генератор.*

*Замечание.* Доказательство работает и для квазипроективных многообразий. В статье [BB03] существование классического генератора (в категории совершенных комплексов) доказывается для любых квазикомпактных квазиотделимых схем интересным образом: классический генератор в производной категории всей схемы $X$ "склеивается" из классических генераторов для производных категорий открытых подсхем для выбора какого-то покрытия $X$.

*Доказательство.* Поскольку $X$ проективно, оно допускает вложение $f\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ в проективное пространство. Обозначим через $G \in D(X)$ прямую сумму $\bigoplus_{i=0}^n f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i)$. Мы покажем, что $G$ является классическим генератором в $D(X)$.

Шаг 1: В лемме 5.14 мы явным образом показали, что для любого $i \in \mathbb{Z}$ линейное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)$ содержится в подкатегории $\langle \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i) \rangle \subset D(\mathbb{P}^n)$. Если в доказательстве рассматривать не комплексы векторных расслоений на $\mathbb{P}^n$, а их ограничения на $X$ (отметим, что точная последовательность векторных расслоений остаётся точной после ограничения), то из доказательства следует, что для любого $i \in \mathbb{Z}$ объект $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i) \in D(X)$ лежит в подкатегории $\langle G \rangle \subset D(X)$.

Из нерассказанного на лекции. Это не очень элегантное рассуждение является частным случаем следующего факта: если $F\colon T_1 \to T_2$ это точный функтор между триангулированными категориями, то для любого $E \in T_1$ образ подкатегории $\langle E \rangle$ (т.е., множество объектов в $T_2$, являющихся образами каких-то объектов из $\langle E \rangle \subset T_1$) под действием $F$ содержится в подкатегории $\langle F(E) \rangle \subset T_2$. Достаточно в качестве $F$ взять функтор $f^*\colon D(\mathbb{P}^n) \to D(X)$. Доказательство пока оставлю в качестве упражнения, но в следующей лекции мы скорее всего это докажем.

Шаг 2: Пусть $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ — когерентный пучок на $X$. Поскольку пучок $f^*\mathcal{O}(1)$ на $X$ обильный, для некоторого числа $N_0 \gg 0$ подкрутка $\mathcal{F}(N_0)$ будет глобально порождена, то есть существует сюръективное отображение $\mathcal{O}_X^{\oplus m_0} \twoheadrightarrow \mathcal{F}(N_0)$, где $m_0$ — размерность пространства глобальных сечений $H^0(\mathcal{F}(N_0))$. Назовём $\phi_0$ подкрутку этой сюръекции на $-N_0$, то есть отображение $\mathcal{O}_X(-N_0)^{\oplus m_0} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$. Рассмотреть теперь когерентный пучок $\mathcal{F}_1 := \ker \phi_0$. Для него тоже существуют некоторые $N_1, m_1 \gg 0$ и сюръекция $\mathcal{O}_X(-N_1)^{\oplus m_1} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1$. Продолжая в том же духе, построим бесконечную резольвенту для пучка $\mathcal{F}$:

$$\cdots \to \mathcal{O}_X(-N_2)^{\oplus m_2} \to \mathcal{O}_X(-N_1)^{\oplus m_1} \to \mathcal{O}_X(-N_0)^{\oplus m_0} \to \mathcal{F} \to 0. \tag{5.15.1}$$

Шаг 3: Пусть $d = \dim(X)$. Рассмотрим фрагмент построенного в предыдущем шаге комплекса:

$$Q := [\mathcal{O}_X(-N_d)^{\oplus m_d} \to \cdots \to \mathcal{O}_X(-N_0)^{\oplus m_0}].$$

Заметим, что $Q$ лежит в подкатегории $\langle G \rangle \subset D(X)$: в Шаге 1 мы доказали, что все линейные расслоения $\mathcal{O}_X(-N_i)$ лежат в $\langle G \rangle$, а комплекс $Q$ состоит из таких расслоений (сравните с доказательством леммы 5.14).

Из точности резольвенты (5.15.1) следует, что у комплекса $Q$ есть только два ненулевых пучка когомологий: пучок $\mathcal{H}^0(Q)$ изоморфен $\mathcal{F}$ по построению, а пучок $\mathcal{H}^{-d}(Q)$ обозначим для краткости $\mathcal{H}$. Тогда треугольник обрезания для $Q$ имеет вид

$$\mathcal{H}[d] \to Q \to \mathcal{F} \xrightarrow{\xi} \mathcal{H}[d+1].$$

Стрелка $\xi$ является морфизмом в $D(X)$ между сдвигами двух когерентных пучков. Как мы знаем из следствия 2.5 из второй лекции, $\xi$ является элементом группы $\mathrm{Ext}^{d+1}_{\mathrm{Coh}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$. Однако $X$ — гладкое многообразие размерности $d$. Поэтому его категория когерентных пучков имеет гомологическую размерность $d$, то есть $\mathrm{Ext}^{d+1}_X$ между любыми когерентными пучками равен нулю. Значит, $\xi = 0$.

5.16. Упражнение. Пусть $T$ — триангулированная категория, а $A$ и $B$ — два объекта в $T$. Докажите, что конус нулевого морфизма $\mathrm{Cone}(A \xrightarrow{0} B)$ изоморфен прямой сумме $B \oplus A[1]$. (*Указание*: постройте расщепляющий морфизм $\mathrm{Cone}(A \xrightarrow{0} B) \to B$.)

Поскольку $\xi = 0$, по упражнению выше конус $\xi$ изоморфен прямой сумме $\mathcal{H}[d+1] \oplus \mathcal{F}[1]$. С другой стороны, из треугольника обрезания мы знаем, что этот конус изоморфен $Q[1]$. Значит, объект $Q$ изоморфен прямой сумме своих пучков когомологий, $Q \simeq \mathcal{H}[d] \oplus \mathcal{F}$. Поскольку объект $Q$ лежит в $\langle G \rangle$, согласно определению 5.9 пучок $\mathcal{F}$, являющийся прямым слагаемым в $Q$, тоже лежит в подкатегории $\langle G \rangle \subset D(X)$. Таким образом, подкатегория $\langle G \rangle$ содержит любой когерентный пучок $\mathcal{F}$ на $X$.

Шаг 4: Покажем, что любой объект $E \in D(X) = D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ лежит в $\langle G \rangle$. У каждого $E$ конечное число ненулевых пучков когомологий. Если только один пучок когомологий ненулевой, то $E$ в производной категории изоморфно сдвигу когерентного пучка, и тогда $E \in \langle G \rangle$ по Шагу 3. Воспользуемся индукцией по числу ненулевых пучков когомологий в $E$. Если $i$ — наибольший индекс, для которого $\mathcal{H}^i(E) \neq 0$, то рассмотрим треугольник обрезания

$$\tau_{<i}(E) \to E \to \mathcal{H}^i(E)[-i] \to \tau_{<i}(E)[1].$$

По предположению индукции объекты $\tau_{<i}(E)$ и $\mathcal{H}^i(E)[-i]$ лежат в $\langle G \rangle$. Поскольку это триангулированная подкатегория, то конус морфизма между объектами из подкатегории тоже в ней лежит. Значит, $E$ лежит в $\langle G \rangle$. Следовательно, $\langle G \rangle = D(X)$, то есть $G$ является классическим генератором в $D(X)$. □

*Замечание.* Для многообразия $X = \mathbb{P}^n$ мы доказали, что объект $G := \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i)$ из леммы 5.14 является классическим генератором. Нетрудно убедиться, что градуированное пространство $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathbb{P}^n}(G, G)$ сосредоточено в степени ноль: в самом деле, это пространство изоморфно прямой сумме $\bigoplus_{i,j \in [0;n]} H^\bullet(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i-j))$. Если $i \geq j$, то у $\mathcal{O}(i-j)$ есть только нулевые когомологии, а если $i < j$ и оба этих числа лежат в интервале $[0; n]$, то у расслоений $\mathcal{O}(-n), \dots, \mathcal{O}(-1)$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ нет вообще никаких когомологий. Значит, по теореме 5.11 категория $D(\mathbb{P}^n)$ эквивалентна производной категории конечно-порождённых модулей над алгеброй $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^n}(G, G)$ (можно проверить, что эта алгебра имеет конечную гомологическую размерность и, следовательно, любой конечный комплекс конечно-порождённых модулей является совершенным комплексом). Это алгебраическое описание впервые появилось в статье Бейлинсона [Бей78] и впоследствии оказалось очень полезно для изучения свойств векторных расслоений на проективных пространствах.

## 6. Сильные генераторы. Размерность Рукье.

6.1. **Сильные генераторы: мотивация.** Этот курс посвящён производным категориям когерентных пучков. Они являются триангулированными категориями, но не какими попало: они обладают многими замечательными свойствами. Например, в прошлый раз мы доказали, что в $D(X)$ всегда есть классический генератор — а у произвольной триангулированной категории его может и не быть. С точки зрения теории триангулированных категорий естественно задаться вопросом: а чем вообще производные категории когерентных пучков "лучше", чем произвольные триангулированные категории?

Про этот нечётко сформулированный вопрос можно думать по-разному: можно пытаться научиться отличать, какие именно триангулированные категории приходят из алгебраической геометрии, а можно вместо этого пытаться как-то аксиоматизировать набор получаемых в геометрической ситуации свойств, чтобы дальше изучать триангулированные категории, которые, условно говоря, "ничем не хуже", чем приходящие из геометрии. Второй подход вообще нередко возникает в математике: если в какой-то математической теории ряд примеров ведёт себя лучше, чем произвольные объекты, то, как правило, люди стараются аксиоматизировать полезные свойства этих примеров и обобщать доказанные для них теоремы на более широкие классы изучаемых объектов.

На столь философский вопрос невозможно дать полный и конкретный ответ. Условно я бы отметил такие аспекты триангулированных категорий вида $D(X)$:

- Между этими категориями есть много понятных функторов: например, для любого подмногообразия $Z \subset X$ есть функтор ограничения $D(X) \to D(Z)$, и т.п. При этом у всех таких функторов есть сопряжённые и с левой, и с правой стороны (благодаря двойственности Гротендика).
- Из гладкости и проективности $X$ следует, что алгебраические объекты, возникающие при вычислениях в $D(X)$, довольно удобны. Например, все векторные пространства, как правило, конечномерны.
- Из более абстрактного и более "современного": у таких категорий есть хорошие dg-оснащения, причём единственные. Поскольку мы dg-категории не обсуждали, про этот пункт сложно что-то сказать. (Если интересно, хорошим введением в dg-категории является курс Саши Кузнецова [Куз13].)

В плане второго пункта можно дать такое определение:

6.2. Определение. Триангулированная категория $T$ называется Ext-*конечной*, если для любых двух объектов $A, B \in T$ размерность пространства $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ext}^i_T(A, B)$ конечна. Иными словами, каждое пространство $\operatorname{Ext}^i_T(A, B)$ конечномерно, и лишь для конечного числа индексов $i \in \mathbb{Z}$ это пространство не равно нулю.

Для гладкого собственного многообразия $X$ категория $D(X)$ является Ext-конечной: собственность влечёт, что все пространства $\operatorname{Ext}^i(-, -)$ конечномерны, а гладкость — что лишь конечное число из них ненулевые.

С первым пунктом сложнее. Откуда, например, брать сопряжённые функторы? В геометрической ситуации мы использовали двойственность Гротендика и тот факт, что более-менее все интересующие нас функторы являются преобразованием Фурье–Мукаи. Бондал и ван ден Берг в статье [BB03] показали, что на самом деле эти геометрические аргументы, в общем-то, не обязательны, и существование сопряжённых функторов для функторов между категориями вида $D(X)$ следует уже из того, что в этих триангулированных категориях существует не просто классический генератор, а так называемый *сильный генератор*. Строгое определение мы дадим чуть позже (определение 6.11), а пока сформулируем данную в статье [BB03] теорему. Для формулировки нам понадобится следующее техническое условие, которое выполняется для всех встречающихся в нашем курсе категорий:

6.3. Определение. Триангулированная категория $T$ называется *карубиевой*, если для любого объекта $E \in T$ любой идемпотент, то есть эндоморфизм $e \in \mathrm{Hom}_T(E, E)$, для которого $e^2 = e$, является проекцией на прямое слагаемое в каком-то разложении $E \simeq E_1 \oplus E_2$.

6.4. Теорема ([BB03, Th. 1.3]). *Пусть $T$ — $\mathrm{Ext}$-конечная карубиева триангулированная категория, в которой существует сильный генератор. Тогда:*

- *в категории $T$ существует функтор Серра;*
- *для любой $\mathrm{Ext}$-конечной категории $T'$ любой точный функтор $F\colon T \to T'$ имеет правый сопряжённый функтор. Если в $T'$ существует функтор Серра, то $F$ имеет и левый сопряжённый функтор.*

Из нерассказанного на лекции. В статье [BB03] доказывается более точное утверждение. Функтор $F\colon T \to \mathrm{Vect}$ в (абелеву) категорию векторных пространств называется *когомологическим*, если он переводит выделенные треугольники в точные последовательности векторных пространств, и называется функтором *конечного типа*, если для любого объекта $E \in T$ векторное пространство $F(E)$ конечномерно, и лишь для конечного множества целых чисел $i \in \mathbb{Z}$ пространство $F(E[i])$ ненулевое. Бондал и ван ден Берг доказали, что для Ext-конечной карубиевой триангулированной категории с сильным генератором любой когомологический функтор конечного типа является представимым. Из этого легко выводится и существование функтора Серра, и существование сопряжённых.

6.5. Следствие. *Для двух гладких проективных многообразий $X$ и $Y$ любой точный функтор $F\colon D(X) \to D(Y)$ имеет и левый, и правый сопряжённые функторы.*

*Доказательство.* Ниже мы докажем (теорема 6.15), что для гладкого проективного многообразия $X$ категория $D(X)$ имеет сильный генератор. Мы уже знаем, что эта категория Ext-конечна, и она является карубиевой. Поэтому к любому точному функтору $D(X) \to D(Y)$ применима теорема 6.4. $\square$

6.6. **Определение сильного генератора.** Для определения нам понадобится два вспомогательных обозначения.

6.7. Определение. Пусть $T$ — триангулированная категория, и пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset T$ — два подмножества объектов. Тогда обозначим через $\mathcal{E}_1 \star \mathcal{E}_2 \subset T$ множество таких объектов $E \in T$, для которых существует выделенный треугольник

$$E_1 \to E \to E_2 \to E_1[1],$$

где $E_1 \in \mathcal{E}_1$ и $E_2 \in \mathcal{E}_2$, а так же все прямые слагаемые таких объектов.

6.8. Упражнение. Покажите, что $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_1 \star \mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1 \star \mathcal{E}_2$. Покажите, что прямая сумма $E_1 \oplus E_2$ произвольных двух объектов $E_1 \in \mathcal{E}_1$ и $E_2 \in \mathcal{E}_2$ лежит в $\mathcal{E}_1 \star \mathcal{E}_2$.

6.9. Определение. Пусть $E \in T$ — какой-нибудь объект. Для каждого $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим подмножество $\langle E \rangle_i$ объектов в $T$ индуктивно:

- $\langle E \rangle_0$ — множество (конечных) прямых сумм сдвигов $E$, а так же прямые слагаемые таких прямых сумм. Иными словами, те объекты, которые можно построить из $E$, используя операции сдвигов, прямых сумм, и перехода к прямым слагаемым.
- $\langle E \rangle_{i+1} := \langle E \rangle_0 \star \langle E \rangle_i$, где $\star$ — это операция из определения 6.7.

Про это определение полезно думать так: $\langle E \rangle_i$ — это те объекты, которые можно соорудить из $E$, используя сколько угодно прямых сумм и сдвигов, но не более, чем $i$ раз применив операцию конуса. С такой точки зрения утверждение ниже кажется вполне естественным. Напомним, что ранее мы ввели обозначение $\langle E \rangle$ для наименьшей триангулированной подкатегории в $T$, содержащей $E$ и замкнутой относительно взятия прямых слагаемых.

6.10. Утверждение. $\langle E \rangle = \cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$.

*Доказательство.* Поскольку $\langle E \rangle$ — триангулированная подкатегория, содержащая $E$ и замкнутая относительно взятия прямых слагаемых, то из определения 6.9 легко видеть, что в $\langle E \rangle$ содержатся все объекты из множества $\cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$. Поскольку $\langle E \rangle$ по определению является наименьшей триангулированной подкатегорией с такими свойствами, для доказательства утверждения достаточно показать, что множество объектов $\cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$ тоже задаёт триангулированную подкатегорию. Иными словами, это подмножество должно быть замкнуто относительно взятия конусов.

Пусть $E_i \in \langle E \rangle_i$ и $E_j \in \langle E \rangle_j$ — два объекта из объединения $\cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$. Рассмотрим выделенный треугольник

$$E_i \to F \to E_j \to E_i[1].$$

Покажем, что любой такой объект $F$ лежит в $\langle E \rangle_{i+j+1}$. Мы доказываем это по индукции по сумме $i + j$; случай $i = j = 0$ очевиден из определения. Поскольку $E_i \in \langle E \rangle_i$, то в $T$ существует выделенный треугольник

$$E_0 \to E_i \oplus R \to E_{i-1} \to E_0[1],$$

где $E_0 \in \langle E \rangle_0$, $E_{i-1} \in \langle E \rangle_{i-1}$, а $R$ — некоторый объект. Рассмотрим коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & E_0 \arrow[d] \\
E_i \oplus R \arrow[r] & F \oplus R
\end{tikzcd}$$

где нижняя горизонтальная стрелка это прямая сумма отображения $E_i \to F$ и тождественного отображения $R \to R$. По аксиоме **TR4** этот квадрат можно продолжить до коммутативной диаграммы из выделенных треугольников, где $C$ — некоторый объект из $T$:

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & E_0[1] \arrow[d] \\
E_i \oplus R \arrow[r] \arrow[d] & F \oplus R \arrow[r] \arrow[d] & E_j \arrow[r] \arrow[d] & (E_i \oplus R)[1] \arrow[d] \\
E_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & E_j \arrow[r] \arrow[d] & E_{i-1}[1] \arrow[d] \\
E_0[1] \arrow[r] & E_0[1] \arrow[r] & 0 \arrow[r] & E_0[2]
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим третью строку этой диаграммы. Объект $C$ является является “расширением” объектов $E_{i-1}$ и $E_j$. По предположению индукции мы знаем, что тогда $C$ лежит в $\langle E\rangle_{i+j}$. Но тогда второй столбец диаграммы по определению показывает, что объект $F \oplus R$, а, следовательно, и сам объект $F$, лежат в подкатегории $E_{i+j+1}$. Значит, конус морфизма между двумя любыми объектами из $\cup_{i\geq 0}\langle E\rangle_i$ лежит в $\cup_{i\geq 0}\langle E\rangle_i$ и утверждение доказано. □

Теперь мы, наконец, можем дать определение сильного генератора.

6.11. Определение. Объект $G \in T$ называется *сильным генератором*, если существует некоторое $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, для которого $\langle G\rangle_n = T$.

Сравните с определением классического генератора: по утверждению 6.10 объект $G$ является классическим генератором, если $\cup_{i\geq 0}\langle G\rangle_i = T$. Этот генератор является сильным, если любой объект из $T$ можно построить за глобально ограниченное количество конусов.

Отметим, что при построении классического генератора в категориях вида $D(X)$ в прошлой лекции никакой общей оценки на количество необходимых конусов мы не получили: например, в последнем шаге доказательства мы пользовались тем, что любой объект производной категории можно получить из когерентных пучков, склеивая их по очереди с помощью треугольников обрезания. Но это значит, что для построение объекта с тысячей ненулевых пучков когомологий мы использовали как минимум тысячу конусов. Поскольку тысяча тут — произвольно выбранное число, доказательство из прошлой лекции не гарантирует, что генератор сильный.

6.12. Упражнение. Пусть $X$ — гладкое многообразие размерности $n > 1$. Покажите, для любого числа $N > 0$ в $D(X)$ существует неразложимый в прямую сумму объект $E$, у которого $N$ ненулевых пучков когомологий. (*Указание*: пусть $\mathcal{O}_x$ — пучок-небоскрёб в точке $x \in X$. Тогда $\dim \mathrm{Ext}^n(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) = 1$. Склейте объект $E$ последовательным применением этого нетривиального Ext’а. Проверьте, что получится неразложимый объект!).

Ниже мы докажем, что в категории $D(X)$ существует сильный генератор. Из этого следует, что построенный нами в прошлый раз классический генератор — тоже сильный.

6.13. Утверждение. *Пусть $T$ — триангулированная категория с сильным генератором. Тогда любой классический генератор в $T$ является сильным.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — сильный генератор для $T$. Если $E$ является классическим генератором $T$, то по утверждению 6.10 любой объект $T$ лежит в объединении $\cup_{i\geq 0}\langle E\rangle_i$. В частности, для некоторого $i \in \mathbb{Z}$ верно $G \in \langle E\rangle_i$. Легко проверить, что для любого $N \in \mathbb{Z}$ тогда верно, что $\langle G\rangle_N \subset \langle E\rangle_{Ni+N-1}$ (см. доказательство утверждения 6.10). Значит, если $G$ — сильный генератор и $\langle G\rangle_N = T$, то $E$ — тоже сильный генератор и $\langle E\rangle_{Ni+N-1} = T$. □

6.14. **Существование сильного генератора.**

6.15. Теорема. *Пусть $X$ — гладкое многообразие. Тогда в категории $D(X)$ существует сильный генератор.*

*Доказательство.* Мы докажем это утверждение в предположении, что $X$ (квази)проективно, хотя это и не является необходимым. Идея доказательства заключается в том, что тождественный функтор $D(X) \to D(X)$ надо интерпретировать как преобразование Фурье–Мукаи относительно структурного пучка диагонали и использовать триангулированную структуру в $D(X \times X)$.

Шаг 1. Пусть $f\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ — вложение $X$ в проективное пространство. Рассмотрим тогда композицию

$$g\colon X \times X \xrightarrow{f\times f} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{n^2+2n},$$

где вторая стрелка — вложение Сегре. Тогда это тоже вложение подмногообразия. При этом $g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n^2+2n}}(1)$ изоморфно, в терминах вложения $f \times f$, линейному расслоению $\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{O}(1)$. Значит, по теореме 5.15 из прошлой лекции расслоение

$$G := \bigoplus_{i=0}^{n^2+2n} \mathcal{O}(i) \boxtimes \mathcal{O}(i)$$

на $X \times X$ является классическим генератором.

Шаг 2. Обсудим, как устроено преобразование Фурье–Мукаи относительно объекта $G$, который является прямой суммой внешних тензорных произведений $\mathcal{O}(i)\boxtimes\mathcal{O}(i) \in D(X\times X)$.

6.16. Лемма. *Пусть $E, E' \in D(X)$ — два объекта. Тогда преобразование Фурье–Мукаи $\Phi$ с ядром $E \boxtimes E' \in D(X \times X)$ задаётся формулой $\Phi(F) := \mathrm{R}\Gamma\,(F \otimes E) \otimes E'$.*

*Доказательство.* Пусть $\pi_1$, $\pi_2$ — две проекции из $X \times X$ на $X$. Тогда по определению $E \boxtimes E'$ это $\pi_1^*E \otimes \pi_2^*E'$. По определению преобразования Фурье–Мукаи и формуле проекции получаем, что

$$\Phi(F) \cong \pi_{2*}(\pi_1^*(F \otimes E) \otimes \pi_2^*E') \cong \pi_{2*}(\pi_1^*(F \otimes E)) \otimes E'.$$

По теореме о плоской замене базы композиция $\pi_{2*}(\pi_1^*(-))$ равна прямому образу при отображении $X \to \{*\}$ в точку, то есть вычислению гиперкогомологий, а затем обратному образу с точки на $X$. □

6.17. Следствие. *Пусть $E, E' \in D(X)$ — два объекта. Тогда преобразование Фурье–Мукаи $\Phi$ с ядром $E \boxtimes E' \in D(X \times X)$ отображает любой объект $F \in D(X)$ в подмножество $\langle E'\rangle_0 \subset D(X)$.*

*Доказательство.* Согласно лемме 6.16 $\Phi(F) \cong \mathrm{R}\Gamma(E \otimes F) \otimes E'$, где $\mathrm{R}\Gamma(E \otimes F)$ — градуированное векторное пространство, то есть прямая сумма сдвигов поля $\mathbb{C}$. Значит, $\Phi(F)$ это прямая сумма сдвигов копий $E'$. Следовательно, $\Phi(F)$ лежит в $\langle E' \rangle_0$. □

В нашем случае получается, что преобразование Фурье–Мукаи

$$\Phi_{\mathcal{O}(i) \boxtimes \mathcal{O}(i)}(-) \colon D(X) \to D(X)$$

переводит любой объект в подмножество $\langle \mathcal{O}(i) \rangle_0 \subset D(X)$, а преобразование $\Phi_G$ относительно генератора $G \in D(X \times X)$ переводит любой объект в подмножество $\langle \oplus_{i=0}^{n^2+2n} \mathcal{O}(i) \rangle_0$.

Шаг 3. Пусть $G_X := \oplus_{i=0}^{n^2+2n} \mathcal{O}(i) \in D(X)$. В прошлом шаге мы доказали, что для любого объекта $F \in D(X)$ выполняется $\Phi_G(F) \in \langle G_X \rangle_0$. Из этого следует ограничение на образы преобразований Фурье–Мукаи, чьи ядра можно соорудить, используя $G$:

6.18. Лемма. *Пусть $K \in D(X \times X)$ — какой-нибудь объект. Если $K$ лежит в подмножестве $\langle G \rangle_i \subset D(X)$, то для преобразования Фурье–Мукаи $\Phi_K$ верно, что для всех $F \in D(X)$ объект $\Phi_K(F) \in D(X)$ лежит в подмножестве $\langle G_X \rangle_i$.*

*Доказательство.* Докажем это утверждение по индукции по $i$. Начнём со случая $i = 0$. Если $V^\bullet$ — градуированное векторное пространство, то легко видеть, что $\Phi_{V^\bullet \otimes G}(F) \cong V^\bullet \otimes \Phi_G(F)$. Напомним, что “тензорное произведение” на градуированное векторное пространство — просто прямая сумма сдвигов объекта. Кроме того, несложно видеть, что если $K'$ — прямое слагаемое $K$, то $\Phi_{K'}(F)$ — прямое слагаемое $\Phi_K(F)$ для любого объекта $F$. Значит, преобразование Фурье–Мукаи относительно любого объекта из $\langle G \rangle_0$ переводит все объекты в подмножество $\langle G_X \rangle_0$. Это доказывает случай $i = 0$ в лемме.

Пусть теперь $K \in \langle G \rangle_i$. Тогда по определению в $D(X \times X)$ существует выделенный треугольник

$$K_0 \to K \oplus K' \to K_{i-1} \to K_0[1],$$

где $K_0 \in \langle G \rangle_0$, а $K_{i-1} \in \langle G \rangle_{i-1}$. По определению преобразования Фурье–Мукаи для любого объекта $F \in D(X)$ в результате применения преобразований Фурье–Мукаи получается выделенный треугольник (упражнение!)

$$\Phi_{K_0}(F) \to \Phi_K(F) \oplus \Phi_{K'}(F) \to \Phi_{K_{i-1}} \to \Phi_{K_0}(F)[1].$$

По предположению индукции $\Phi_{K_0}(F)$ лежит в $\langle G_X \rangle_0$ и $\Phi_{K_{i-1}}(F)$ лежит в $\langle G_X \rangle_{i-1}$. Значит, $\Phi_K(F)$ лежит в $\langle G_X \rangle_i$, что мы и хотели доказать. □

Шаг 4. Поскольку $G \in D(X \times X)$ является классическим генератором, подкатегория $\langle G \rangle$ совпадает с $D(X \times X)$. По утверждению 6.10 это означает, что для какого-то $N \in \mathbb{Z}$ верно, что структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_\Delta \in D(X \times X)$ лежит в подмножестве $\langle G \rangle_N$. Тогда по лемме из предыдущего шага преобразование Фурье–Мукаи $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}$ относительно $\mathcal{O}_\Delta$ переводит любой объект $D(X)$ в объект из подмножества $\langle G_X \rangle_N$. Но это преобразование — тождественный функтор, $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}(F) \cong F$ для всех $F \in D(X)$. Следовательно, подмножество $\langle G_X \rangle_N$ совпадает со всей категорией $D(X)$. По определению это значит, что $G_X$ является сильным генератором категории $D(X)$. □

6.19. **Размерность Рукье.** Мы доказали существование сильного генератора в категориях вида $D(X)$ для гладкого многообразия $X$. Сильный генератор порождает всю триангулированную категорию, используя лишь глобально ограниченное количество конусов. Если подробно изучить, скажем, сильные генераторы в $D(\mathbb{P}^1)$, то можно увидеть, что некоторые сильные генераторы порождают всю категорию "быстрее", чем прочие — достаточно меньшего количества конусов. Это отражается и в утверждении 6.13: там мы показали, что если в категории существует сильный генератор, то любой классический генератор является сильным, но при этом число конусов, необходимых для построения всех объектов категории, может сильно увеличиться.

Изучать свойства конкретных отдельных генераторов сложно и не то что бы очень полезно. Более осмысленен оказывается общий взгляд: Рафаэль Рукье в статье [Rou08] определил инвариант триангулированных категорий, который впоследствии стал известен под названием "размерность Рукье".

6.20. Определение ([Rou08]). Пусть $T$ — триангулированная категория. Тогда *размерностью Рукье* категории $T$ называется наименьшее такое число $N$, для которого в $T$ существует сильный генератор $G \in T$, удовлетворяющий $\langle G \rangle_N = T$. Размерность Рукье мы будем обозначать $\mathrm{rdim}(T)$. Если в $T$ нет сильных генераторов, то считаем $\mathrm{rdim}(T) = \infty$.

Если $X$ — гладкое проективное многообразие, мы для краткости будем писать $\mathrm{rdim}(X)$, имея в виду размерность Рукье категории $D(X)$.

*Замечание.* Рукье ввёл этот инвариант, изучая триангулированные категории, связанные с представлениями конечномерных алгебр (в частности, над конечными полями), а не геометрический случай производных категорий когерентных пучков на многообразиях. С помощью этого понятия размерности ему удалось доказать некоторые гипотезы из теории представлений [Rou06].

Размерность Рукье у категории вычислить очень сложно: формально говоря, надо изучить все возможные сильные генераторы и для каждого понять, за сколько конусов удаётся построить произвольный объект. Даже для одного генератора это является сложной задачей. Рукье доказал такую общую оценку:

6.21. Утверждение ([Rou08]). *Пусть $X$ — гладкое квазипроективное многообразие. Тогда выполняется неравенство* $\dim(X) \leq \mathrm{rdim}(X) \leq 2\dim(X)$.

Доказательство мы за недостатком времени пропускаем. Вместо этого рассмотрим отдельно случай проективного пространства.

6.22. Утверждение. $\mathrm{rdim}(\mathbb{P}^n) = n$.

*Доказательство.* Согласно утверждению 6.21 размерность Рукье категории $D(\mathbb{P}^n)$ не может быть строго меньше, чем $n$. Поэтому достаточно предъявить сильный генератор в $D(\mathbb{P}^n)$, который порождает всю категорию за $n$ конусов. Для построения сильного генератора мы будем использовать такой же метод, как в доказательстве теоремы 6.15: там ключевую роль играл структурный пучок диагонали, а у проективного пространства как раз существует очень хорошая резольвента диагонали.

Будем думать про проективное пространство $\mathbb{P}^n$ как про грассманниан $Gr(1,V)$ одномерных подпространств в $(n+1)$-мерном векторном пространстве $V$. Тогда $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ — это тавтологическое одномерное подрасслоение в тривиальном расслоении $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\otimes V$ со слоем $V$. Рассмотрим на произведении $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$ отображение расслоений

$$\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)\to\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\otimes V/\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)), \tag{6.22.1}$$

которое над точкой $([v_1],[v_2])\in\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$ отображает вектор в прямой $\langle v_2\rangle\subset V$ в класс этого же вектора в факторпространстве $V/\langle v_1\rangle$. При этом над точкой $([v_1],[v_2])$ отображение слоёв нулевое тогда и только вектора $v_1$ и $v_2$ пропорциональны, то есть только в точках диагонали $\Delta_{\mathbb{P}^n}\subset\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$. Заметим, что фактор-расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\otimes V/\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ изоморфно подкрутке $T_{\mathbb{P}^n}(-1)$ касательного расслоения к $\mathbb{P}^n$ согласно точной последовательности Эйлера. Отображение (6.22.1) после подкрутки на $\pi_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ даёт глобальное сечение $s$ расслоения $T_{\mathbb{P}^n}(-1)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ на произведении $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$. При этом $s$ обращается в ноль только в точках диагонали. Следующая лемма позволяет построить с помощью этого $s$ резольвенту диагонали:

6.23. Лемма. *Пусть $X$ — гладкое многообразие, $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на $X$, а $s\in\Gamma(X,\mathcal{E})$ — регулярное сечение, то есть коразмерность множества нулей $s$ равна рангу расслоения $\mathcal{E}$. Тогда последовательность когерентных пучков на $X$*

$$0\to\Lambda^{rk(\mathcal{E})}\mathcal{E}^\vee\xrightarrow{s}\Lambda^{rk(\mathcal{E})-1}\mathcal{E}^\vee\to\cdots\to\Lambda^2\mathcal{E}^\vee\xrightarrow{s}\mathcal{E}^\vee\xrightarrow{s}\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_{\{s=0\}}\to 0$$

*точна, где $\mathcal{O}_{\{s=0\}}$ — структурный пучок схемы нулей сечения $s$. Эта точная последовательность называется резольвентой Кошуля для сечения $s$.*

Доказательство леммы сводится к коммутативной алгебре и мы его пропускаем. В общих чертах — поскольку точность последовательности можно проверять в локальных кольцах точек, достаточно проверить случай, когда $X$ — локальное кольцо, $\mathcal{E}$ — тривиальное расслоение на нём, и тогда $s$ — набор из нескольких элементов максимального идеала, классы которых в замкнутой точке линейно независимы. Гладкость $X$ требовать не обязательно, достаточно коэн–маколеевости, если вы знаете, что это такое.

Легко проверить, что если $\mathcal{E}:=T_{\mathbb{P}^n}(-1)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, то $\Lambda^k\mathcal{E}^\vee\cong\Omega^k_{\mathbb{P}^n}(k)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)$. Построенное нами сечение $s\in\Gamma(\mathcal{E})$ является регулярным, потому что оно обращается в ноль на диагонали, то есть подмногообразии коразмерности $n=rk(\mathcal{E})$. Значит, по лемме 6.23 в категории $D(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n)$ существует квазиизоморфизм

$$[\Omega^n_{\mathbb{P}^n}(n)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n)\to\cdots\to\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}]\quad\xrightarrow{\sim}\quad\mathcal{O}_\Delta. \tag{6.23.1}$$

Дальше мы следуем доказательству теоремы 6.15. Во-первых, согласно следствию 6.17 преобразование Фурье–Мукаи с ядром $\Omega^k_{\mathbb{P}^n}(k)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)$ переводит любой объект категории $D(\mathbb{P}^n)$ в подмножество $\langle\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)\rangle_0\subset D(\mathbb{P}^n)$. Обозначим через $G\in D(\mathbb{P}^n)$ прямую сумму $\oplus_{i=0}^n\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i)$. Поскольку квазиизоморфизм (6.23.1) означает, что структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_\Delta\in D(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n)$ лежит в подкатегории $\langle\oplus_{i=0}^n\Omega^i(i)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i)\rangle_n$, то по лемме 6.18 тождественный функтор, как преобразование Фурье–Мукаи относительно объекта $\mathcal{O}_\Delta\in D(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n)$, отправляет любой объект $D(\mathbb{P}^n)$ в подмножество $\langle G\rangle_n$, то есть $G$ является сильным генератором $D(\mathbb{P}^n)$, порождающим всё за $n$ шагов. Тогда $\mathrm{rdim}(\mathbb{P}^n)\le n$. Однако размерность Рукье не может быть строго меньше, чем $n$, по утверждению 6.21. □

Из нерассказанного на лекции. Для произвольного многообразия похожим образом можно доказать оценку сверху из утверждения 6.21. В самом деле, пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Тогда линейное расслоение $\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{O}(1)$ на $X \times X$ является обильным. Как мы обсуждали при построении классического генератора в теореме 5.15 на $X \times X$ для когерентного пучка $\mathcal{O}_\Delta$ существует бесконечная резольвента вида

$$\cdots \to (\mathcal{O}(-N_2) \boxtimes \mathcal{O}(-N_2))^{\oplus m_2} \to (\mathcal{O}(-N_1) \boxtimes \mathcal{O}(-N_1))^{\oplus m_1} \to \mathcal{O}_{X \times X} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_\Delta \to 0,$$

где $N_i$ и $m_i$ некоторые целые числа. Если обрезать эту резольвенту на $2n$-том шаге, то получится комплекс

$$P_\Delta := [\mathcal{O}(-N_{2n}) \boxtimes \mathcal{O}(-N_{2n}))^{\oplus m_{2n}} \to \cdots \to (\mathcal{O}(-N_1) \boxtimes \mathcal{O}(-N_1))^{\oplus m_1} \to \mathcal{O}_{X \times X}],$$

у которого только два ненулевых пучка когомологий, нулевые и $2n$-тые. Поскольку $X \times X$ — гладкое многообразие размерности $2n$, то, как мы обсуждали в прошлый раз, из соображений гомологической размерности комплекс $P_\Delta$ квазиизоморфен прямой сумме своих когомологий, то есть $\mathcal{O}_\Delta$ является прямым слагаемым $P_\Delta$ в производной категории. Значит, для любого объекта $F \in D(X)$ результат преобразования Фурье–Мукаи $\Phi_{P_\Delta}(F)$ это прямая сумма $F$ и некоторого дополнительного объекта. С другой стороны, рассуждая как в доказательстве теоремы 6.15 или утверждения 6.22, мы получаем, что функтор $\Phi_{P_\Delta}$ переводит любой объект из $D(X)$ в подмножество $\langle \oplus_{i=0}^{2n} \mathcal{O}(-N_i) \rangle_{2n}$. Поскольку это подмножество замкнуто относительно взятия прямых слагаемых и любой объект $F \in D(X)$ является прямым слагаемым в $\Phi_{P_\Delta}(F)$, мы получаем, что $\oplus_{i=0}^{2n} \mathcal{O}(-N_i)$ является сильным генератором $D(X)$, порождающим все объекты с помощью не более, чем $2n$ операций конуса.

Оценка снизу в утверждении 6.21 требует совершенно других методов (см. [Rou08, Prop. 7.16]).

Почти ни для каких многообразий размерность Рукье явно посчитать не удаётся. В тех не очень многочисленных случаях, когда получилось, размерность Рукье оказывается равна обычной геометрической размерности многообразия. Есть общая гипотеза:

6.24. Гипотеза ([Orl09]). *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Тогда размерность Рукье* $\mathrm{rdim}(X)$ *его производной категории* $D(X)$ *равна* $\dim(X)$.

Чтобы доказать эту гипотезу, ввиду нижней оценки из утверждения 6.21 достаточно для произвольного многообразии $X$ предъявить оптимально быстрый сильный генератор. Но откуда его брать — непонятно. Известны такие случаи, где гипотеза 6.24 выполняется, то есть удалось построить подходящий сильный генератор:

- многообразия, у которых существует удобная резольвента диагонали: проективные пространства, квадрики, грассманианы, поверхности дель Пеццо, некоторые многообразия Фано и т.п.
- Орлов доказал эту гипотезу для всех кривых [Orl09]. Напомним, что для гладкой кривой любой объект в производной категории распадается в прямую сумму своих пучков когомологий, поэтому достаточно предъявить генератор, который с помощью не более, чем одного конуса, позволит построить любой когерентный пучок на кривой. Но даже это совсем непросто! Это доказательство не использует

резольвенту диагонали, а отдельно строит “резольвенты” для всех когерентных пучков.
- некоторые конечные накрытия многообразий из первого пункта ([BFK14, Th. 1.6]) — например, K3-поверхность Ферма, то есть квартика $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ в $\mathbb{P}^3$. Грубо говоря, эта поверхность похожа на гиперплоскость $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$ с точностью до действия конечной группы.

Больше ничего существенного про вычисление размерности Рукье для многообразий неизвестно. Опровергнуть гипотезу кажется очень сложным: нужно будет доказать, что у некоторого многообразия никакой сильный генератор не будет достаточно быстрым. Оценка снизу на размерность Рукье в утверждении 6.21 получается сравнением с гомологической размерностью локального кольца какой-нибудь точки многообразия, то есть глобальная геометрия многообразия в этой оценке никакой роли не играет, а существенно других методов строить оценки снизу пока никто не придумал.

## 7. Полуортогональные разложения.

При изучении сложных математических объектов часто бывает полезно понимать, как их можно построить с помощью более маленьких объектов, которые устроены проще. Например, у классических алгебраических объектов — группы, модули, представления — есть обычное понятие фильтрации подобъектами, позволяющее представить, скажем, произвольную конечную группу как последовательное расширение нескольких простых конечных групп. Для триангулированных категорий наиболее практичным аналогом понятия фильтрации является понятие *полуортогонального разложения*, которое мы обсудим в этой лекции. Столь хороших структурных теорем, как, например, теорема Жордана–Гёльдера для конечных групп, для триангулированных категорий и полуортогональных разложений не существует, но всё равно понятие очень важное и полезное. Его ввели Бондал и Капранов в статье [БК89].

7.1. **Допустимые подкатегории.** Перед определением полуортогонального разложения удобно ввести понятие допустимой подкатегории. Напомним, что подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ называется *строго полной*, если, во-первых, для любых двух объектов $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)$, и, во-вторых, если объект $E \in \mathcal{C}$ изоморфен некоторому объекту $A \in \mathcal{A}$, то $E$ лежит в $\mathcal{A}$.

7.2. Определение. Пусть $T$ — триангулированная категория. Тогда строго полная триангулированная подкатегория $\mathcal{A} \subset T$ называется *допустимой слева* (соответственно, *справа*), если у функтора вложения $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow T$ существует левый (соответственно, правый) сопряжённый функтор. Подкатегория $\mathcal{A}$ называется *допустимой*, если она допустима и слева, и справа, то есть у $\iota$ существуют оба сопряжённых функтора.

Обсудим сначала некоторые следствия существования хотя бы одного сопряжённого функтора к вложению. Для конкретности я сформулирую все утверждения для допустимых слева подкатегорий, но их аналоги верны и для допустимых справа.

7.3. Лемма. *Пусть $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow T$ — вложение левой допустимой подкатегори, а $L\colon T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к $\iota$. Тогда композиция $L \circ \iota\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ изоморфна тождественному функтору на $\mathcal{A}$, то есть $L$ является проектором из $T$ на подкатегорию $\mathcal{A}$.*

*Доказательство.* Это общее свойство сопряжённых функторов к строго полным функторам: для любых $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ верен изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(\iota(A_1)), A_2) \cong \mathrm{Hom}_T(\iota(A_1), \iota(A_2)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2).$$

Здесь первый изоморфизм следует из сопряжённости функторов, а второй — из того, что $\iota$ — строго полный функтор. Поскольку при фиксированном $A_1$ этот изоморфизм выполняется для любого $A_2$, по лемме Йонеды канонический морфизм коединицы сопряжения $L(\iota(A_1)) \to A_1$ является изоморфизмом. $\square$

7.4. Следствие. *Пусть $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow T$ — вложение левой допустимой подкатегори, а $L\colon T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к $\iota$. Тогда $\mathcal{A}$ замкнута относительно взятия прямых слагаемых в $T$.*

*Доказательство.* В самом деле, предположим, что для объекта $A \in \mathcal{A}$ существует изоморфизм $f\colon \iota(A) \simeq E \oplus F$ в категории $T$. Мы хотим доказать, что $E$ и $F$ лежат в $\mathcal{A} \subset T$. Пусть $\Phi\colon \mathrm{id}_T \implies \iota \circ L$ — естественное преобразование из сопряжённости $L$ и $\iota$ (единица сопряжённости). Применив его к морфизму $f$, получим коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd} \iota(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi(\iota(A))=\mathrm{id}_{\iota(A)}"'] & E \oplus F \arrow[d, "\Phi(E)\oplus\Phi(F)"] \\ \iota(L(\iota(A))) \arrow[r, "\iota(L(f))"'] & \iota(L(E)) \oplus \iota(L(F)) \end{tikzcd}$$

Поскольку $f$ является изоморфизмом, то и $\iota(L(f))$ тоже изоморфизм. Отображение $\Phi(\iota(A))$ — изоморфизм, так как $L(\iota(A)) \cong A$. Значит, правая вертикальная стрелка, отображение $\Phi(E) \oplus \Phi(F)$, тоже изоморфизм. Из этого следует, что и $\Phi(E)$, и $\Phi(F)$ по отдельности тоже являются изоморфизмами. В частности, $E$ изоморфно $\iota(L(E))$, объекту из образа вложения $\iota\colon \mathcal{A} \to T$. Поскольку $\mathcal{A}$ — строго полная подкатегория, это значит, что $E$ тоже лежит в $\mathcal{A}$. $\square$

7.5. Определение. Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — строго полная подкатегория. Тогда *левым ортогоналом* к $\mathcal{A}$ называется (строго) полная подкатегория ${}^{\perp}\mathcal{A} \subset T$, состоящая из объектов, не имеющих ненулевых отображений ни в какие объекты $\mathcal{A}$, то есть

$${}^{\perp}\mathcal{A} := \{E \in T \mid \forall A \in \mathcal{A} \quad \mathrm{RHom}_T(E, \iota(A)) = 0\}.$$

7.6. Лемма. *Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория, а $L\colon T \to \mathcal{A}$ – левый сопряжённый функтор к вложению $\iota\colon \mathcal{A} \to T$. Тогда объект $E \in T$ лежит в подкатегории ${}^{\perp}\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $L(E) = 0$.*

*Доказательство.* Пусть $A \in \mathcal{A}$ — произвольный объект. Тогда по сопряжённости существует изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_T(E, \iota(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(E), A).$$

Если $L(E) = 0$, то оба этих пространства равны нулю для любого $A$, что по определению означает, что $E \in {}^{\perp}\mathcal{A}$. И наоборот, если $L(E) \neq 0$, то можно в качестве $A$ взять $L(E)$, и тогда в векторном пространстве с правой стороны содержится ненулевой элемент $\mathrm{id}_{L(E)}\colon L(E) \to L(E)$, то есть $E$ не будет лежать в ${}^{\perp}\mathcal{A}$. $\square$

Главным свойством допустимых (с какой-нибудь из сторон) подкатегорий является существование *треугольника проекции* для произвольного объекта объемлющей категории $T$:

7.7. Определение. Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда (левым) *треугольником проекции* для объекта $E \in T$ относительно подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ называется выделенный треугольник

$$B \to E \to A \to B[1],$$

где объект $A$ лежит в $\mathcal{A}$, а объект $B$ в ${}^{\perp}\mathcal{A}$.

7.8. Утверждение. *Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда для каждого объекта $E \in T$ треугольник проекции*

$$B \to E \to A \to B[1]$$

*существует и единственен с точностью до единственного изоморфизма. Для любого морфизма $f\colon E' \to E$ в $T$ существует единственный с точностью до изоморфизма морфизм треугольников проекции*

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B'[1] \arrow[d] \\
B \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & B[1]
\end{tikzcd}$$

*в котором среднее отображение равно $f$. При этом с помощью этих отображений между треугольниками проекции каждый выделенный треугольник $E' \to E \to E'' \to E'[1]$ в категории $T$ вписывается в $3 \times 3$-диаграмму из треугольников проекции:*

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B'[1] \arrow[d] \\
B \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & B[1] \arrow[d] \\
B'' \arrow[r] \arrow[d] & E'' \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B''[1] \arrow[d] \\
B'[1] \arrow[r] & E'[1] \arrow[r] & A'[1] \arrow[r] & B'[2]
\end{tikzcd}$$

*где объекты $A$, $A'$, $A''$ лежат в $\mathcal{A}$, а объекты $B$, $B'$ и $B''$ — в ${}^{\perp}\mathcal{A}$.*

*Замечание.* Напомним, что в $3{\times}3$-диаграмме по определению все квадраты коммутируют, кроме правого нижнего, который антикоммутирует.

*Доказательство.* Начнём с доказательства существования треугольника проекции. Пусть $L\colon T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к вложению $\iota\colon \mathcal{A} \to T$. Пусть $\Phi\colon \mathrm{id}_T \to \iota \circ L$ — естественное преобразование из сопряжённости $L$ и $\iota$. Тогда $\Phi(E)$ это морфизм $E \to \iota(L(E))$. По построению объект $\iota(L(E))$ лежит в $\mathcal{A} \subset T$. Пусть $B[1]$ это конус морфизма $\Phi(E)$:

$$B \to E \xrightarrow{\Phi(E)} \iota(L(E)) \to B[1]. \tag{7.8.1}$$

Докажем, что тогда объект $B$ лежит в левом ортогонале к $\mathcal{A}$. Применим к треугольнику (7.8.1) функтор $L$. Поскольку $L$ — триангулированный функтор, получим выделенный треугольник в $\mathcal{A}$:

$$L(E) \to L(E) \xrightarrow{L(\Phi(E))} L(\iota(L(E))) \to L(B)[1].$$

Так как $L(\iota(-))$ это тождественный функтор на $\mathcal{A}$ (лемма 7.3), объект $L(\iota(L(E)))$ в $\mathcal{A}$ изоморфен $L(E)$, причём из свойств сопряжённых функторов легко вывести, что $L(\Phi(E))$ это и есть изоморфизм. Конус изоморфизма — это всегда нулевой объект, то есть $L(B) = 0$. По лемме 7.6 это как раз означает, что $B \in {}^{\perp}\mathcal{A}$. Следовательно, для каждого $E \in T$ существует как минимум один треугольник проекции.

Перед тем, как доказывать единственность треугольников проекции, докажем функториальность: пусть $f\colon E' \to E$ — морфизм в категории $T$. Пусть $B \to E \to A \to B[1]$ — какой-нибудь (пока что мы ещё не доказали, что он единственный) треугольник проекции для $E$, а $B' \to E' \to A' \to B'[1]$ — для $E'$. Применив функтор $\operatorname{Hom}_T(-, A)$ к треугольнику проекции для $E'$, получим точную последовательность

$$0 = \operatorname{Hom}(B'[1], A) \to \operatorname{Hom}(A', A) \to \operatorname{Hom}(E', A) \to \operatorname{Hom}(B', A) = 0.$$

Тут мы воспользовались тем, что $B' \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ по определению. Значит, композиция отображений $E' \xrightarrow{f} E \to A$ единственным образом представляется в виде композиции $E' \to A' \xrightarrow{f_{\mathcal{A}}} A$ для некоторого отображения $f_{\mathcal{A}}\colon A' \to A$.

Аналогично показывается, что существует единственный морфизм $B' \to B$, делающий коммутативным квадрат из $B'$, $E'$, $B$ и $E$. Аксиома **TR3** утверждает, что для некоторых выборов стрелок $A' \to A$ и $B' \to B$ получится морфизм выделенных треугольников, но если выбор однозначно определён, то построенные нами отображения годятся.

Из функториальности легко следует единственность треугольника проекции. Пусть даны два треугольника проекции для одного и того же объекта $E \in T$:

$$B \to E \to A \to B[1], \qquad B' \to E \to A' \to B'[1].$$

Тогда по доказанному выше тождественное отображение $E \xrightarrow{\mathrm{id}} E$ единственным образом продолжается до отображений между этими выделенными треугольниками в обе стороны, причём по всё той же единственности эти отображения будут взаимно обратными изоморфизмами.

Доказательство существования $3\times 3$-диаграммы полностью аналогично доказательству существования морфизма треугольников проекции: по $3\times 3$-лемме такая диаграмма существует для некоторого выбора морфизмов между компонентами из $\mathcal{A}$ и ${}^{\perp}\mathcal{A}$, но поскольку выбор этих морфизмов однозначно определён треугольником $E' \to E \to E'' \to E'[1]$, то построенные выше морфизмы между выделенными треугольниками подходят. $\square$

*Замечание.* Отметим, что наличие сопряжённого функтора к вложению $\mathcal{A} \subset T$ мы использовали только для доказательства существования треугольника проекции, а для единственности и функториальности (для морфизмов между теми объектами, для которых треугольник проекции существует) достаточно было использовать определение подкатегории ${}^{\perp}\mathcal{A}$ и свойства триангулированных категорий.

7.9. Следствие. *Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда наименьшая триангулированная подкатегория в $T$, содержащая и $\mathcal{A}$, и ${}^{\perp}\mathcal{A}$, это вся $T$.*

*Доказательство.* По утверждению 7.8 любой объект $E \in T$ вписывается в треугольник проекции. Поэтому триангулированная подкатегория $T$, содержащая $\mathcal{A}$ и ${}^\perp\mathcal{A}$, обязательно содержит все объекты. $\square$

*Замечание.* Иными словами, $\mathcal{A}$ и ${}^\perp\mathcal{A}$ вместе порождают всю категорию $T$, и даже необязательно добавлять прямые слагаемые, достаточно просто конусов.

7.10. Упражнение. Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие положительной размерности, и пусть $x \in X$ — какая-нибудь точка. Пусть $\mathcal{A}$ — строго полная подкатегория объектов в $D(X)$, чей носитель содержится в $\{x\}$ (то есть равен $\{x\}$ или пуст). Докажите, что $\mathcal{A}$ — триангулированная подкатегория, не являющаяся допустимой слева. (*Подсказка*: докажите, что ортогонал к $\mathcal{A}$ — это подкатегория объектов, чей носитель не содержит точку $x$.)

Пара $\mathcal{A}$ и ${}^\perp\mathcal{A}$ не просто порождает вместе всю категорию, но ещё и делает это в некотором смысле минимальным возможным образом. Например, верно следующее утверждение.

7.11. Утверждение. *Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория, и пусть $\mathcal{B} \subset {}^\perp\mathcal{A}$ — триангулированная подкатегория. Предположим, что наименьшая триангулированная подкатегория в $T$, содержащая $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, равна $T$. Тогда $\mathcal{B} = {}^\perp\mathcal{A}$.*

*Доказательство.* Обозначим через $T' \subset T$ подмножество объектов $E \in T$, которые могут быть вписаны в выделенный треугольник

$$B \to E \to A \to B[1],$$

где $A \in \mathcal{A}$, а $B \in \mathcal{B}$. Поскольку $\mathcal{B} \subset {}^\perp\mathcal{A}$, по единственности треугольника проекции из утверждения 7.8 это условие эквивалентно тому, что в треугольнике проекции для объекта $E \in T$ компонента из ${}^\perp\mathcal{A}$ — это объект подкатегории $\mathcal{B} \subset {}^\perp\mathcal{A}$.

Предположим, что $\mathcal{B}$ строго меньше, чем ${}^\perp\mathcal{A}$, и пусть $E \in {}^\perp\mathcal{A}$
$\mathcal{B}$ какой-нибудь объект. Треугольник проекции для $E$ — это выделенный треугольник

$$E \to E \to 0 \to E[1].$$

По замечанию выше это означает, что $E$ не лежит в подмножестве $T'$. Чтобы получить противоречие, достаточно доказать, что $T' = T$. Поскольку по определению подкатегории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ лежат в $T'$, по условию задачи достаточно доказать, что $T'$ является триангулированной подкатегорией.[2]

Подкатегория $T'$, очевидно, замкнуто операции сдвига в производной категории. Для того, чтобы эта подкатегория была триангулированной, осталось показать, что если $f\colon E \to F$ — морфизм двух объектов из $T'$, то конус $f$ тоже лежит в $T'$. По утверждению 7.8 существует морфизм треугольников проекции

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d] & B[1] \arrow[d] \\
B' \arrow[r] & F \arrow[r] & A' \arrow[r] & B'[1]
\end{tikzcd}$$

[2]Более строго было бы сказать, что $T'$ — это подлежащее множество объектов строго полной подкатегории с такими свойствами. Мы используем стандартное упрощение терминологии.

где $A$ и $A'$ лежат в $\mathcal{A}$, а $B$ и $B'$ в $\mathcal{B} \subset {}^{\perp}\mathcal{A}$, причём этот морфизм вписывается в $3 \times 3$-диаграмму, из чего следует, что существует выделенный треугольник из конусов

$$\mathrm{Cone}(B \to B') \to \mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(A \to A') \to \mathrm{Cone}(B \to B')[1].$$

Поскольку $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — триангулированные подкатегории, то первый объект лежит в $\mathcal{B}$, а третий — в $\mathcal{A}$. Значит, объект $\mathrm{Cone}(f)$ по определению лежит в подмножестве $T'$.

Мы получили противоречие: $T'$, будучи триангулированной подкатегорией, содержащей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, должно совпадать со всей категорией $T$, но никакой объект $E \in {}^{\perp}\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ не лежит в $T'$. Значит, множество ${}^{\perp}\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ пусто, то есть $\mathcal{B} = {}^{\perp}\mathcal{A}$. $\square$

7.12. Упражнение. Пусть, как в утверждении 7.11, $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория и $\mathcal{B} \subset {}^{\perp}\mathcal{A}$ — строго полная триангулированная подкатегория. Предположим теперь, что наименьшая триангулированная подкатегория в $T$, которая содержит $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и является замкнутой относительно перехода к прямым слагаемым, равна $T$. Докажите, что наименьшей триангулированной подкатегорией, содержащей $\mathcal{B}$ и замкнутой относительно взятия прямых слагаемых, является ${}^{\perp}\mathcal{A}$. (Это упражнение на понимание доказательства выше.)

7.13. Следствие. *Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда ${}^{\perp}\mathcal{A} \subset T$ — допустимая справа подкатегория.*

*Доказательство.* В утверждении 7.8 мы доказали, что треугольник проекции функториален. В частности, отображение, переводящее объект $E \in T$ в конус морфизма $E \to \iota(L(E))$, является функтором $T \to {}^{\perp}\mathcal{A}$. Нетрудно проверить по определению, что этот функтор будет сопряжённым справа к вложению ${}^{\perp}\mathcal{A} \to T$. $\square$

*Замечание.* Как мы обсуждали раньше, из-за того, что в аксиоме **TR3** мы не можем требовать единственности для морфизма конусов, операция конуса в триангулированных категориях не функториальна, и у произвольного естественного преобразования $\Phi \colon F \implies G$ между двумя точными функторами нельзя взять "конус" и получить третий функтор. В случае с допустимыми подкатегориями чудесным образом оказалось, что для строго полного функтора $\iota$ единица сопряжённости $\mathrm{id}_T \implies \iota \circ L$ вписывается в "треугольник" из функторов.

Мы обсудили много свойств допустимых слева подкатегорий. Для допустимых справа подкатегорий все аналогичные утверждения тоже верны. Для подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ можно аналогичным образом определить *правый ортогонал* $\mathcal{A}^{\perp} \subset T$ как подкатегорию объектов $E \in T$, для которых $\mathrm{RHom}(\mathcal{A}, E) = 0$. Тогда можно аналогично доказать, что для любого $E \in T$ существует функториальный (правый) треугольник проекции $A \to E \to C \to A[1]$, где $A \in \mathcal{A}$ и $C \in \mathcal{A}^{\perp}$, и что подкатегория $\mathcal{A}^{\perp}$ будет допустимой слева. Все эти утверждения оставляю в качестве упражнения. Они доказываются совершенно так же, как и в разобранном нами случае допустимой слева подкатегории.

Докажем только некоторую совместимость утверждений о допустимых слева и справа подкатегориях.

7.14. Лемма. *Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда двойной ортогонал $({}^{\perp}\mathcal{A})^{\perp} \subset T$ равен $\mathcal{A}$.*

*Доказательство.* Рассмотрим допустимую справа подкатегорию ${}^\perp\mathcal{A} \subset T$, и пусть $R\colon T \to {}^\perp\mathcal{A}$ это сопряжённый справа к вложению функтор. Аналог леммы 7.6 для допустимых справа подкатегорий утверждает, что объект $E \in T$ лежит в $({}^\perp\mathcal{A})^\perp$ тогда и только тогда, когда $R(E) = 0$. С другой стороны, по построению функтора $R$ в следствии 7.13, это случается тогда и только когда, когда в треугольнике проекции для $E$ относительно допустимой слева подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ компонента из ${}^\perp\mathcal{A}$ равна нулю. Но это означает, что $L(E) \simeq E$, то есть $E$ лежит в $\mathcal{A}$, как мы и хотели. □

7.15. **Допустимость как внутреннее свойство.** В геометрическом случае у многих функторов сопряжённые имеются с обеих сторон: например, для производного прямого образа мы построили правый сопряжённый функтор с помощью двойственности Серра. С допустимыми подкатегориями тоже возникает такой феномен: часто из допустимости с одной стороны следует допустимость и с другой тоже. Это объясняется теоремой Бондала и ван ден Берга [BB03], которую мы обсуждали в прошлый раз.

7.16. Утверждение. *Пусть $T$ — $\mathrm{Ext}$-конечная карубиева триангулированная категория, в которой существует сильный генератор. Для строго полной подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ следующие условия эквивалентны:*

- *$\mathcal{A} \subset T$ допустима хотя бы с одной стороны;*
- *в $\mathcal{A}$ существует сильный генератор и она замкнута относительно перехода к прямым слагаемым в $T$;*
- *$\mathcal{A} \subset T$ — допустимая подкатегория.*

*Доказательство.* Покажем, что из первого условия следует второе. Предположим, что $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория, а $L\colon T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к вложению. Если $G \in T$ — какой-нибудь объект, то легко видеть, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ образ подмножества $\langle G\rangle_k \subset T$ под действием $L$ содержится в подмножестве $\langle L(G)\rangle_k$ (упражнение). По лемме 7.3 мы знаем, что $L$ сюръективен на объектах. Значит, если $G \in T$ — сильный генератор, то $L(G)$ — сильный генератор в $\mathcal{A}$. Кроме того, по следствию 7.4 подкатегория $\mathcal{A}$ замкнута относительно перехода к прямым слагаемым в $T$. Поэтому такая подкатегория $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям из второго пункта. Аналогичный аргумент работает и для допустимых справа подкатегорий.

Предположим теперь, что для $\mathcal{A}$ выполнено второе условие. Тогда $\mathcal{A}$ и $T$ — две Ext-конечные карубиевы триангулированные категории с сильным генератором. По теореме Бондала и ван ден Берга из прошлой лекции (теорема 6.4) у любого точного функтора $\mathcal{A} \to T$ есть и левый, и правый сопряжённый функторы. В частности, это верно для функтора вложения $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow T$. Значит, $\mathcal{A}$ — допустимая подкатегория, и из второго условия следует третье. А из третьего первое следует очевидным образом. □

7.17. Следствие. *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Если строго полная подкатегория $\mathcal{A} \subset D(X)$ допустима хотя бы с одной стороны, то она допустима. Тогда подкатегории ${}^\perp\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^\perp$, то есть левый и правый ортогоналы к $\mathcal{A}$, тоже являются допустимыми.*

*Доказательство.* В теореме 6.15 из прошлой лекции мы доказали, что в $D(X)$ существует сильный генератор. При этом $X$ гладкое и проективное, поэтому категория $D(X)$

будет Ext-конечна, и, как мы упоминали без доказательства, карубиева. Поэтому к подкатегории $\mathcal{A} \subset D(X)$ применимо утверждение 7.16. По следствию 7.13 подкатегория ${}^{\perp}\mathcal{A}$ является допустимой справа подкатегорией, но тогда опять-таки по утверждению 7.16 она допустима с двух сторон. □

Важным следствием утверждения 7.16 является тот факт, что допустимость подкатегории $\mathcal{A}$ удалось характеризовать в терминах триангулированной структуры самой этой подкатегории.

7.18. Следствие. *Пусть $\mathcal{A}$ — Ext-конечная карубиева триангулированная категория с сильным генератором. Тогда при любом строго полном вложении $\mathcal{A} \hookrightarrow T$ в Ext-конечную карубиеву триангулированную категорию $T$ с сильным генератором образ этого вложения будет допустимой подкатегорией в $T$.*

*Доказательство.* Очевидное следствие из второго пункта утверждения 7.16. □

Например, любое строго полное вложение $D(Y) \hookrightarrow D(X)$ для гладких проективных многообразий $X$ и $Y$ будет задавать допустимую подкатегорию в $D(X)$.

Если работать не только с гладкими проективными многообразиями, а, например, просто с гладкими, но не собственными, то аналог следствия 7.17 уже неверен, и надо аккуратно следить, какие подкатегории с какой стороны допустимы, или в каждом случае отдельно доказывать существование сопряжённых функторов с двух сторон.

7.19. **Полуортогональные разложения.** В утверждении 7.8 мы показали, что как только у нас появляется допустимая слева подкатегория, то любой объект объемлющей категории раскладывается в выделенный треугольник на объект из этой подкатегории и из её ортогонала. Обобщением этой ситуации является понятие полуортогонального разложения.

7.20. Определение. Пусть $T$ — триангулированная категория. *Полуортогональным разложением* $T$ называется последовательность $\langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ строго полных подкатегорий, удовлетворяющих условиям:

- все $\mathcal{A}_i \subset T$ — допустимые подкатегории в $T$;
- для любых $j > i$ выполняется *полуортогональность*: $\mathrm{RHom}_T(\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_i) = 0$.
- эти подкатегории вместе порождают $T$.

Уточню, что второе условие — сокращённая запись того, что для любых двух объектов $A_j \in \mathcal{A}_j$ и $A_i \in \mathcal{A}_i$ верно равенство $\mathrm{RHom}_T(A_j, A_i) = 0$, а третье означает, что наименьшая триангулированная подкатегория в $T$, содержащая все $\mathcal{A}_i$, совпадает с $T$. (Эта подкатегория в любом случае будет замкнута относительно перехода к прямым слагаемым, как мы увидим ниже.)

*Замечание.* В более технически продвинутых источниках, чем наш курс, такое полуортогональное разложение обычно называют *сильным*: мы требуем допустимости всех компонент, а можно накладывать менее сильные условия. Например, полуортогональным разложением с двумя компонентами обычно называется ситуация, когда левая компонента допустима слева, а правая — допустима справа. Но в виду следствия 7.17 при изучении гладких проективных многообразий любое полуортогональное разложение будет сильным.

7.21. Упражнение. Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ — полуортогональное разложение, а $\Phi\colon T \to T$ — автоэквивалентность категории $T$. Покажите, что $T = \langle \Phi(\mathcal{A}_1), \dots, \Phi(\mathcal{A}_n) \rangle$ — тоже полуортогональное разложение.

Изучать полуортогональные разложения — это примерно то же самое, что изучать допустимые подкатегории. В частности, полуортогональное разложение с двумя компонентами однозначно задаётся одной из своих компонент.

7.22. Лемма. *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Тогда существует биекция между:*

- *полуортогональными разложениями $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ на две компоненты; и*
- *допустимыми подкатегориями $\mathcal{A} \subset D(X)$.*

*Доказательство.* Надо показать, что любая допустимая подкатегория $\mathcal{A} \subset D(X)$ единственным образом дополняется до полуортогонального разложения $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. В одну сторону мы это уже доказали: по следствию 7.9 пара подкатегорий $\mathcal{A}$ и ${}^\perp\mathcal{A}$ порождают $D(X)$, а по следствию 7.17 они обе допустимы. Значит, по определению $D(X) = \langle \mathcal{A}, {}^\perp\mathcal{A} \rangle$ является полуортогональным разложением.

Осталось доказать единственность. Предположим, что $\mathcal{B} \subset D(X)$ — другая допустимая подкатегория, дополняющая $\mathcal{A}$ до полуортогонального разложения $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. По условие полуортогональности получаем, что $\mathcal{B} \subset {}^\perp\mathcal{A}$. Если эти две категории не равны, то по утверждению 7.11 получаем, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не порождают всю категорию $D(X)$, противоречие. $\square$

Для полуортогональных разложений существует аналог треугольников проекции:

7.23. Утверждение. *Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ — полуортогональное разложение. Тогда для каждого объекта $E \in T$ существует и единственна с точностью до единственного изоморфизма цепочка морфизмов*

$$0 = E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 = E,$$

*где для каждого $i$ конус морфизма $E_i \to E_{i-1}$ лежит в подкатегории $\mathcal{A}_i$.*

Доказательство мы опустим, оно аналогично случаю полуортогонального разложения с двумя компонентами, то есть утверждению 7.8. Достаточно знать следующую лемму, позволяющую применить индукцию по числу компонент:

7.24. Лемма. *Пусть $T$ — $\mathrm{Ext}$-конечная карубиева триангулированная подкатегория с сильным генератором. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset T$ — пара допустимых подкатегорий. Предположим, что они полуортогональны: $\mathcal{B} \subset {}^\perp\mathcal{A}$. Тогда триангулированная подкатегория $\mathcal{C} \subset T$, порождённая $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, является допустимой, а $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — её полуортогональное разложение.*

*Замечание.* При работе с производными категориям когерентных пучков на многообразиях, которые не обязаны быть гладкими проективными, такой удобной леммы уже нет, но довольно часто в таких случаях допустимость $\mathcal{C} \subset T$ с какой-нибудь из сторон удаётся доказать, явно построив сопряжённый к вложению функтор в терминах сопряжённых функторов для допустимых (с разных сторон) вложений $\mathcal{A} \subset T$, ${}^\perp\mathcal{A} \subset T$, $\mathcal{B} \subset T$ и ${}^\perp\mathcal{B} \subset T$.

*Доказательство.* Рассмотрим подмножество $\mathcal{C}'$ тех объектов $E \in T$, которые могут быть вписаны в выделенный треугольник вида

$$B \to E \to A \to B[1],$$

где $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$. В утверждении 7.11 мы доказали, что $\mathcal{C}'$ — триангулированная подкатегория. Тогда $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, то есть любой объект из $\mathcal{C}$ допускает выделенный треугольник такого вида.

Рассуждая в духе утверждения 7.11, можно показать, что из того, что $\mathcal{B}$ замкнуто относительно перехода к прямым слагаемым следует, что $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ тоже замкнута относительно перехода к прямым слагаемым (это, по сути, упражнение 7.12). В терминах операции $*$ из определения сильных генераторов это, в частности, означает, что $\mathcal{C} = \mathcal{B} * \mathcal{A}$.

Поскольку $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — допустимые подкатегории в $T$, по утверждению 7.16 в них существуют сильные генераторы $G_{\mathcal{A}}$ и $G_{\mathcal{B}}$. Пусть тогда $G := G_{\mathcal{A}} \oplus G_{\mathcal{B}}$ — объект $\mathcal{C}$. Если $\mathcal{A} = \langle G_{\mathcal{A}} \rangle_N$ и $\mathcal{B} = \langle G_{\mathcal{B}} \rangle_M$, то, используя операцию $*$ из определения сильных генераторов, получаем

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathcal{B} * \mathcal{A} = \langle G_{\mathcal{B}} \rangle_M * \langle G_{\mathcal{A}} \rangle_N \subset \langle G \rangle_{N+M+1}.$$

Значит, $G$ является сильным генератором в $\mathcal{C}$. Следовательно, категория $\mathcal{C}$ удовлетворяет всем условиям второго пункта утверждения 7.16, и, значит, является допустимой подкатегорией в $T$.

Чтобы доказать, что $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение категории $\mathcal{C}$, по определению достаточно только объяснить, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ — допустимые подкатегории в $\mathcal{C}$. Это заведомо так, например, по следствию 7.18, но легко доказывается и по определению: например, если $L \colon T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к вложению $\mathcal{A} \hookrightarrow T$, то композиция $\mathcal{C} \hookrightarrow T \xrightarrow{L} \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к вложению $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$. $\square$

*Замечание.* Заметим, что если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не были бы полуортогональны, то совершенно непонятно, будет ли в порождённой ими триангулированной подкатегории сильный генератор. Благодаря описанию $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ из леммы мы знаем, что переход от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ к $\mathcal{C}$ в полуортогональном случае требует лишь одной дополнительной операции конуса, а вообще могли бы быть и сколь угодно длинные цепочки.

7.25. **Исключительные объекты и исключительные наборы.** Исторически первые примеры допустимых подкатегорий (и, соответственно, полуортогональных разложений) имели скорее алгебраическую природу: как мы упоминали при изучении понятия классического генератора, для объекта $E \in T$ структура порождённой им категории во многом зависит от алгебры $\operatorname{Ext}^{\bullet}_T(E, E)$. Поэтому можно пытаться выяснять, когда категория $\langle E \rangle$ будет удовлетворять условиям второго пункта из утверждения 7.16 и тогда, в частности, будет допустимой подкатегорией. Например, для $E$, у которых эта алгебра Ext'ов будет максимально простой, это так. Перед тем, как этого доказывать, введём определение.

7.26. Определение. Объект $E \in T$ называется *исключительным*, если:

- $\operatorname{Hom}_T(E, E) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_E$ и
- при $i \neq 0$ верно $\operatorname{Ext}^i_T(E, E) = 0$.

Из общей теории следует (см. теорему 5.11), что триангулированная подкатегория, порождённая исключительным объектом $E$, будет эквивалентна производной категории модулей над алгеброй $\mathrm{Hom}_T(E,E) \simeq \mathbb{C}$, то есть производной категории векторных пространств. Для конкретности мы не будем ссылаться на этот результат, а докажем его явно.

Напомним обозначение: если $V^\bullet \in \mathrm{grvect}$ — конечномерное градуированное векторное пространство (то есть лишь в конечном числе градуировок соответствующая компонента не равна нулю, и все они конечномерны), а $E \in T$ — объект в триангулированной категории, то $V^\bullet \otimes E$ — это прямая сумма сдвигов объекта $E$:

$$V^\bullet \otimes E := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} E^{\oplus \dim V^i}[-i].$$

Любой морфизм $f\colon V^\bullet \to W^\bullet$ индуцирует отображение $V^\bullet \otimes E \to W^\bullet \otimes E$.

*Замечание.* Более функториально можно сказать, что объект $V^\bullet \otimes E$ — это объект в $T$, представляющий функтор $F \mapsto \mathrm{RHom}_T(F,E) \otimes V^\bullet$. Более геометрически можно сказать, что если $T = D(X)$ для какого-то многообразия $X$, то $V^\bullet \otimes E$ это тензорное произведение $E$ и пулбэка объекта $V^\bullet \in \mathrm{grvect} \cong D^b(\mathrm{vect}) = D(*)$ при отображении $X \to *$ в точку.

7.27. Лемма. *Пусть $E \in T$ — некоторый объект. Если $V^\bullet$ и $W^\bullet$ — два конечномерных градуированных пространства, то для любого $i \in \mathbb{Z}$ верно равенство*

$$\mathrm{Ext}^i_T(V^\bullet \otimes E, W^\bullet \otimes E) \cong (\mathrm{RHom}_{\mathrm{grvect}}(V^\bullet, W^\bullet) \otimes \mathrm{RHom}_T(E,E))^{\deg = i},$$

*где имеется в виду градуированная компонента степени $i$ в тензорном произведении двух градуированных векторных пространств.*

*Доказательство.* Поскольку объект $V^\bullet \otimes E$ — это (конечная) прямая сумма сдвигов объекта $E$, формула получается подстановкой определения объектов $V^\bullet \otimes E$ и $W^\bullet \otimes E$. $\square$

7.28. Лемма. *Пусть $E \in T$ — исключительный объект. Тогда для любых $V^\bullet, W^\bullet \in \mathrm{grvect}$ существует изоморфизм*

$$\mathrm{RHom}_T(V^\bullet \otimes E, W^\bullet \otimes E) \cong \mathrm{RHom}_{\mathrm{grvect}}(V^\bullet, W^\bullet).$$

*Доказательство.* Очевидное следствие из предыдущей леммы. $\square$

7.29. Лемма. *Пусть $E \in T$ — исключительный объект. Тогда подкатегория $\langle E\rangle \subset T$ эквивалентна ограниченной производной категории конечномерных векторных пространств. Любой объект в подкатегории $\langle E\rangle \subset T$ представляется в виде $V^\bullet \otimes E$, где $V^\bullet \in \mathrm{grvect}$.*

*Доказательство.* Напомним, что ограниченная производная категория конечномерных векторных пространств эквивалентна категории grvect конечномерных градуированных пространств. Рассмотрим функтор

$$\Phi\colon V^\bullet \in \mathrm{grvect} \mapsto V^\bullet \otimes E \in T.$$

Поскольку любой объект в образе $\Phi$ это прямая сумма сдвигов $E$, получаем, что $\Phi$ отображает $\mathrm{grvect} \cong D^b(\mathrm{vect})$ в подкатегорию $\langle E\rangle$. По лемме 7.28 функтор $\Phi$ строго полный, то есть образ эквивалентен $D^b(\mathrm{vect})$. В частности, образ $\Phi$ является триангулированной подкатегорией в $\langle E\rangle$. Поскольку $E$ лежит в образе $\Phi$, это значит, что $\Phi$ индуцирует эквивалентность $\mathrm{grvect} \xrightarrow{\sim} \langle E\rangle \subset T$. $\square$

7.30. Утверждение. *Пусть $E \in T$ — исключительный объект, а $T$ — $\mathrm{Ext}$-конечная карубиева триангулированная категория с сильным генератором. Тогда $\langle E\rangle \subset T$ — допустимая подкатегория.*

*Доказательство.* По лемме 7.29 категория $\langle E\rangle$ эквивалентна ограниченной производной категории конечномерных векторных пространств. Эта категория Ext-конечна, карубиева и имеет сильный генератор (это объект $E$, причём по определению он порождает всю $\langle E\rangle$ за ноль конусов). Значит, по второму пункту утверждения 7.16 подкатегория $\langle E\rangle \subset T$ допустима. $\square$

*Пример.* Пусть $X$ — многообразие Фано, то есть гладкое проективное многообразие с антиобильным каноническим классом (например, проективное пространство $\mathbb{P}^n$). Тогда структурный пучок $\mathcal{O}_X \in D(X)$ является исключительным объектом. В самом деле, $\mathrm{Ext}^\bullet_{D(X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \cong H^\bullet(\mathcal{O}_X)$ равны нулю по теореме Кодаиры об обращении в ноль (напомню, что у нас в курсе предполагается, что базовое поле характеристики ноль).

Для полуортогонального разложения, где все компоненты порождены исключительными объектами, существует отдельное название.

7.31. Определение. Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Тогда *исключительным набором* в $X$ называется последовательность $\langle E_1, \ldots, E_n\rangle$ исключительных объектов, которые полуортогональны: для $j > i$ верно $\mathrm{RHom}_T(E_j, E_i) = 0$. Исключительный набор называется *полным*, если наименьшая триангулированная подкатегория в $T$, содержащая все $E_i$, совпадает с $T$.

Так у нас получается первый интересный пример полуортогонального разложения:

7.32. Утверждение (исключительный набор Бейлинсона). *В производной категории проективного пространства $\mathbb{P}^n$ существует исключительный набор*

$$D(\mathbb{P}^n) = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \ldots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n)\rangle.$$

*Доказательство.* Поскольку $H^\bullet(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \mathbb{C}[0]$, любое линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$ является исключительным объектом. Полуортогональность следует из того факта, что для $k \in [1; n]$ линейное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)$ ациклично, то есть $\mathrm{R}\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)) = 0$. Наконец, то, что эти объекты в совокупности порождают всю категорию $D(\mathbb{P}^n)$, прямое следствие того, что $\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)$ является классическим генератором в этой категории (см. доказательство теоремы 5.15). $\square$

Другие примеры исключительных наборов и менее тривиальных полуортогональных разложений мы обсудим позже.

7.33. **Аддитивность инвариантов при полуортогональных разложениях.** Одна из причин, почему полуортогональные разложения являются удобным способом изучать триангулированные категории, это контролируемое поведение многих инвариантов триангулированных категорий при переходе к компонентам полуортогонального разложения. Рассмотрим для примера такой важный инвариант:

7.34. Определение. Пусть $T$ — триангулированная категория. Тогда *группой Гротендика* категории $T$, обозначаемой как $K_0(T)$, называется фактор свободной абелевой группы, порождённой всеми объектами $E \in T$, по соотношениям $[E] = [E'] + [E'']$ для всех выделенных треугольников $E' \to E \to E'' \to E'[1]$. Здесь квадратными скобками обозначается порождающий элемент группы $K_0$, соответствующий объекту $T$.

*Замечание.* Если вы знаете, что такое $K$-теория, то для $T = D(X)$ группа $K_0(T)$ это в самом деле нулевая $K$-теория многообразия $X$.

7.35. Упражнение. Покажите, что для двух объектов $E, E' \in T$ класс прямой суммы $[E \oplus E']$ в $K_0(T)$ равен сумме $[E] + [E']$. Покажите, что для любого объекта $E \in T$ в $K_0(T)$ верно $[E] + [E[1]] = 0$, где $[-]$ обозначает класс объекта.

7.36. Утверждение. *Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ — полуортогональное разложение. Тогда существует канонический изоморфизм $K_0(T) = \bigoplus_{i=0}^n K_0(\mathcal{A}_i)$.*

*Доказательство.* Легко проверить, что любой точный функтор между триангулированными категориями индуцирует гомоморфизм групп Гротендика. В частности, с помощью вложений $\mathcal{A}_i \hookrightarrow T$ получаем набор отображений $K_0(\mathcal{A}_i) \to T$. Рассмотрим их прямую сумму:

$$\bigoplus_{i=0}^n K_0(\mathcal{A}_i) \to T.$$

Покажем, что это изоморфизм. Определим обратное отображение таким образом: по утверждению 7.23 любой объект $E \in T$ единственным образом вписывается в последовательность стрелок

$$0 = E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 = E,$$

где для каждого $i$ конус морфизма $E_i \to E_{i-1}$ лежит в подкатегории $\mathcal{A}_i$. Отобразим тогда класс $[E] \in K_0(T)$ в прямую сумму классов $\bigoplus_{i=0}^n [\mathrm{Cone}(E_i \to E_{i-1})]$. Надо проверить, что это корректно определяет отображение $K_0(T) \to \bigoplus_{i=0}^n K_0(\mathcal{A}_i)$. Мы докажем это в случае, когда в полуортогональном разложении две компоненты, $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$, а общий случай оставим в качестве упражнения (на применение леммы 7.24 и индукцию). По функториальности треугольников проекции любой выделенный треугольник

$$E' \to E \to E'' \to E'[1]$$

в категории $T$ вписывается в $3 \times 3$-диаграмму

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B'[1] \arrow[d] \\
B \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & B[1] \arrow[d] \\
B'' \arrow[r] \arrow[d] & E'' \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B''[1] \arrow[d] \\
B'[1] \arrow[r] & E'[1] \arrow[r] & A'[1] \arrow[r] & B'[2]
\end{tikzcd}$$

Значит, $[E]$ отображается в $([A],[B])$, а сумма $[E']+[E'']$ в $([A']+[A''],[B']+[B''])$. Из того, что, в этой диаграмме столбцы являются выделенными треугольниками, получаем, что отображение на $K_0$ корректно определено.

Проверку, что это отображение в самом деле обратное, оставляю читателю в качестве упражнения. □

Получается, что группа Гротендика переводит полуортогональные разложения в прямые суммы. Есть немало других инвариантов с такими же свойствами. Например, это верно не только для $K_0$, но и для всей $K$-теории (тут нужна аккуратность: на уровне триангулированных категорий определить высшие $K$-группы невозможно, только при помощи dg-оснащений, но они, оказывается, автоматически согласованы со всеми полуортогональными разложениями). Ещё такая аддитивность выполняется для *гомологий Хохшильда* (опять-таки, лучше работать с dg-категориями).

7.37. Следствие. *Пусть $T$ — триангулированная категория. Если в $T$ существует полный исключительный набор, то $K_0(T)$ — свободная абелева группа конечного ранга.*

*Доказательство.* По утверждению 7.36 получается, что $K_0(T)$ — это конечная прямая сумма копий $K_0(D^b_{\mathrm{vect}})$. Легко проверить, что для категории градуированных векторных пространств $K_0$ изоморфно $\mathbb{Z}$. □

7.38. Следствие. *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, у которого $h^{1,0}\neq 0$ (например, кривая положительного рода). Тогда в $D(X)$ не существует полного исключительного набора.*

*Доказательство.* Можно доказать, что у такого рода многообразий $K_0$ бесконечномерно. Значит, полный исключительный набор найти невозможно. □

## 8. Перестройки. Теорема Кавативани–Окавы о жёсткости.

Перед переходом к новой теме сначала вернёмся к вопросам из прошлой лекции, на которые не хватило времени.

Как и в прошлой лекции, мы по умолчанию считаем, что $T$ — это Ext-конечная карубиева триангулированная категория с сильным генератором.

8.1. **К прошлой лекции: ещё немного об исключительных объектах.** В прошлый раз я сказал, что на многообразии Фано любое линейное расслоение является исключительным объектом. Есть и другие геометрические примеры. Например, структурный пучок исключительного дивизора при раздутии точки является исключительным объектом.

8.2. Лемма. *Пусть $\pi\colon Y\to X$ — раздутие точки в гладком проективном многообразии, и пусть $j\colon E\hookrightarrow Y$ — вложение исключительного дивизора. Тогда $j_*\mathcal{O}_E$ — исключительный объект в $D(X)$.*

*Доказательство.* Структурный пучок $j_*\mathcal{O}_E$ вписывается в короткую точную тройку когерентных пучков на $Y$:

$$0\to\mathcal{O}_Y(-E)\to\mathcal{O}_Y\to j_*\mathcal{O}_E\to 0.$$

Точные тройки в абелевой категории задают выделенные треугольники в производной категории. В частности, градуированное векторное пространство $\mathrm{RHom}_{D(Y)}(j_*\mathcal{O}_E, j_*\mathcal{O}_E)$ изоморфно сдвинутому конусу морфизма

$$\mathrm{RHom}_{D(Y)}(\mathcal{O}_Y, j_*\mathcal{O}_E) \to \mathrm{RHom}_{D(Y)}(\mathcal{O}_Y(-E), j_*\mathcal{O}_E).$$

По сопряжённости прямого и обратного образов, а так же используя изоморфизм $E \simeq \mathbb{P}^{\dim X-1}$, имеем

$$\mathrm{RHom}_{D(Y)}(\mathcal{O}_Y, j_*\mathcal{O}_E) \cong \mathrm{R\Gamma}\left(E, \mathcal{O}_E\right) \simeq \mathrm{R\Gamma}\left(\mathbb{P}^{\dim X-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\dim X-1}}\right) \cong \mathbb{C}[0],$$

а используя тот факт, что $\mathcal{O}_Y(E)$ ограничивается на $E$ как $\mathcal{O}(-1)$, имеем

$$\mathrm{RHom}_{D(Y)}(\mathcal{O}_Y(-E), j_*\mathcal{O}_E) \cong \mathrm{R\Gamma}\left(E, \mathcal{O}_Y(E)|_E\right) \simeq \mathrm{R\Gamma}\left(\mathbb{P}^{\dim X-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\dim X-1}}(-1)\right) = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{RHom}_{D(Y)}(j_*\mathcal{O}_E, j_*\mathcal{O}_E)$ одномерно в степени ноль и равно нулю в остальных степенях, то есть по определению $j_*\mathcal{O}_E$ является исключительным объектом. □

Из нерассказанного на лекции. Оба семейства примеров исключительных объектов, упомянутых выше, являются когерентными пучками, а не сложными объектами в производной категории. Про пучки исключительность обычно легче доказывать, но вообще исключительные объекты совершенно не обязаны быть просто пучками. Дам без доказательства пример: если $\pi\colon Y \to X$ — раздутие гладкой точки $x \in X$, то производный обратный образ $F := \pi^*\mathcal{O}_x \in D(Y)$ пучка-небоскрёба в раздуваемой точке — объект с ненулевыми пучками когомологий в степенях от $-(\dim X - 1)$ до 0. Сам он не является исключительным, но любое его обрезание $\tau_{\geq i}(F)$ для $i \in [-(\dim X - 2); 0]$ будет исключительным объектом в $D(Y)$. Если $\dim X \geq 3$, то можно взять, скажем, обрезание $\tau_{\geq -1}(F)$ и получить исключительный объект с двумя ненулевыми пучками когомологий.

*Замечание.* Несмотря на лемму 8.2, прилагательное "исключительный" в термине "исключительный объект" не связано напрямую с исключительными дивизорами, это до некоторой степени совпадение. Исторически этот термин происходит от понятия "исключительного векторного расслоения" на проективной плоскости, введённого Дрезе и Ле Потье в статье [DL85], а для них исключительность заключалась в том, что такие векторные расслоения являются изолированными точками в пространствах модулей расслоений.

Ещё мы в прошлый раз доказали утверждение 7.30: если $E \in T$ — исключительный объект, то $\langle E\rangle \subset T$ — допустимая подкатегория. То доказательство использовало характеризацию допустимости через свойства самой подкатегории $\langle E\rangle \simeq D^b(\mathrm{vect})$, но вообще для этого случая допустимость можно доказать по определению, предъявив явно сопряжённые к вложению функторы.

8.3. Лемма. *Пусть $T$ — $\mathrm{Ext}$-конечная триангулированная категория, а $E \in T$ — исключительный объект. Тогда функторы*

$$F \mapsto \mathrm{RHom}_T(F, E)^\vee \otimes E \quad \text{и} \quad F \mapsto \mathrm{RHom}_T(E, F) \otimes E$$

*являются левым и правым сопряжёнными функторами к вложению $\langle E\rangle \hookrightarrow T$, соответственно.*

Доказательство сопряжённости очевидно следует из того, что любой объект в подкатегории $\langle E \rangle$ изоморфен прямой сумме сдвигов копий объекта $E$.

8.4. **К прошлой лекции: ортогональные разложения.** На прошлой лекции меня спросили, почему изучаются именно полуортогональные разложения, а не двусторонне ортогональные. Проблема в том, что, по крайней мере в геометрической ситуации, ортогональные разложения встречаются слишком редко. Собственно, для категорий вида $D(X)$ для связного многообразия $X$ их не бывает, что мы сейчас докажем. Но сначала дадим определение.

8.5. Определение. Пусть $T$ — триангулированная категория. Тогда *ортогональным разложением* для $T$ называется пара допустимых подкатегорий $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset T$, которые:

- двусторонне ортогональны: для любых $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ выполняется $\mathrm{RHom}_T(A, B) = 0$ и $\mathrm{RHom}_T(B, A) = 0$;
- вместе порождают всю $T$, то есть наименьшая триангулированная подкатегория в $T$, содержащая $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, совпадает с $T$.

Ортогональные разложения часто обозначают как $T = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

8.6. Упражнение. На самом деле допустимость подкатегорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в определении 8.5 следует из прочих условий, достаточно потребовать, чтобы эти подкатегории были строго полными триангулированными подкатегориями. Докажите это, следуя такому плану:

- Если объект $E \in T$ можно представить как прямую сумму $E \simeq A \oplus B$ объектов $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$, то такое представление единственно с точностью до единственного изоморфизма.
- Подкатегория объектов в $T$, допускающих такое разложение, является триангулированной (*Указание*: используя ортогональность, покажите, что любой морфизм $A \oplus B \to A' \oplus B'$ это прямая сумма морфизмов $A \to A'$ и $B \to B'$).
- Отображение, сопоставляющее объекту $A \oplus B$ его компоненту $A$, задаёт точный функтор $T \to \mathcal{A}$, являющийся одновременно и левым, и правым сопряжённым к вложению $\mathcal{A} \hookrightarrow T$.

8.7. Утверждение. *Пусть $X$ — связное гладкое проективное многообразие. Тогда у категории $D(X)$ не существует нетривиальных ортогональных разложений, то есть для любого ортогонального разложения $D(X)$ на подкатегории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одна из подкатегорий — нулевая.*

*Доказательство.* Из определения 8.5 очевидно, что любое ортогональное разложение в частности задаёт полуортогональное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. Рассмотрим треугольник проекции для какого-нибудь объекта $E \in T$:

$$B \to E \to A \to B[1].$$

Поскольку отображение $A \to B[1]$ обязано быть нулевым в силу двусторонней ортогональности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, получаем, что любой объект $E \in T$ изоморфен прямой сумме $A \oplus B$ объекта из $\mathcal{A}$ и объекта из $\mathcal{B}$. (Для ортогональных разложений этот вывод несложно доказать напрямую, без использования треугольников проекции, см. упражнение 8.6.)

Значит, любой объект $E \in T$, который нельзя нетривиальным образом разложить в прямую сумму, целиком попадает в одну из двух подкатегорий, $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$. Такими объектами, являются, например, структурный пучок $\mathcal{O}_X \in D(X)$ и пучки-небоскрёбы $\mathcal{O}_x$ в каждой точке $x \in D(X)$ (упражнение!).

Без потери общности можно считать, что подкатегория, в которой лежит неразложимый объект $\mathcal{O}_X$, это $\mathcal{A} \subset D(X)$. Поскольку для любой точки $x \in X$ существует ненулевое отображение $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_x$, из ортогональности следует, что все пучки-небоскрёбы тоже принадлежат подкатегории $\mathcal{A}$. Но тогда любой объект $B \in \mathcal{B}$ ортогонален всем небоскрёбам, из чего следует, что его носитель пуст. Значит, в $\mathcal{B}$ нет объектов, кроме нулевого. $\square$

8.8. Упражнение. Если $X$ — гладкое и проективное многообразие, которое не является связным, то любое ортогональное разложение $D(X)$ соответствуют разбиению множества компонент связности $X$ на два непересекающихся подмножества.

Из нерассказанного на лекции. В других триангулированных категориях ортогональные разложения бывают: например, производная категория представлений конечной группы в характеристике ноль ортогонально раскладывается в прямую сумму подкатегорий, порождённых классами изоморфизма неприводимых представлений. Кроме того, ортогональные разложения часто встречаются и при изучении производных категорий когерентных пучков, потому что интересно изучать не только категорию $D(X)$ целиком, но и допустимые подкатегории в ней. Например, если $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то линейные расслоения $\mathcal{O}(0,-1)$ и $\mathcal{O}(-1,0)$ — два двусторонне ортогональных исключительных объекта, то есть у порождённой ими подкатегории в $D(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ есть ортогональное разложение.

8.9. **Перестройки: случай двухкомпонентных разложений.** В прошлой лекции мы видели, что по любой допустимой подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ можно построить два полуортогональных разложения длины два:

- $T = \langle \mathcal{A}, {}^\perp\mathcal{A} \rangle$;
- $T = \langle \mathcal{A}^\perp, \mathcal{A} \rangle$.

(Саша Кузнецов предлагает следующий способ запомнить порядок: значок $\perp$ всегда в середине.) Это подсказывает, что у одной и той же категории может быть очень много полуортогональных разложений. Сегодня мы обсудим некоторый способ строить новые полуортогональные разложения из старых, называемый перестройками.

Сперва сделаем следующее наблюдение про два ортогонала к допустимой подкатегории.

8.10. Лемма. *Пусть $T$ — триангулированная категория с функтором Серра, и пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая подкатегория. Тогда функтор Серра $S_T$ категории $T$ задаёт эквивалентность $\mathcal{A}^\perp \xrightarrow{\sim} {}^\perp\mathcal{A}$ двух ортогоналов к $\mathcal{A}$.*

*Доказательство.* По определению функтора Серра для любых двух объектов $A, B \in T$ выполняется

$$\mathrm{RHom}_T(A, B) \cong \mathrm{RHom}_T(S_T(B), A)^\vee.$$

По определению для фиксированного объекта $B$ левое пространство обращается в ноль для всех $A \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathcal{A}^\perp$, а правое — тогда и только тогда, когда объект $S_T(B)$ лежит в ${}^\perp\mathcal{A}$. Значит, действие функтора Серра задаёт равенство подмножеств $S_T(\mathcal{A}^\perp) = {}^\perp\mathcal{A}$. Поскольку функтор Серра — это автоэквивалентность, он индуцирует эквивалентность подкатегорий $\mathcal{A}^\perp \xrightarrow{\sim} {}^\perp\mathcal{A}$. □

*Замечание.* Эквивалентность двух ортогоналов верна и в случае, если в $T$ нет функтора Серра: используя треугольники проекции, можно показать, что и левый, и правый ортогонал к $\mathcal{A}$ эквивалентны *фактор-категории Вердье* $T/\mathcal{A}$, то есть универсальной триангулированной категории с точным функтором $T \to T/\mathcal{A}$, переводящим любой объект из $\mathcal{A}$ в нулевой объект.

8.11. Следствие. *Пусть $T$ — триангулированная категория с функтором Серра $S_T$, и пусть $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение. Тогда существуют ещё два полуортогональных разложения: $T = \langle S_T(\mathcal{B}), \mathcal{A} \rangle$ и $T = \langle \mathcal{B}, S_T^{-1}(\mathcal{A}) \rangle$.*

*Доказательство.* По лемме 7.22 из прошлой лекции полуортогональное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ означает, что $\mathcal{B} = {}^\perp\mathcal{A}$. Тогда по лемме 8.10 $T = \langle S_T(\mathcal{B}), \mathcal{A} \rangle$ тоже является полуортогональным разложением. Поскольку функтор Серра является автоэквивалентностью, применив функтор $S_T^{-1}$ к обеим компонентам этого разложения, получаем, что $T = \langle \mathcal{B}, S_T^{-1}(\mathcal{A}) \rangle$ — тоже полуортогональное разложение. □

Мы видим, что любое полуортогональное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ с двумя компонентами на самом деле задаёт "спираль" из допустимых подкатегорий:

$$\dots, S_T^2(\mathcal{B}), S_T(\mathcal{A}), S_T(\mathcal{B}), \mathcal{A}, \mathcal{B}, S_T^{-1}(\mathcal{A}), S_T^{-1}(\mathcal{B}), S_T^{-2}(\mathcal{A}), \dots$$

где каждые две подряд идущие допустимые подкатегории задают полуортогональное разложение категории $T$.

8.12. Упражнение. Пусть $T$ — триангулированная категория с функтором Серра $S_T$, а $\mathcal{B} \subset T$ — допустимая подкатегория. Докажите, что если $S_T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, то $\mathcal{B} = T$ или $\mathcal{B} = 0$.(*Указание*: сведите к утверждению 8.7.)

8.13. **Перестройки и действие группы кос.** Пусть нам теперь дано полуортогональное разложение $T = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ с $n$ компонентами. Для каждого $i < n$ рассмотрим подкатегорию $\mathcal{A}_{i,i+1} := \langle \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+1} \rangle$, то есть подкатегорию $T$, порождённую двумя соседними компонентами разложения $\mathcal{A}_*$. По лемме 7.24 из прошлой лекции подкатегория $\mathcal{A}_{i,i+1}$ тоже допустима в $T$, и она по построению имеет полуортогональное разложение на две компоненты. Значит, можно построить в ней другое разложение, используя методы прошлого раздела.

8.14. Определение. Для полуортогонального разложения $T = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ *перестройкой компоненты* $\mathcal{A}_{i+1}$ *через* $\mathcal{A}_i$ (или же *перестройкой компоненты* $\mathcal{A}_{i+1}$ *налево*) называется подкатегория $\sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*) := \mathcal{A}_i^\perp \cap \mathcal{A}_{i,i+1}$, то есть подкатегория в $\mathcal{A}_{i,i+1}$, являющаяся правым ортогоналом к $\mathcal{A}_i$.

8.15. Лемма. *Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ — полуортогональное разложение. Тогда для числа $0 \le i < n$ последовательность подкатегорий $T$*

$$\Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*) := \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{i-1}, \quad \sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*), \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{A}_{i+2}, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$$

*тоже является полуортогональным разложением для $T$. Она называется левой перестройкой разложения $\mathcal{A}_*$ в $i$-той компоненте.*

*Доказательство.* По лемме 8.10 и следствию 8.11 мы знаем, что

$$\mathcal{A}_{i,i+1} = \langle \sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*), \mathcal{A}_i \rangle$$

является полуортогональным разложением для $\mathcal{A}_{i,i+1}$. Из этого легко выводится, что последовательность $\Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ полуортогональна и порождает категорию $T$. Из случая двухкомпонентного разложения мы знаем, что подкатегория $\sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ допустима в подкатегории $\mathcal{A}_{i,i+1}$, которая в свою очередь допустима в $T$. Из этого следует, что $\sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ допустима и в $T$ тоже (упражнение! А можно было вместо этого напрямую воспользоваться характеризацией допустимости через внутреннюю структуру категории). Значит, последовательность $\Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ — полуортогональное разложение для $T$. □

*Замечание.* Напомню, что существуют более общие понятия полуортогональных разложений, где вместо допустимости всех компонент требуется нечто более слабое. Для таких слабых версий определённое выше понятие перестройки тоже работает.

Итого по полуортогональному разложению категории $T$ с $n$ компонентами мы научились строить $(n-1)$ новых разложений, соответствующих выборам индекса $0 \leq i < n$ в лемме 8.15. Эти операции можно повторять. Кроме того, легко аналогичным образом определить *перестройки направо*:

$$\widetilde{\Sigma}_{i+1}\colon \quad \langle \dots, \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+1}, \dots \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle \dots, \mathcal{A}_{i+1}, \widetilde{\sigma}_{i+1}(\mathcal{A}_*), \dots \rangle$$

которые будут обратными операциями к перестройкам $\Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$. Получается действие некоторой группы.

8.16. Утверждение. *На множестве $n$-компонентных полуортогональных разложений триангулированной категории $T$ операции $\Sigma_{i+1}\colon \mathcal{A}_* \mapsto \Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ задают действие группы кос на $n-1$ нитях.*

*Доказательство.* Напомним, что группа кос на $n-1$ нитях — это (бесконечная) группа, порождённая операциями $s_{i+1}$ для $i \in [0; n-1]$ с соотношениями

- $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$, и
- $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$.

Для операций $\Sigma_{i+1}$, действующих перестройками на полуортогональных разложениях, первое соотношение очевидно: в самом деле, если $|i-j| \geq 2$, то подкатегории $\mathcal{A}_{i,i+1}$ и $\mathcal{A}_{j,j+1}$ не будут пересекаться, поэтому операции перестроек происходят независимо и, следовательно, коммутируют.

Поскольку второе соотношение использует только два соседних индекса, по определению перестроек в лемме 8.15 от полуортогонального разложения важен только фрагмент $\langle \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+1}, \mathcal{A}_{i+2} \rangle$. Поэтому для проверки этого соотношения достаточно считать, что нам дано трёхкомпонентное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \rangle$. Мы хотим проверить, что два перестроенных полуортогональных разложения совпадают.

Рассмотрим сначала первую последовательность перестроек:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{B}', \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{B}', \mathcal{C}', \mathcal{A} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{C}'', \mathcal{B}', \mathcal{A} \rangle,$$

где $\mathcal{B}'$ — левая перестройка подкатегории $\mathcal{B}$ внутри пары $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, и аналогично прочие подкатегории. Вторая последовательность перестроек такова:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{A}, \widetilde{\mathcal{C}}, \mathcal{B} \rangle \rightsquigarrow \langle \tilde{\widetilde{\mathcal{C}}}, \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \rightsquigarrow \langle \tilde{\widetilde{\mathcal{C}}}, \widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{A} \rangle.$$

Здесь появившаяся на последнем шаге подкатегория $\widetilde{\mathcal{B}}$ — это перестройка подкатегории $\mathcal{B}$ внутри пары $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. В частности, получается, что $\mathcal{B}' = \widetilde{\mathcal{B}}$. Но тогда мы получили два трёхкомпонентных полуортогональных разложения категории $T$, у которых совпадают самые правые компоненты (обе равны $\mathcal{A}$) и средние ($\mathcal{B}' = \widetilde{\mathcal{B}}$). Но тогда эти полуортогональные разложения совпадают, так как их самые левые компоненты, то есть $\mathcal{C}''$ и $\tilde{\widetilde{\mathcal{C}}}$, равны правому ортогоналу к подкатегории $\langle \mathcal{B}', \mathcal{A} \rangle$ (равной, по определению перестройки, категории $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$). □

Вычислять явно последовательности перестроек, как правило, сложно. Есть несколько простых случаев.

8.17. Лемма. *Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ — полуортогональное разложение триангулированной категории $T$ с функтором Серра $S_T$. Тогда последовательность перестроек подкатегории $\mathcal{A}_n$ налево через компоненты $\mathcal{A}_{n-1}$, $\mathcal{A}_{n-2}$, ..., $\mathcal{A}_1$ — это $S_T(\mathcal{A}_n)$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{n-1} \rangle$. Тогда это допустимая подкатегория в $T$. По следствию 8.11 из существования полуортогонального разложения $T = \langle \mathcal{C}, \mathcal{A}_n \rangle$ следует, что $T = \langle S_T(\mathcal{A}_n), \mathcal{C} \rangle$ — тоже полуортогональное разложение. При этом последовательность перестроек $\mathcal{A}_n$ через каждую из подкатегорий $\mathcal{A}_{n-1}$, $\mathcal{A}_{n-2}$, ..., $\mathcal{A}_1$ — это некоторая подкатегория $\Sigma(\mathcal{A}_n)$, дающая полуортогональное разложение $T = \langle \Sigma(\mathcal{A}_n), \mathcal{C} \rangle$. Поскольку двухкомпонентные полуортогональные разложения однозначно определяются одной компонентой (лемма 7.22), это значит, что $\Sigma(\mathcal{A}_n) = S_T(\mathcal{A}_n)$, что мы и хотели доказать. □

*Замечание.* Эта лемма полезна в тех случаях, когда функтор Серра для категории $T$ легко посчитать. Например, если $T = D(X)$ для гладкого проективного многообразия $X$, то мы знаем, что $S_T$ это, с точностью до сдвига в производной категории, подкрутка на линейное расслоение $\omega_X$. Будьте внимательны: если $T \subset D(X)$ допустимая подкатегория, то функтор Серра в $T$ (он существует по теореме Бондала и ван ден Берга) не равен ограничению функтора Серра с $D(X)$!

8.18. Упражнение. Пусть $T$ — триангулированная категория с функтором Серра, а $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая подкатегория. Обозначим через $L$ левый сопряжённый функтор к вложению $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow T$, а через $R$ — правый. Докажите, что функтор Серра на $\mathcal{A}$ изоморфен композиции $L \circ S_T \circ \iota$, а обратный к нему — композиции $R \circ S_T^{-1} \circ \iota$.

Из нерассказанного на лекции. При вычислениях с полуортогональными разложениями нередко оказывается полезным понятие *левого (и правого) двойственного разложения*: для полуортогонального разложения $T = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ левым двойственным разложением называется полуортогональное разложение, полученное таким образом:

- каждую категорию $\mathcal{A}_i$ перестроить налево через подкатегорию $\langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{i-1} \rangle$;

• записать получившиеся подкатегории по убыванию $i$.

Получится некоторое разложение, которое начинается с полной перестройки $\mathcal{A}_n$ налево (то есть по лемме выше $S_T(\mathcal{A}_n)$), а заканчивается $\mathcal{A}_1$.

8.19. Лемма. *Пусть $\langle E, F\rangle \subset T$ — исключительный набор. Тогда объект*

$$F' := \mathrm{Cone}(\mathrm{RHom}(E, F) \otimes E \to F)$$

*тоже является исключительным, и $\langle F', E\rangle \subset T$ — тоже исключительный набор. Аналогично, объект*

$$E' := \mathrm{Cone}(E \to \mathrm{RHom}(E, F)^\vee \otimes F)$$

*является исключительным и пара $\langle F, E'\rangle$ — исключительный набор.*

*Доказательство.* Оба утверждения проверяются вычислением. Из общей теории мы знаем, что при перестройке подкатегории $\langle F\rangle$ через подкатегорию $\langle E\rangle$ должна получиться категория, эквивалентная $\langle F\rangle$, то есть производной категории векторных пространств. Это значит, что перестроенная категория тоже порождается исключительным объектом. Указанные выше формулы позволяют его вычислить. □

Выше мы обсудили, как по одному полуортогональному разложению построить много других. Мы построили действие бесконечной и довольно сложной группы на множестве полуортогональных разложений. Будет ли это действие транзитивно? В сформулированном виде ответ, конечно, нет: например, любое нетривиальное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B}\rangle$ нельзя перевести действием группы кос в тривиальное разложение $T = \langle T, 0\rangle$, потому что по лемме 8.10 при перестройках полуортогональных разложений сохраняется множество компонент с точностью до эквивалентности, меняется только способ вложить эти подкатегории в $T$ и порядок, в котором мы их записываем.

Из нерассказанного на лекции. Но даже если обойти эту тривиальную проблему и интересоваться уточнённым вопросом — всегда ли два разложения на попарно эквивалентные подкатегории переводятся друг в друга действием группы кос, — ответ всё равно отрицательный. В недавнем препринте [CHS23] в некоторой триангулированной категории, построенной с помощью симплектической геометрии, были построены два полных исключительных набора, которые не переводятся друг в друга действием группы кос. Для произвольных полуортогональных разложений положительного ответа никто и не ожидал (не знаю, существовали ли конкретные контрпримеры), но что транзитивность неверна даже для полных исключительных наборов — удивительно.

Впрочем, есть и другие проблемы: структура множества полуортогональных разложений на фиксированной категории науке совершенно неясна, даже для простейших многообразий вроде проективных пространств.

8.20. **Теорема Каватани–Окавы о жёсткости.** Мы обсудили, как из одного полуортогонального разложения строить много новых с помощью действия дискретной группы. Получилось счётное число вариантов. А вот никаких непрерывных семейств полуортогональных разложений существовать не может. Это следует из теоремы Каватани–Окавы о жёсткости допустимых подкатегорий, которую мы в этом разделе докажем. Она утверждает, что допустимая подкатегория в гладком проективном многообразии автоматически замкнута относительна “маленьких деформаций” объектов. Из этого следует, что допустимая подкатегория — это объект жёсткий, недеформируемый.

*Замечание.* Отметим, что простейший пример допустимой подкатегории, а именно — подкатегория, порождённая одним исключительным объектом $E$, — заведомо такая, потому что деформации объекта $E$ контролируются пространством $\mathrm{Ext}^1(E,E)$, которое равно нулю по исключительности $E$.

Результат звучит несколько удивительно: допустимость определялась чисто категорно, и требует лишь существования двух сопряжённых функторов, а свойство получается геометрическое, про семейства объектов в категориях. При этом доказательство не очень сложное. В вопросах, связанных со свойствами произвольных допустимых подкатегорий (например, при обсуждении того, какие многообразия вообще допускают хоть какое-то нетривиальное полуортогональное разложение), теорема Каватани–Окавы — чрезвычайно полезный инструмент.

8.21. Теорема ([KO18]). *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{A} \subset D(X)$ — допустимая подкатегория. Пусть $U$ — связное гладкое многообразие, $\pi\colon X \times U \to U$ — морфизм проекции, а $\mathcal{E} \in D(X \times U)$ — некоторый объект в производной категории произведения. Тогда подмножество $U_{\mathcal{A}} \subset U$ тех замкнутых точек $u \in U$, что производное ограничение $\mathcal{E}$ на слой $\pi^{-1}(u) = X \times \{u\} \simeq X$ попало в подкатегорию $\mathcal{A} \subset D(X)$, является открытым (в множестве замкнутых точек $U$).*

Стоит думать про $\mathcal{E}$ как про семейство объектов из $D(X)$, параметризованное $U$.

Из нерассказанного на лекции. Эта формулировка предполагает, что любая замкнутая точка — это спектр базового поля, то есть алгебраическую замкнутость. Более точное утверждение такое: существует наибольшая открытая подсхема $U_{\mathcal{A}} \subset U$, для которой ограничение $\mathcal{E}|_{X\times U_{\mathcal{A}}}$ попадает в допустимую подкатегорию $\mathcal{A} \boxtimes D(U_{\mathcal{A}}) \subset D(X \times U_{\mathcal{A}})$, причём любая замкнутая точка $u \in U$, для которой $\mathcal{E}|_{X\times\{u\}}$ попадает в подкатегорию $\mathcal{A} \boxtimes D(\{u\}) \subset D(X \times \{u\})$, лежит в $U_{\mathcal{A}}$. Здесь $\mathcal{A} \boxtimes D(U_{\mathcal{A}})$ — наименьшая триангулированная подкатегория в $D(X \times U_{\mathcal{A}})$, содержащая все объекты вида $A \boxtimes E$, где $A \in \mathcal{A} \subset D(X)$ и $E \in D(U_{\mathcal{A}})$, и замкнутая относительно взятия прямых слагаемых; эта подкатегория будет допустима (см. понятие относительного полуортогонального разложения в [Kuz11]).

Для доказательства нам понадобится следующий критерий принадлежности к допустимой подкатегории в терминах генератора ортогональной подкатегории.

8.22. Лемма. *Пусть $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение, и пусть $G_{\mathcal{B}}$ — классический генератор подкатегории $\mathcal{B}$. Тогда объект $E \in T$ лежит в подкатегории $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{RHom}_T(G_{\mathcal{B}}, E) = 0$.

*Доказательство.* Рассмотрим треугольник проекции для объекта $E \in T$:

$$B \to E \to A \to B[1]$$

Из полуортогональности мы знаем, что $\mathrm{RHom}_T(G_{\mathcal{B}}, A) = 0$. Следовательно,

$$\mathrm{RHom}_T(G_{\mathcal{B}}, E) \cong \mathrm{RHom}_T(G_{\mathcal{B}}, B).$$

Поэтому достаточно доказать, что для любого ненулевого объекта $B \in \mathcal{B}$ градуированное пространство $\mathrm{RHom}_T(G_{\mathcal{B}}, B)$ не может быть нулевым. Это общий факт про классические генераторы в триангулированных категориях ("любой классический генератор является генератором"). В этом содержание леммы 8.23 ниже. □

8.23. Лемма. *Пусть $T$ — триангулированная категория, и пусть $G \in T$ — классический генератор. Тогда для любого ненулевого объекта $E \in T$ верно, что* $\mathrm{RHom}_T(G, E) \neq 0$.

*Доказательство.* Предположим, что $E \in T$ — некоторый объект, для которого

$$\mathrm{RHom}_T(G, E) = 0.$$

Поскольку $G$ — классический генератор в $T$, объединение подмножеств $\cup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \langle G \rangle_i$ совпадает с $T$ (мы это доказали в утверждении 6.10 в шестой лекции). Пусть $i$ — наименьшее число, для которого $E \in \langle T \rangle_i$. Случай $i = 0$ оставим в качестве упражнения (не забудьте учесть переход к прямым слагаемым). Если же $i > 0$, то по определению это значит, что существует выделенный треугольник

$$G \otimes V^\bullet \to E \oplus E' \to E'' \to G \otimes V^\bullet[1], \tag{8.23.1}$$

где $V^\bullet$ — градуированное векторное пространство, $E'$ — какой-то объект из $T$, а $E''$ — некоторый объект из $\langle G \rangle_{i-1}$. Поскольку $\mathrm{RHom}_T(G, E) = 0$, морфизм

$$G \otimes V^\bullet \to E \oplus E'$$

пропускается через прямое слагаемое $E'$. Иными словами, первый морфизм в треугольнике (8.23.1) это прямая сумма отображений

$$(G \otimes V^\bullet \to E') \quad \oplus \quad (0 \to E),$$

но тогда его конус тоже распадается в прямую сумму:

$$E'' \simeq \mathrm{Cone}(G \otimes V^\bullet \to E') \oplus E.$$

Это противоречие: мы получили, что $E$ является прямым слагаемым объекта $E'' \in \langle G \rangle_{i-1}$, из чего следует, что $E \in \langle G \rangle_{i-1}$, а так не может быть в силу выбора числа $i$. □

Вернёмся теперь к теореме Каватани–Окавы о жёсткости.

*Доказательство теоремы 8.21.* Пусть $G_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B} \subset D(X)$ — классический генератор подкатегории $\mathcal{B}$ (как мы обсуждали в прошлый раз, можно взять проекцию любого классического генератора $D(X)$ в $\mathcal{B}$). Согласно лемме 8.22 нам надо показать, что множество тех точек $u \in U$, для которых $\mathrm{RHom}_X(G_{\mathcal{B}}, \mathcal{E}|_{X \times \{u\}} = 0$, является открытым. Мы докажем это, переформулировав условие с помощью функтора внутреннего Hom'а.

Обозначим через $G \in D(X \times U)$ обратный образ $G_{\mathcal{B}}$ при проекции $X \times U \to X$. Рассмотрим внутренний Hom-объект $\mathcal{H} := \mathrm{R}\mathcal{H}\mathrm{om}_{X \times U}(G, \mathcal{E}) \cong G^\vee \otimes \mathcal{E} \in D(X \times U)$. По теореме о плоской замене базы слой производного прямого образа $\pi_*(\mathcal{H})$ в точке $u \in U$ — это вычисление гиперкогомологий ограничения объекта $\mathcal{H}$ на слой $\pi^{-1}(u)$. Поскольку по определению ограничение объекта $G$ на каждый слой проекции $\pi$ изоморфно $G_{\mathcal{B}}$, получается, что

$$\mathrm{R}\Gamma\,(X \times \{u\}, \mathcal{H}|_{X \times \{u\}}) \cong \mathrm{R}\Gamma\,(X \times \{u\}, G_{\mathcal{B}}^\vee \otimes \mathcal{E}|_{X \times \{u\}}) \cong \mathrm{RHom}_X(G_{\mathcal{B}}, \mathcal{E}|_{X \times \{u\}}).$$

Здесь мы использовали, что производное ограничение коммутирует с производным тензорным произведением и с переходом к двойственному объекту. Следовательно, по лемме 8.22 точка $u \in U$ лежит в $U_{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда производное ограничение объекта $\pi_*(\mathcal{H}) \in D(U)$ в эту точку нулевое. Иными словами, $U_{\mathcal{A}}$ — это дополнение до носителя объекта $\pi_*(\mathcal{H}) \in D(U)$. Поскольку носитель всегда замкнут, подмножество $U_{\mathcal{A}}$, являющееся дополнением до замкнутого множества — открытое. □

Из нерассказанного на лекции. С помощью этой теоремы иногда легко показать, что какая-то подкатегория не является допустимой. Доказывать по определению несуществование сопряжённых функторов довольно сложно. Например, верно такое:

8.24. Следствие. *Пусть $E$ — гладкая проективная кривая рода один. Тогда подкатегория $\langle \mathcal{O}_E \rangle \subset D(E)$, порождённая структурным пучком, не является допустимой.*

*Доказательство.* Рассмотрим семейство линейных расслоений на $E$, заданных дивизорами $[p] - [0]$, где $[0]$ — фиксированная точка на $E$, а $p$ пробегает всю кривую. Для $p = 0$ это тривиальное расслоение. Если бы $\langle \mathcal{O}_E \rangle \subset D(E)$ было бы допустимой подкатегорией, то по теореме 8.21 для какой-то Зариски-открытой окрестности $U \subset E$ точки $0$ все линейные расслоения $\mathcal{O}([u] - [0])$ для $u \in U$ лежали бы в $\langle \mathcal{O}_E \rangle$. Однако легко показать вычислением, что

$$\mathrm{RHom}_{D(E)}(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}([u] - [0])) = 0$$

при любом $u \neq 0$, то есть $\mathcal{O}([u] - [0])$ лежит в ортогонале $\mathcal{O}_E^{\perp}$, и заведомо не может лежать в $\langle \mathcal{O}_E \rangle$ (лемма 8.23). □

8.25. **Инвариантность допустимых подкатегорий.** Теорема 8.21 показывает, что допустимые подкатегории замкнуты относительно “малых деформаций” объектов. Из этого можно вывести, что в фиксированной категории не может быть нетривиального семейства допустимых подкатегорий, только надо придумать, как определить “семейство допустимых подкатегорий”. Это можно сделать — например, в статье [BOR20] для семейств многообразий строится пространство модулей послойных полуортогональных разложений и, в частности, доказывается, что у фиксированного многообразия это пространство модулей дискретно.

Тонкости определения мы обсуждать не будем, а вместо этого докажем полезный частный случай: если при подкрутках допустимой подкатегории на линейные расслоения из $\mathrm{Pic}^0$ не должно получаться нетривиального семейства, значит, каждая допустимая подкатегория инвариантна относительно действия $\mathrm{Pic}^0$, и аналогично для действия автоморфизмов из связной компоненты группы автоморфизмов многообразия. Этот результат доказан в той же статье Каватани–Окавы, что и прошлая теорема.

8.26. Теорема ([KO18]). *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{A} \subset D(X)$ — допустимая подкатегория. Тогда для любого линейного расслоения $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ из связной компоненты группы Пикара верно равенство $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L} = \mathcal{A}$. Аналогично, для любого автоморфизма $g \in \mathrm{Aut}^0(X)$ из связной компоненты группы автоморфизмов верно равенство $g^*\mathcal{A} = \mathcal{A}$.*

*Доказательство.* Мы докажем утверждение про $\mathrm{Pic}^0(X)$, утверждение про автоморфизмы аналогично. Пусть $\mathcal{P}$ — универсальное линейное расслоение на $X \times \mathrm{Pic}^0(X)$, то есть такое расслоение, которое для любого $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ ограничивается на "срез"

$$X \times \{\mathcal{L}\} \subset X \times \mathrm{Pic}^0(X)$$

изоморфно $\mathcal{L}$. Такое расслоение существует по определению схемы Пикара $\mathrm{Pic}^0(X)$. Если $X$ — это абелево многообразие, то $\mathcal{P}$ — это расслоение Пуанкаре из лекции 4 (определение 4.18)

Пусть $G_{\mathcal{A}}$ — классический генератор в $\mathcal{A} \subset D(X)$. Рассмотрим на произведении $X \times \mathrm{Pic}^0(X)$ объект $\pi^*(G_{\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{P} \in D(X \times \mathrm{Pic}^0(X))$, где $\pi\colon X \times \mathrm{Pic}^0(X) \to X$ — проекция на первый множитель. По определению линейного расслоения $\mathcal{P}$ про этот объект можно думать, как про семейство подкруток объекта $G_{\mathcal{A}}$ на все расслоения из $\mathrm{Pic}^0(X)$. По теореме Каватани–Окавы о жёсткости (теорема 8.21) подмножество линейных расслоений

$$U := \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X) | G_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{L} \in \mathcal{A}\}$$

является открытым в $\mathrm{Pic}^0$, причём поскольку $G_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ по построению, то тривиальное линейное расслоение $\mathcal{O}_X$ лежит в $U$. В частности, $U$ не пусто.

Покажем, что для любого $\mathcal{L} \in U$ и любого объекта $A \in \mathcal{A}$ верно, что подкрутка $A \otimes \mathcal{L}$ лежит в $\mathcal{A}$. В самом деле, по определению $U$ объект $G_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{L}$ лежит в $\mathcal{A}$. Значит, подкатегория, порождённая этим объектом, тоже целиком содержится в $\mathcal{A}$. Однако подкрутка на $\mathcal{L}$ — это эквивалентность категорий, поэтому $\langle G_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{L}\rangle = \langle G_{\mathcal{A}}\rangle \otimes \mathcal{L}$. А раз $G_{\mathcal{A}}$ — классический генератор в $\mathcal{A}$, из этого следует, что $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L} \subset \mathcal{A}$.

На многообразии $\mathrm{Pic}^0(X)$ есть структура группы, заданная тензорным произведением линейных расслоений. Покажем, что подмножество $U \subset \mathrm{Pic}^0(X)$ замкнуто относительно тензорного произведения. В самом деле, если $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in U$ — два линейных расслоения, то $\mathcal{L}_1 \otimes G_{\mathcal{A}}$ лежит в $\mathcal{A}$, и тогда по аргументу выше, применённому к $\mathcal{L}_2$, имеем

$$\mathcal{L}_2 \otimes (\mathcal{L}_1 \otimes G_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{A},$$

что означает по определению, что тензорное произведение $\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1$ тоже лежит в $U$.

Мы получили, что $U \subset \mathrm{Pic}^0(X)$ — открытое подмножество в связной топологической группе, замкнутое относительно умножения и содержащее групповую единицу. Из этих свойств следует, что $U = \mathrm{Pic}^0(X)$. В самом деле, пусть $U' = U \cap U^{-1}$, где $U^{-1}$ — множество обратных элементов к точкам из $U$. Тогда $U'$ — открытая подгруппа в $\mathrm{Pic}^0(X)$. Любая открытая подгруппа автоматически является замкнутой, потому что дополнение до неё — объединение классов смежности, каждый из которых тоже открыт. Поскольку $\mathrm{Pic}^0(X)$ — связное пространство, то открыто-замкнутое подмножество $U'$ или пусто, или совпадает со всем $\mathrm{Pic}^0(X)$. По условию $U'$ содержит групповую единицу $\mathcal{O}_X \in \mathrm{Pic}^0(X)$, и тогда $U = U' = \mathrm{Pic}^0(X)$.

Мы доказали, что для любого $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ верно, что $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L} \subset \mathcal{A}$. С другой стороны, из равенства

$$\mathcal{L} \otimes (\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{A}) = (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\vee) \otimes \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

следует, что это вложение на самом деле является равенством, что мы и хотели доказать. $\square$

8.27. Упражнение. Продумайте доказательство теоремы 8.26 для группы $\mathrm{Aut}^0(X)$. (*Указание*: какой объект надо взять на произведении $X \times \mathrm{Aut}^0(X)$ вместо

$$\pi^*(G_{\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{P} \in D(X \times \mathrm{Pic}^0(X)),$$

использованного в доказательстве выше?)

Из нерассказанного на лекции. Из инвариантности следует, например, такой факт:

8.28. Утверждение. *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, у которого $\mathrm{Pic}^0(X)$ не является точкой. Тогда в $D(X)$ не существует полного исключительного набора.*

*Доказательство.* Пусть $E \in D(X)$ — исключительный объект. Тогда теорема 8.26 утверждает, что для любого $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ верно $\langle E \rangle \otimes \mathcal{L} = \langle E \rangle$, из чего нетрудно вывести, что $E \simeq E \otimes \mathcal{L}$ (упражнение!). Если $\mathrm{supp}(E) = X$, то существует некоторый пучок когомологий $\mathcal{H} = \mathcal{H}^i(E)$, чей носитель тоже совпадает с $X$. При этом должно выполняться $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{H}$ для всех $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$, но для когерентного пучка положительного ранга это невозможно (упражнение; см., например, “general fact” из начала доказательства [Huy06, Lem. 6.9]). Противоречие; значит, $\mathrm{supp}(E)$ строго меньше, чем $X$. Можно доказать, что носитель $E$ содержится в объединении конечного числа слоёв морфизма Альбанезе $\mathrm{alb}_X \colon X \to \mathrm{Pic}^0(\mathrm{Pic}^0(X))$.

Из этого следует, что никакой конечный набор исключительных объектов $E_1$, ..., $E_k$ не может порождать всю категорию $D(X)$, так как $\mathrm{supp}(\oplus_i E_i) = \cup_i \mathrm{supp}(E_i)$ это собственное замкнутое подмножество в $X$ и любой объект в порождённой $\oplus_i E_i$ подкатегории тоже будет иметь носитель внутри этого подмножества. $\square$

## 9. Полуортогональные разложения в малых размерностях

Изучение алгебраической геометрии часто начинается с изучения кривых. В этой лекции мы обсудим, какие для производных категорий когерентных пучков на кривых могут быть полуортогональные разложения. Для такого вопроса кривые, пожалуй, оказываются слишком простыми, чтобы служить ценным источником примеров, но разобраться, что с ними происходит, всё равно полезно. В конце лекции мы перейдём к поверхностям и обсудим некоторые результаты про них, в основном про $\mathbb{P}^2$.

9.1. **Полуортогональные разложения для $\mathbb{P}^1$.** Мы уже видели, что в производной категории проективного пространства существует полный исключительный набор:

$$D(\mathbb{P}^n) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n) \rangle$$

В частности, для проективной прямой получается разложение $D(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1) \rangle$. Его можно подкрутить на любое число $n \in \mathbb{Z}$ и получить $D(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n+1) \rangle$.

9.2. Упражнение. Покажите, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ разложение $D(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n+1) \rangle$ получается из разложения $D(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1) \rangle$ последовательностью перестроек.

Других нетривиальных полуортогональных разложений у проективной прямой не существует. Для того, чтобы это доказать, сначала вспомним, как устроены когерентные пучки на гладких кривых.

9.3. Лемма. *Пусть $C$ — гладкая кривая. Любой когерентный пучок $\mathcal{F}$ на $C$ изоморфен прямой сумме $\mathcal{F} \simeq V \oplus T$ некоторого векторного расслоения $V$ и пучка кручения $T$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $C$. Пусть $T \subset \mathcal{F}$ — подпучок кручения в нём, то есть наибольший подпучок, чей носитель — собственное подмножество $C$. Рассмотрим точную тройку:

$$0 \to T \hookrightarrow \mathcal{F} \to \mathcal{F}/T \to 0. \tag{9.3.1}$$

В факторе $\mathcal{F}/T$ нет кручения (упражнение). Локальное кольцо каждой замкнутой точки на гладкой кривой является кольцом дискретного нормирования, а у таких колец любой конечно-порождённый модуль без кручения свободен. Значит, пучок $\mathcal{F}/T$ локально свободен, то есть это векторное расслоение. Точная тройка (9.3.1) выше задаётся некоторым классом в

$$\mathrm{Ext}^1_C(\mathcal{F}/T, T) \cong H^1((\mathcal{F}/T)^\vee \otimes T),$$

где $(-)^\vee$ означает двойственный объект в производной категории. Так как $\mathcal{F}/T$ – векторное расслоение, двойственный к нему объект в производном смысле — это обычное двойственное векторное расслоение. Поэтому объект $(\mathcal{F}/T)^\vee \otimes T$ является когерентным пучком. При этом носитель тензорного произведения $(\mathcal{F}/T)^\vee \otimes T$ равен носителю пучка $T$, в частности нульмерен. Значит, у пучка $(\mathcal{F}/T)^\vee \otimes T$ нет когомологий, кроме нулевых. Следовательно, точная тройка (9.3.1) расщепляется, что и даёт искомое разложение $\mathcal{F}$ в прямую сумму. $\square$

Нам понадобится дополнительный факт, который уже верен не для произвольной кривой, а только для $\mathbb{P}^1$. Это теорема Гротендика:

9.4. Теорема (см., например, [OSS11, Thm. 2.1.1]). *Пусть $V$ — векторное расслоение на $\mathbb{P}^1$. Тогда оно изоморфно прямой сумме линейных расслоений $\bigoplus_{i=1}^{\mathrm{rk}\,V} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i)$ для некоторого набора целых чисел $k_1, \ldots, k_{\mathrm{rk}\,V}$.*

9.5. Упражнение. Покажите, что на любой кривой положительного рода существуют векторные расслоения, не распадающиеся в прямую сумму линейных. (*Указание*: постройте нетривиальное расширение двух тривиальных линейных расслоений и докажите, что оно не распадается в прямую сумму никаким образом.)

Ключевое наблюдение, которое позволит нам классифицировать все допустимые подкатегории в $D(\mathbb{P}^1)$, состоит в том, что на проективной прямой “слишком легко” породить всю производную категорию $D(\mathbb{P}^1)$. Например, верно следующее:

9.6. Лемма. *Любой из объектов ниже — классический генератор в $D(\mathbb{P}^1)$:*

- *прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ двух различных линейных расслоений;*
- *прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus T$ произвольного линейного расслоения и ненулевого пучка кручения $T \neq 0$.*

*Доказательство.* Как мы уже знаем, для любого числа $k \in \mathbb{Z}$ прямая сумма

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k+1)$$

двух линейных расслоений с последовательными подкрутками — классический генератор в $D(\mathbb{P}^1)$. Будем сводить всё к этому случаю.

Сперва докажем вспомогательное утверждение: прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_x$ любого линейного расслоения на $\mathbb{P}^1$ и пучка-небоскрёба в произвольной точке $x \in \mathbb{P}^1$ порождает $D(\mathbb{P}^1)$. Это частный случай $T = \mathcal{O}_x$ второго пункта в формулировке. В самом деле, существует сюръекция $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_x$, чьё ядро изоморфно $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-1)$. Поскольку точные тройки в абелевой категории переходят в выделенные треугольники в производной, из этого следует, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-1) \in \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_x \rangle$. Но, как было отмечено выше, пара расслоений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-1)$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ вместе порождают $D(\mathbb{P}^1)$. Значит, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_x$ — классический генератор $D(\mathbb{P}^1)$.

Докажем теперь, что два неизоморфных линейных расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ порождают $D(\mathbb{P}^1)$. Без потери общности можно считать, что $m < n$. Тогда общий однородный многочлен степени $n - m$ от двух переменных задаёт инъективное отображение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, чьё коядро — прямая сумма $(n - m)$ пучков-небоскрёбов в различных точках $\mathbb{P}^1$, а именно — в корнях выбранного многочлена. Значит, в подкатегории $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \rangle$ содержится прямая сумма $(n - m)$ небоскрёбов. По определению эта подкатегория замкнута относительно перехода к прямым слагаемым, поэтому пучки-небоскрёбы по отдельности в ней тоже содержатся. Значит, в $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \rangle$ содержится, например, прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_x$ линейного расслоения и пучка-небоскрёба. Это сводит вопрос к предыдущему наблюдению.

Осталось доказать, что прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus T$, где $T$ — ненулевой пучок кручения, порождает $D(\mathbb{P}^1)$. Носитель $T$ — нульмерен, поэтому $T(1) \simeq T$, из чего следует, что для некоторого числа $r > 0$ существует сюръекция $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow T$. Ядро этой сюръекции — пучок без кручения, то есть по лемме 9.3 векторное расслоение, а по теореме 9.4 это прямая сумма линейных расслоений $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i)$. По предыдущему пункту достаточно доказать, что в этой прямой сумме встретится хотя бы одно линейное расслоение, не изоморфное $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$. Если бы это было не так, то пучок $T$ лежал бы в подкатегории $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \rangle$, но мы знаем, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ — исключительный объект, и любой объект в порождённой им подкатегории — это прямая сумма сдвигов копий $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$. Значит, $T$ не может лежать в этой подкатегории и всё доказано. □

Теперь мы можем доказать полную классификацию допустимых подкатегорий в производной категории когерентных пучков на проективной прямой.

9.7. Утверждение. *Пусть $\mathcal{A} \subset D(\mathbb{P}^1)$ — допустимая подкатегория. Тогда это либо $0$, либо $\langle \mathcal{O}(n) \rangle$ для какого-то $n \in \mathbb{Z}$, либо вся $D(\mathbb{P}^1)$.*

*Доказательство.* Поскольку $\mathcal{A} \subset D(\mathbb{P}^1)$ допустима, в ней существует классический генератор $G \in \mathcal{A}$. На любой гладкой кривой категория когерентных пучков имеет гомологическую размерность один. Как мы обсуждали в лемме 2.20 из второй лекции, из этого следует, что объект $G \in D(\mathbb{P}^1)$ изоморфен прямой сумме своих пучков когомологий $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i(G)[-i]$. Легко видеть, что объекты

$$G \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i(G)[-i] \quad \text{и} \quad \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i(G)$$

порождают одну и ту же подкатегорию в $D(\mathbb{P}^1)$, а именно наименьшую триангулированную подкатегорию, содержащую все пучки $\mathcal{H}^i(G)$ и замкнутую относительно взятия прямых слагаемых. Поэтому можно без потери общности считать, что $G$ — это когерентный пучок. Случай $G = 0$ тривиален, поэтому считаем, что $G \neq 0$.

По лемме 9.3 и теореме 9.4 тогда $G$ изоморфно прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^{rk(G)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i) \oplus T$ линейных расслоений и пучка кручения $T$. Рассмотрим несколько вариантов того, как может быть устроено это разложение:

**Вариант 1**: ранг равен нулю, то есть $G = T$ — пучок кручения. Тогда носитель $G$ — некоторое конечное множество точек в $\mathbb{P}^1$, и носитель любого объекта в подкатегории $\langle G \rangle$ содержится в этом конечном множестве. Тогда подкатегория $\langle G \rangle$ не может быть допустимой: например, по теореме Каватани–Окавы об инвариантости (теорема 8.26) любая допустимая подкатегория в $D(\mathbb{P}^1)$ должна быть $\mathrm{PGL}_2$-инвариантна, но никакой (непустой) конечный набор точек не может сохраняться группой $\mathrm{PGL}_2$. (*Упражнение*: докажите, используя другую теорему Каватани–Окавы, что ни на каком гладком проективном многообразии не существует допустимых подкатегорий, у которых объединение носителей всех объектов — конечное множество.) Значит, этот вариант невозможен.

**Вариант 2**: предположим, что среди линейных расслоений, входящих в разложение $G$ в прямую сумму, встречается пара различных линейных расслоений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$. Тогда по лемме 9.6 объект $G$ порождает всю производную категорию $D(\mathbb{P}^1)$, то есть $\mathcal{A} = D(\mathbb{P}^1)$.

**Вариант 3**: предположим, что пучок кручения $T$ в разложении $G$ нетривиален. Тогда среди прямых слагаемых $G$ найдётся и некоторое линейное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$, и нетривиальный пучок кручения $T$. Снова по лемме 9.6 из этого следует, что $\mathcal{A} = \langle G \rangle = D(\mathbb{P}^1)$.

Получается, что пучок $G$ может порождать допустимую подкатегорию, не совпадающую с $D(\mathbb{P}^1)$, только тогда, когда он изоморфен прямой сумме нескольких копий одного и того же линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$. Тогда $\mathcal{A} = \langle G \rangle = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \rangle$. □

9.8. **Канонический класс и неразложимость производных категорий.** Выше мы полностью классифицировали все полуортогональные разложения для $D(\mathbb{P}^1)$. Для кривых положительного рода классификация получается ещё проще: нетривиальных разложений не существует. То, что на кривой $C$ рода $g > 0$ нет исключительных объектов, нетрудно доказать в духе утверждения 9.7 (*подсказка*: если $E$ — векторное расслоение на $C$, то $E^\vee \otimes E$ содержит структурный пучок $\mathcal{O}_C$ как прямое слагаемое). Доказать, что никаких полуортогональных разложений вообще нет, сложнее. Ключевое утверждение естественно доказывать не только для кривых, а сразу в произвольной размерности. Это ещё одна теорема Каватани и Окавы, причём из всё той же статьи [KO18]:

9.9. Теорема. *Пусть $X$ — связное гладкое проективное многообразие, у которого каноническое линейное расслоение $\omega_X$ глобально порождено. Тогда в категории $D(X)$ нет допустимых подкатегорий, кроме нулевой и всей $D(X)$.*

Иными словами, для такого многообразия $X$ в любом полуортогональном разложении производной категории $D(X)$ одна из компонент равна всей $D(X)$, а остальные равны нулю. Триангулированные категории, не допускающие нетривиальных полуортогональных разложений, называются *неразложимыми*.

*Доказательство.* Пусть $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение. Нам нужно доказать, что либо $\mathcal{A}$, либо $\mathcal{B}$ — нулевая подкатегория. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, а $\mathcal{O}_x$ — пучок-небоскрёб в ней. Сначала мы покажем, что этот пучок обязательно лежит в одной из подкатегорий $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$. Для этого рассмотрим треугольник проекции для этого пучка:

$$B \to \mathcal{O}_x \xrightarrow{a} A \to B[1]. \tag{9.9.1}$$

Назовём средний морфизм в этом треугольнике $a\colon \mathcal{O}_x \to A$. Пусть $s \in \Gamma(X, \omega_X)$ — глобальное сечение канонического линейного расслоения, которое не обращается в ноль в точке $x \in X$. Такое $s$ существует по предположению глобальной порождённости $\omega_X$. Тогда умножение на это сечение задаёт изоморфизм $\mathcal{O}_x \xrightarrow{s} \mathcal{O}_x \otimes \omega_X \simeq \mathcal{O}_x$. Он вписывается в морфизм выделенных треугольников

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & \mathcal{O}_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & A \arrow[r] \arrow[d, "s"] & B[1] \arrow[d, "s"] \\
B \otimes \omega_X \arrow[r] & \mathcal{O}_x \arrow[r] & A \otimes \omega_X \arrow[r] & B \otimes \omega_x[1]
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим морфизм $A \to B \otimes \omega_X[1]$, получающийся из самого правого коммутативного квадрата. Отметим, что по двойственности Серра

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHom}_{D(X)}(A, B \otimes \omega_X[1]) \cong \mathrm{RHom}_{D(X)}(B \otimes \omega_X[1], A \otimes \omega_X[\dim X])^\vee \cong \\
\cong \mathrm{RHom}_{D(X)}(B[1], A[\dim X])^\vee,
\end{aligned}$$

но из полуортогональности разложения $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ мы знаем, что правая часть равна нулю. Значит, морфизм $A \to B \otimes \omega_X[1]$ — нулевой. Рассмотрим тогда отображения из $A$ в объекты нижнего выделенного треугольника:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "s"] \arrow[dr, "0"] & \\
B \otimes \omega_X \arrow[r] & \mathcal{O}_x \arrow[r] & A \otimes \omega_X \arrow[r] & B \otimes \omega_x[1]
\end{tikzcd}$$

Из длинной точной последовательности, получаемой применением функтора $\mathrm{RHom}(A, -)$ к этому выделенному треугольнику, мы знаем, что если отображение $A \to A \otimes \omega_X$ таково, что его композиция с морфизмом $A \otimes \omega_X \to B \otimes \omega_X[1]$ равна нулю, то это отображение поднимается до некоторого морфизма $t\colon A \to \mathcal{O}_x$.

Теперь можно рассмотреть композицию $t \circ a\colon \mathcal{O}_x \to A \to \mathcal{O}_x$. Поскольку $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \cong \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$, эта композиция или автоморфизм, или равна нулю. (Впоследствии мы увидим, что эти два случая соответствуют вариантам $\mathcal{A} = D(X)$ и $\mathcal{A} = 0$.).

**Первый случай**: предположим, что композиция $t \circ a$ — некоторый автоморфизм $\phi$ пучка-небоскрёба $\mathcal{O}_x$. Тогда треугольник проекции для пучка $\mathcal{O}_x$ расщепляется: морфизм $B \to \mathcal{O}_x$ из треугольника проекции (9.9.1) можно представить в виде композиции

$$(B \to \mathcal{O}_x \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathcal{O}_x \xrightarrow{a} A) \xrightarrow{t} \mathcal{O}_x,$$

но любой морфизм из $B$ в $A$ равен нулю по полуортогональности. Значит, морфизм $B \to \mathcal{O}_x$ в треугольнике (9.9.1) нулевой, из чего следует изоморфизм $A[-1] \simeq B \oplus \mathcal{O}_x[-1]$. Поскольку объекты $A[-1]$ и $B$ должны быть полуортогональны, такой изоморфизм может существовать только в случае, когда $B = 0$, а $A$ тогда изоморфно $\mathcal{O}_x$. Иными словами, в этом случае пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ лежит в подкатегории $\mathcal{A}$.

**Второй случай**: предположим, что композиция $t \circ a$ равна нулю. Рассмотрим тогда квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_x \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\simeq"'] & A \arrow[d, "s"] \arrow[dl, "t"'] \\ \mathcal{O}_x \arrow[r, "a\otimes\omega_X"'] & A \otimes \omega_X \end{tikzcd}$$

в котором по построению $t$ нижний треугольник коммутативен. Если $t \circ a = 0$, то тогда заведомо равна нулю композиция $(a \otimes \omega_X) \circ t \circ a$. Из коммутативности нижнего треугольника получаем, что $s \circ a$ тоже равно нулю. Поскольку квадрат коммутативен, а левая вертикальная стрелка является изоморфизмом, из этого следует, что морфизм $a \otimes \omega_X \colon \mathcal{O}_x \to A \otimes \omega_X$ — нулевой. Подкрутка на $\omega_X$ — это эквивалентность категорий, то есть $a \otimes \omega_X$ равно нулю тогда и только тогда, когда морфизм $a \colon \mathcal{O}_x \to A$ равен нулю. Следовательно, треугольник проекции (9.9.1) расщепляется и $B \simeq \mathcal{O}_x \oplus A[-1]$. Как в предыдущем случае, из полуортогональности категорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ мы тогда выводим, что $A = 0$ и $B \simeq \mathcal{O}_x$, то есть пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ лежит в подкатегории $\mathcal{B}$.

Итак, мы доказали, что для любой точки $x \in X$ пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ лежит либо в $\mathcal{A}$, либо в $\mathcal{B}$. Пусть $X_{\mathcal{A}} \subset X$ — подмножество замкнутых точек $X$, для которых пучок-небоскрёб лежит в подкатегории $\mathcal{A}$, а $X_{\mathcal{B}}$ — аналогичное подмножество для $\mathcal{B}$. Они, очевидно, не пересекаются, и мы доказали, что вместе $X_{\mathcal{A}}$ и $X_{\mathcal{B}}$ покрывают всё (множество замкнутых точек в) $X$.

Дальше есть несколько способов закончить доказательство. Проще всего воспользоваться теоремой Каватани–Окавы о жёсткости из прошлой лекции: из допустимости подкатегории $\mathcal{A}$ следует, что если для некоторой точки $x \in X$ пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ лежит в $\mathcal{A}$, то для всех точек из Зариски-открытой окрестности $x$ это тоже верно, то есть $X_{\mathcal{A}}$ — Зариски-открытое подмножество. Аналогично $X_{\mathcal{B}}$ тоже открыто. Но в связном гладком многообразии любые два непустых Зариски-открытых подмножества пересекаются. Значит, одно из подмножеств $X_{\mathcal{A}}$ или $X_{\mathcal{B}}$ пустое. Если, к примеру, $X_{\mathcal{B}} = \emptyset$, то любой пучок-небоскрёб лежит в подкатегории $\mathcal{A}$. Тогда каждый объект $B \in \mathcal{B}$ должен быть полуортогонален всем пучкам-небоскрёбам, но это означает, что носитель $B$ — пустое множество, то есть в $\mathcal{B}$ не содержится никаких объектов, кроме нулевого, а тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\perp} = D(X)$. Аналогично, если $X_{\mathcal{A}} = \emptyset$, то $\mathcal{A} = 0$. □

*Замечание.* В конце доказательства можно обойтись и без теоремы о жёсткости: используя тот факт, что точка $x \in X$ лежит в носителе объекта $E \in D(X)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{RHom}_X(E, \mathcal{O}_x) \neq 0$, можно показать, что у любого объекта из $\mathcal{B}$ носитель — это замкнутое подмножество внутри $X_{\mathcal{B}}$, а у любого объекта из $\mathcal{A}$ носитель — это замкнутое подмножество в $X_{\mathcal{A}}$. Если рассмотреть тогда треугольник проекции для, например, структурного пучка $\mathcal{O}_X$ многообразия $X$, получится, что $X$ представляется в виде объединения двух замкнутых непересекающихся подмножеств, а дальше аналогично рассуждению выше.

9.10. Упражнение. Пусть $X$ — связное гладкое проективное многообразия, у которого $\omega_X$ не глобально порождено, но базисные точки $\omega_X$ — это конечное подмножество $Z \subset X$. (Такие многообразия существуют, см., например, [Zuc03].) Докажите, что в $D(X)$ всё равно нет нетривиальных допустимых подкатегорий, следуя плану ниже.

- Пусть $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение. Проверьте, что аргумент из доказательства теоремы 9.9 показывает, что если точка $x \in X$ не лежит в $Z$, то пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ в этой точке принадлежит одной из двух подкатегорий $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$.
- Тогда $X = (X_{\mathcal{A}} \sqcup X_{\mathcal{B}}) \cup Z$, где первые два множества открыты и не пересекаются, а $Z$ — конечно. Выведите из этого, что либо $X_{\mathcal{A}}$, либо $X_{\mathcal{B}}$ пусто.
- Без потери общности можно считать, что $X_{\mathcal{B}}$ пусто. Докажите тогда, что носитель любого объекта из $\mathcal{B}$ содержится в конечном множестве $Z$. Используя теорему Каватани–Окавы о жёсткости, покажите, что это любая допустимая подкатегория, у которой объединение носителей объектов это конечный набор точек, обязательно равна нулю.

9.11. Следствие. *Пусть $C$ — гладкая проективная кривая рода $g > 0$. Тогда в $D(C)$ не существует нетривиальных допустимых подкатегорий.*

*Доказательство.* Хорошо известно, что на любой гладкой кривой положительного рода каноническое линейное расслоение $\omega_C \cong \Omega^1_C$ глобально порождено (см., например, [Хар81, Лем. IV.5.1]). Неразложимость производной категории $D(C)$ тогда следует из теоремы 9.9. $\square$

Теорема 9.9 применима ко многим другим многообразиям. Например, из неё следует, что абелевы многообразия и многообразия Калаби–Яу имеют неразложимые производные категории. При этом глобальная порождённость канонической линейной системы не является необходимым условием для неразложимости производной категории, причём дело не только в усилении теоремы, описанном в упражнении 9.10. Получить другие критерии неразложимости производных категорий — важная, но сложная задача. Для кривых всё оказалось просто: если род положительный, то производная категория неразложима, а если нулевой, то разложима. Но уже для поверхностей до сих пор многое неизвестно. Ожидается, что у минимальной поверхности производная категория допускает нетривиальное полуортогональное разложение тогда и только тогда, когда структурный пучок — исключительный объект [Oka23, Conj. 1.8].

Одна из сложностей, возникающей при попытке классифицировать многообразия с неразложимой производной категорией, состоит в том, что все существующие методы так или иначе похожи на теорему 9.9 и зависят от свойств канонического линейного расслоения. При этом возникают не относительно хорошо изученные “асимптотические” свойства вроде обильности (которая означает, что $\omega_X^{\otimes m}$ очень обильно при $m \gg 0$), а именно свойства самого расслоения и его ограничения на подмногообразия. Их сложно контролировать.

9.12. **Исключительные объекты на $\mathbb{P}^2$.** Про производные категории поверхностей известно гораздо меньше, чем в случае кривых. Многие общие вопросы о поведении полуортогональных разложений пока не имеют ответа даже в случае размерности два. Поэтому мы ограничимся обсуждением исключительных объектов и исключительных наборов.

Сперва докажем утверждение о поведении исключительных объектов при их ограничении на антиканонические дивизоры.

9.13. Утверждение. *Пусть $X$ — гладкая проективная поверхность, а $j\colon C \hookrightarrow X$ — гладкий антиканонический дивизор в $X$. Если $E \in D(X)$ — исключительный объект, то его производное ограничение $E|_C \in D(C)$ — это, с точностью до сдвига, когерентный пучок $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(C)$, причём $\mathrm{Hom}_C(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \cong \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$.*

*Доказательство.* Отметим сперва, что по сопряжённости

$$\mathrm{RHom}_C(E|_C, E|_C) \cong \mathrm{RHom}_X(E, j_* j^* E).$$

Из точной тройки

$$0 \to \mathcal{O}_X(\omega_X) \xrightarrow{C} \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{O}_C \to 0$$

производным тензорным умножением на $E$ получается выделенный треугольник

$$E \otimes \omega_X \to E \to j_* j^* E. \tag{9.13.1}$$

Поскольку $\mathrm{RHom}_X(E,E) \cong \mathbb{C}[0]$, то по двойственности Серра $\mathrm{RHom}_X(E, E \otimes \omega_X) \cong \mathbb{C}[-2]$. Тогда длинная точная последовательность, полученная применением функтора

$$\mathrm{RHom}(E, -)$$

к треугольнику (9.13.1), такова:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(E, &E \otimes \omega_X) = 0 \to \mathrm{Hom}(E,E) \to \mathrm{Hom}(E, j_* j^* E) \to \mathrm{Ext}^1(E, E \otimes \omega_X) = 0 \to \\ &\to \mathrm{Ext}^1(E,E) = 0 \to \mathrm{Ext}^1(E, j_* j^* E) \to \mathrm{Ext}^2(E, E \otimes \omega_X) \to \mathrm{Ext}^2(E,E) = 0 \end{aligned}$$

Получается, что $\mathrm{Ext}^\bullet_X(E, j_* j^* E) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_C(E|_C, E|_C)$ одномерно в степенях 0 и 1. В частности, $\mathrm{Hom}(E|_C, E|_C)$ одномерно, из чего следует, что $E|_C$ не раскладывается в прямую сумму нетривиальным образом. Поскольку $C$ гладкая кривая, по лемме 2.20 любой объект в $D(C)$ распадается в прямую сумму своих пучков когомологий. Неразложимость $E|_C$ означает, что тогда только один пучок когомологий не равен нулю. □

*Замечание.* Длинная точная последовательность в доказательстве обобщается до такого факта: на любом многообразии $X$ ограничение исключительного объекта $E$ на антиканонический дивизор $Z \subset X$— это так называемый *сферический объект*, то есть объект в $D(Z)$, у которого алгебра Ext'ов одномерна в двух степенях, нулевой и равной размерности $Z$.

9.14. Упражнение. Пусть $C$ — гладкая проективная кривая, а $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $C$. Предположим, что $\dim \mathrm{Hom}_C(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 1$. Докажите, что тогда $\mathcal{F}$ это или векторное расслоение, или пучок-небоскрёб в некоторой точке $c \in C$.

9.15. Утверждение. *Пусть $E \in D(\mathbb{P}^2)$ — исключительный объект. Тогда $E \simeq \mathcal{E}[k]$, где $\mathcal{E}$ — исключительное векторное расслоение, а $k \in \mathbb{Z}$ — некоторый сдвиг.*

*Доказательство.* По теореме Каватани–Окавы об инвариантности (теорема 8.26) исключительный объект $E$ на проективной плоскости является $\mathrm{PGL}(3)$-инвариантным. Из этого следует, что каждый пучок когомологий $\mathcal{H}^i(E)$ тоже $\mathrm{PGL}(3)$-инвариантен. Поскольку $\mathrm{PGL}(3)$ транзитивно действует на $\mathbb{P}^2$, любой $\mathrm{PGL}(3)$-инвариантный когерентный пучок имеет одинаковый ранг во всех точках $\mathbb{P}^2$, то есть является векторным расслоением (упражнение!). Следовательно, каждый пучок когомологий объекта $E$ является векторным расслоением. Осталось доказать, что $E$ сосредоточен в одной когомологической степени.

Пусть $j\colon C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ — замкнутое подмногообразие. Покажем, что у производного ограничения $E|_C \in D(C)$ тоже все пучки когомологий являются векторными расслоениями, причём тех же рангов, в том смысле, что для любого $i \in \mathbb{Z}$ верно $\operatorname{rk} \mathcal{H}^i(E|_C) = \operatorname{rk} \mathcal{H}^i(E)$. В самом деле, рассмотрим выделенный треугольник

$$E(-C) \to E \to j_* j^* E,$$

как в доказательстве утверждения 9.13. Он задаёт длинную точную последовательность пучков когомологий. Поскольку подкрутка на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-C)$ и прямой образ $j_*$ являются точными функторами, они коммутируют с взятием $i$-тых пучков когомологий. Значит, фрагмент длинной точной последовательности выглядит так:

$$\cdots \to \mathcal{H}^i(E)(-C) \to \mathcal{H}^i(E) \to j_*\mathcal{H}^i(E|_C) \to \mathcal{H}^{i+1}(E)(-C) \to \mathcal{H}^{i+1}(E) \to \dots$$

Для любого векторного расслоения $\mathcal{E}$ на $\mathbb{P}^2$ отображение умножения $\mathcal{E}(-C) \to \mathcal{E}$ — мономорфизм. Пучки $\mathcal{H}^i(E)$ и $\mathcal{H}^{i+1}(E)$ являются расслоениями, поэтому длинная точная последовательность расщепляется в набор точных троек для каждого $i \in \mathbb{Z}$:

$$0 \to \mathcal{H}^i(E)(-C) \to \mathcal{H}^i(E) \to j_*\mathcal{H}^i(E|_C) \to 0.$$

Однако мы знаем, что коядро отображения $\mathcal{H}^i(E)(-C) \to \mathcal{H}^i(E)$ изоморфно $j_*(\mathcal{H}^i(E)|_C)$. Значит, $\mathcal{H}^i(E|_C)$ изоморфно $\mathcal{H}^i(E)|_C$, то есть в частности является векторным расслоением ранга $\operatorname{rk} \mathcal{H}^i(E)$, что мы и хотели доказать.

Теперь применим утверждение 9.13 к какому-нибудь антиканоническому дивизору, то есть к гладкой кубической кривой на $\mathbb{P}^2$. Она утверждает, что $E|_C$ это, с точностью до сдвига, когерентный пучок $\mathcal{F} \in \operatorname{Coh}(C)$. В частности, у $E|_C$ лишь один пучок когомологий не равен нулю. Выше мы объяснили, что $\mathcal{H}^i(E|_C)$ равно нулю тогда и только тогда, когда пучок $\mathcal{H}^i(E) \in \operatorname{Coh}(\mathbb{P}^2)$ равен нулю. Значит, объект $E \in D(\mathbb{P}^2)$ сосредоточен в одной степени и, следовательно, изоморфен сдвигу некоторого векторного расслоения на $\mathbb{P}^2$. □

*Замечание.* Другой подход к доказательству утверждения 9.15 состоит в том, чтобы рассмотреть спектральную последовательность, вычисляющую $\operatorname{RHom}_{\mathbb{P}^2}(E, E) \cong \mathbb{C}[0]$ в терминах Ext'ов между пучками когомологий $E$ (теорема 2.11) и внимательно изучить взаимосвязь между размерностями векторных пространств в этой спектральной последовательности. Таким образом можно доказать, что на любой поверхности дель Пеццо исключительный объект — это, с точностью до сдвига, исключительный когерентный пучок [KO94, Prop. 2.10].

*Замечание.* Первая часть доказательства верна в любой размерности: у исключительного объекта $E \in D(\mathbb{P}^n)$ для любого $n$ все пучки когомологий являются векторными расслоениями. Однако прямого аналога утверждения 9.13 в многомерном случае нет. Поэтому существуют ли на $\mathbb{P}^n$ для $n > 2$ исключительные объекты, не являющиеся с точностью до сдвига расслоениями — открытый вопрос даже для $n = 3$. Ожидается, что их быть не должно.

9.16. Упражнение. Пусть $X$ — гладкое многообразие, а $E \in D(X)$ — объект производной категории. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- все пучки когомологий $E$ являются векторными расслоениями на $X$;
- объект $E$ является *локально тривиальным*, в том смысле, что у каждой точки $x \in X$ существует открытая окрестность $U \subset X$, ограничение $E$ на которую изоморфно в $D(U)$ объекту $\mathcal{O}_U \otimes V^\bullet$, где $\mathcal{O}_U$ — тривиальное линейное расслоение на $U$, а $V^\bullet$ — градуированное векторное пространство.

Эту интерпретацию можно использовать для более концептуального доказательства того, что в утверждении 9.15 пучки когомологий у $E|_C$ на $C$ имеют те же ранги, что и у $E$ на $\mathbb{P}^2$.

9.17. **Исключительные расслоения на $\mathbb{P}^2$.** Согласно утверждению 9.15 изучение исключительных объектов в $D(\mathbb{P}^2)$ сводится к вопросам об исключительных расслоениях. Именно с исключительных векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$ исторически всё и началось: термин "исключительное расслоение" ввели Дрезе и Ле Потье в статье [DL85] в связи со свойствами пространств модулей расслоений на $\mathbb{P}^2$, а то, что исключительные расслоения интересно изучать и на других многообразиях, и что естественно обобщить понятие до исключительных когерентных пучков и исключительных объектов в производной категории, другие математики придумали позже, вдохновляясь результатами этой статьи.

Обсудим более подробно исключительные векторные расслоения на проективной плоскости. Вспомним сначала, что у векторного расслоения $\mathcal{E}$ на $\mathbb{P}^2$ есть три топологических инварианта:

- ранг $r = \operatorname{rk} \mathcal{E} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
- первый класс Черна $c_1(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$, он же степень линейного расслоения $\Lambda^{\operatorname{rk}\mathcal{E}}\mathcal{E}$;
- второй класс Черна $c_2(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$, он же класс Эйлера; для расслоений $\mathcal{E}$, у которых есть глобальные сечения, обращающиеся в ноль только в конечном числе точек, класс Эйлера равен числу этих точек с кратностями.

9.18. Утверждение. *Пусть $\mathcal{E}$ — исключительное векторное расслоение на $\mathbb{P}^2$. Тогда $r = \operatorname{rk} \mathcal{E}$ и $c_1(\mathcal{E})$ — взаимно простые числа. Кроме того, верно равенство*

$$c_2(\mathcal{E}) = (r^2 + (r-1)c_1^2 - 1)/2r.$$

*Доказательство.* Теорема Гротендика–Римана–Роха утверждает, что на любом гладком проективном многообразии $X$ для любых двух когерентных пучков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ целое число

$$\chi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) := \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

зависит только от классов Черна пучков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ и от топологических инвариантов многообразия $X$, и выражается явной формулой. Формулировать теорему в общем виде мы не будем, но для случая $X = \mathbb{P}^2$ и векторного расслоения $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ она утверждает, что

$$\chi(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = r^2 + (r-1)c_1^2 - 2rc_2. \tag{9.18.1}$$

У нас $\mathcal{E}$ — исключительное векторное расслоение, то есть $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ нулевое при $i \neq 0$ и одномерно при $i = 0$. Значит, по определению $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 1$. По формуле (9.18.1) это означает, что числа $r$ и $c_1$ взаимно просты, а $c_2$ однозначно ими определяется. $\square$

Для дальнейшего нам понадобится такое определение:

9.19. Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на $\mathbb{P}^2$. Тогда его *наклон* $\mu(\mathcal{E})$ это отношение $\frac{c_1(\mathcal{E})}{\operatorname{rk}(\mathcal{E})} \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$.

Утверждение 9.18 позволяет вычислить все классы Черна исключительного векторного расслоения, используя только его наклон:

9.20. Лемма. *Пусть $\mathcal{E}$ — исключительное расслоение на $\mathbb{P}^2$. Тогда все его топологические инварианты, то есть числа $\operatorname{rk}(\mathcal{E})$, $c_1(\mathcal{E})$ и $c_2(\mathcal{E})$, однозначно определяются наклоном $\mu(\mathcal{E}) \in \mathbb{Q}\mathbb{Q}$.*

*Доказательство.* Из утверждения 9.18 следует, что первый класс Черна и ранг $\mathcal{E}$ взаимно просты, причём ранг — положительное число, поэтому они восстанавливаются как числитель и знаменатель приведённой дроби для $\mu(\mathcal{E}) = \frac{c_1(\mathcal{E})}{\operatorname{rk}\mathcal{E}}$, а второй класс Черна выражается через них. $\square$

На самом деле верно гораздо более сильное утверждение:

9.21. Теорема ([DL85]). *Исключительные расслоения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ на $\mathbb{P}^2$ изоморфны тогда и только тогда, когда равны их наклоны.*

Мы дадим набросок доказательства. Оно использует понятие *стабильности* для векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$:

9.22. Определение. Расслоение $\mathcal{E}$ на $\mathbb{P}^2$ называется *стабильным*, если для любого подрасслоения $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, у которого $\operatorname{rk}\mathcal{E}' < \operatorname{rk}\mathcal{E}$, выполняется неравенство $\mu(\mathcal{E}') < \mu(\mathcal{E})$.

*Замечание.* Более точно было бы называть это понятие $\mu$-стабильностью, потому что существует и другие варианты. Дрезе и Ле Потье работают в основном как раз со стабильностью по Гизекеру, но для наших целей достаточно определения выше.

Понятие стабильности естественным образом возникает при изучении пространств модулей расслоений и играет там важнейшую роль. Грубо говоря, стабильность расслоения гарантирует, что у него просто устроена теория деформаций, то есть оно хорошо ведёт себя в семействах. При этом таких расслоений достаточно много: любое векторное расслоение на $\mathbb{P}^2$ имеет фильтрацию подрасслоениями, где все промежуточные факторы стабильны.

У нас нет времени на подробное обсуждение свойств стабильных расслоений, поэтому следующий стандартный факт мы оставим без доказательства.

9.23. Лемма. *Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — два стабильных векторных расслоения на $\mathbb{P}^2$. Если $\mu(\mathcal{E}) > \mu(\mathcal{F})$, то $\operatorname{Hom}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$. Если же $\mu(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{F})$, то $\operatorname{Hom}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ изоморфно $\mathcal{F}$.*

Аналогичным образом для следующего утверждения мы дадим только набросок доказательства.

9.24. Утверждение. *Пусть $\mathcal{E}$ — исключительное расслоение на $\mathbb{P}^2$. Тогда $\mathcal{E}$ стабильно.*

*Доказательство.* (набросок) Для каждой гладкой кубики $C \subset \mathbb{P}^2$ ограничение $\mathcal{E}|_C$ — векторное расслоение, которое по утверждению 9.13 обладает свойством

$$\dim \mathrm{Hom}_C(\mathcal{E}|_C, \mathcal{E}|_C) = 1.$$

Поскольку $C$ — гладкая проективная кривая рода 1, любое *простое* векторное расслоение на $C$, то есть расслоение, не имеющее никаких эндоморфизмов, кроме умножений на скаляры, автоматически является стабильным. Значит, ограничение $\mathcal{E}$ на любую кубическую кривую $C \subset \mathbb{P}^2$ стабильно. Из этого можно вывести, что $\mathcal{E}$ само стабильно. □

*Замечание.* В статье Дрезе и Ле Потье исключительные расслоения определялись не в терминах алгебры Ext'ов, а как стабильные векторные расслоения, у которых второй класс Черна выражается через ранг и $c_1$ по формуле из утверждения 9.18. Это эквивалентное определение.

Теперь мы можем вернуться к теореме 9.21:

*Доказательство теоремы 9.21.* Предположим, что у исключительных векторных расслоений $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ одинаковые наклоны. Тогда по лемме 9.20 у этих двух расслоений одинаковые ранги, а так же первые и вторые классы Черна. Теорема Гротендика–Римана–Роха (см. доказательство утверждения 9.18) влечёт, что число

$$k := \chi(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \dim \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) - \dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) + \dim \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2),$$

зависит только от топологических инвариантов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, но поскольку они у $\mathcal{E}_2$ такие же, как у $\mathcal{E}_1$, то $k$ можно вычислять, заменив $\mathcal{E}_2$ на $\mathcal{E}_1$, то есть $k$ равно

$$\chi(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) = \dim \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) - \dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) + \dim \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) = 1 - 0 + 0 = 1.$$

По определению $k$ это значит, что хотя бы одно из векторных пространств $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ и $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ не равно нулю.

Заметим теперь, что по двойственности Серра

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1(-3))^\vee.$$

Легко доказать, что из стабильности $\mathcal{E}_1$ следует, что подкрутка $\mathcal{E}_1(-3)$ тоже стабильна, причём $\mu(\mathcal{E}_1(-3)) = \mu(\mathcal{E}_1) - 3$ строго меньше, чем $\mu(\mathcal{E}_2) = \mu(\mathcal{E}_1)$. Тогда по лемме 9.23 ненулевых отображений из $\mathcal{E}_2$ в $\mathcal{E}_1(-3)$ не существует, и тогда $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = 0$.

Значит, $\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \geq k = 1$, но по лемме 9.23 для стабильных расслоений с одинаковым наклоном так может быть только тогда, когда эти расслоения изоморфны. Это мы и хотели доказать. □

Из теоремы 9.21 следует, что классификация исключительных векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$ состоит в том, чтобы описать множество тех рациональных чисел, которые являются наклонами исключительных расслоений. Обозначим это множество через $\mathfrak{E} \subset \mathbb{QQ}$. Поскольку каждое линейное расслоение $\mathcal{O}(n)$ исключительно, все целые числа лежат в $\mathfrak{E}$. Дрезе и Ле Потье явно описали это подмножество таким образом:

9.25. Теорема ([DL85]). *Существует цепочка подмножеств $\mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{QQ}$ такая, что:*

- $\mathfrak{E} = \cup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathfrak{E}_i$;

- *Каждое $\mathfrak{E}_i$ — дискретное подмножество в $\mathbb{Q}\mathbb{Q}$, причём $\mathfrak{E}_0 = \mathbb{Z}$.*
- *Подмножество $\mathfrak{E}_{i+1}$ определяется индуктивно: для каждой пары "соседних" рациональных чисел $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{E}_i$, то есть таких элементов $\mathfrak{E}_i$, что в открытом интервале $(\mu_1, \mu_2)$ не содержится ни одного элемента $\mathfrak{E}_i$, существует некоторое число $\mu_1 \cdot \mu_2$, лежащее строго между $\mu_1$ и $\mu_2$, определённое явной формулой в терминах числителей и знаменателей приведённых дробей для $\mu_1$ и $\mu_2$. Тогда $\mathfrak{E}_{i+1}$ это объединение $\mathfrak{E}_i$ и чисел $\mu_1 \cdot \mu_2$ для всех пар соседних чисел из $\mathfrak{E}_i$.*

Доказательство в статье [DL85] хитрое: сначала доказывается абстрактный критерий для существования на $\mathbb{P}^2$ стабильных расслоений с заданными топологическими инвариантами $(r, c_1, c_2)$. Этот критерий даётся в терминах множества $\mathfrak{E}$ наклонов всех исключительных расслоений на $\mathbb{P}^2$, но для доказательства критерия не требуется знать, как это множество устроено. Затем с помощью этого критерия показывается, что индуктивная процедура из теоремы 9.25 корректна, то есть, что для пары соседних чисел $\mu_1$ и $\mu_2$ из некоторого $\mathfrak{E}_i$ стабильное расслоение с наклоном $\mu_1 \cdot \mu_2$ существует и является исключительным, то есть доказывается вложение $\cup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathfrak{E}_i \subset \mathfrak{E}$. Наконец, после этого снова с помощью того же критерия показывается, что существование исключительного расслоения, чей наклон не получается индуктивной процедурой, давало бы противоречие.

Другую интерпретацию индуктивной процедуре из теоремы 9.25 дали Городенцев и Рудаков в терминах исключительных наборов:

9.26. Утверждение ([GR87]). *Пусть $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ — три числа из $\mathfrak{E}$. Тогда следующие условие эквивалентны:*

- *числа $\mu_1$ и $\mu_3$ являются соседними в некотором $\mathfrak{E}_i \subset \mathfrak{E}$, а $\mu_2$ равно $\mu_1 \cdot \mu_3$;*
- *знаменатели $r_1, r_2, r_3$ приведённых дробей для $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ являются решением уравнения Маркова: $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 3r_1r_2r_3$.*
- *соответствующие этим наклонам исключительные расслоения образуют полный исключительный набор $D(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{E}_{\mu_1}, \mathcal{E}_{\mu_2}, \mathcal{E}_{\mu_3} \rangle$.*

Отметим такое следствие: для тройки чисел $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathfrak{E}$, удовлетворяющим условиям утверждения 9.26, можно рассмотреть в исключительном наборе $\langle \mathcal{E}_{\mu_1}, \mathcal{E}_{\mu_2}, \mathcal{E}_{\mu_3} \rangle$ перестройку расслоения $\mathcal{E}_{\mu_3}$ через $\mathcal{E}_{\mu_2}$, то есть полный исключительный набор $\langle \mathcal{E}_{\mu_1}, \sigma_2(\mathcal{E}_{\mu_3}), \mathcal{E}_{\mu_2} \rangle$. Значит, по утверждению 9.26 расслоение $\sigma_2(\mathcal{E}_{\mu_3})$ имеет наклон $\mu_1 \cdot \mu_2$. Иными словами, операция "$\cdot$" из теоремы 9.25 описывает, что происходит с наклонами исключительных расслоений при перестройках исключительных наборов.

С помощью этой интерпретации удалось доказать полную классификацию исключительных объектов и исключительных наборов на $\mathbb{P}^2$:

9.27. Теорема ([GR87]).

- *Любое исключительное расслоение $\mathcal{E}$ на $\mathbb{P}^2$ может быть дополнено до полного исключительного набора.*
- *Любая исключительная пара $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle$ на $\mathbb{P}^2$ может быть дополена до полного исключительного набора.*
- *Любой полный исключительный набор в $D(\mathbb{P}^2)$ получается из стандартного набора Бейлинсона $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \rangle$ последовательностью перестроек.*

Аналогичная классификация исключительных наборов как перестроек стандартного верна и на произвольной поверхности дель Пеццо, см. [KO94]. Но кроме этого, по сути, почти ничего неизвестно. Даже для $\mathbb{P}^3$ неизвестно, являются ли все исключительные объекты сдвигами расслоений, получается ли любое исключительное расслоение перестройками стандартного и т.п. Некоторые частичные результаты про $\mathbb{P}^3$ имеются в [Pol11].

## 10. Полуортогональное разложение для раздутия

В этой лекции мы обсудим полуортогональные разложения для проективизации векторного расслоения и для раздутия гладкого многообразия. Это результаты Орлова из статьи [Орл92]. Доказательства, которые мы проведём в этой лекции, не из оригинальной статьи, а являются вариациями аргументов из [Huy06, Sec. 11].

10.1. **Проективизация векторного расслоения.** Пусть $X$ — гладкое многообразие, а $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на нём. Напомним, что его *проективизацией* $\pi\colon \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$ называется многообразие пар $\{(x,[v])\}$, где $x \in X$ — точка, а $[v] \subset \mathcal{E}_x$ — одномерное подпространство в слое расслоения $\mathcal{E}$ над $x$.

Отметим, что если $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus k}$ — тривиальное векторное расслоение, то $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ в этом случае изоморфно произведению $X \times \mathbb{P}^{k-1}$. При этом конструкция, как легко убедиться, локальна по базе: например, если $U \subset X$ — такое открытое подмножество, что $\mathcal{E}|_U$ — тривиальное расслоение, то прообраз $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ изоморфен $U \times \mathbb{P}^{\operatorname{rk}\mathcal{E}-1}$. Чтобы использовать это замечание в дальнейшем, нам понадобится такой несложный факт:

10.2. Лемма. *Пусть $f\colon A \to B$ — морфизм в производной категории $D(X)$. Тогда $f$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда существует открытое покрытие $\{U_i\}_{i\in I}$ многообразия $X$, на любой элемент которого $f$ ограничивается как изоморфизм.*

*Доказательство.* В одну сторону утверждение очевидно. Предположим, что $f$ не является изоморфизмом. Тогда его конус $\operatorname{Cone}(f)$ не равен нулю (упражнение!). Мы хотим доказать, что найдётся открытое множество из $U \subset X$ из заданного покрытия, в ограничении на которое $f$ не является изоморфизмом. Пусть $x \in X$ — какая-нибудь точка из носителя $\operatorname{Cone}(f)$. Рассмотрим открытое подмножество $U$ из покрытия, содержащее точку $x$, и пусть $i\colon U \hookrightarrow X$ — морфизм вложения. Тогда существует выделенный треугольник

$$i^*A \xrightarrow{i^*f} i^*B \to i^*\operatorname{Cone}(f) \to i^*A[1],$$

где мы используем, что $i^*\operatorname{Cone}(f) \cong \operatorname{Cone}(i^*f)$. По свойствам носителя

$$\operatorname{RHom}_U(i^*\operatorname{Cone}(f), \mathcal{O}_x) \neq 0,$$

где $\mathcal{O}_x$ — пучок-небоскрёб в точке $x \in U$. Значит, конус морфизма $i^*f$ ненулевой, то есть это не изоморфизм. □

Если $\pi\colon \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$ — проективизация некоторого векторного расслоения, то в обратном образе $\pi^*\mathcal{E}$ расслоения $\mathcal{E}$ существует канонически определённое линейное подрасслоение: над точкой $(x,[v]) \in \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ слой $\pi^*\mathcal{E}$ изоморфен $\mathcal{E}_x$, и в этом слое можно выделить одномерное подпространство $[v] \subset \mathcal{E}_x$. Эти одномерные подпространства склеиваются в линейное расслоение $\mathcal{U} \subset \pi^*\mathcal{E}$ на $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$, называемое *относительным* *тавтологическим расслоением* для морфизма $\pi$ (впрочем, линейное расслоение зависит от выбора $\mathcal{E}$, а не только от $\pi$, поэтому это не совсем удачное название). На каждый слой $\mathbb{P}^{\operatorname{rk}\mathcal{E}-1}$ морфизма $\pi$ расслоение $\mathcal{U}$ ограничивается как $\mathcal{O}(-1)$, поэтому это линейное расслоение ещё часто называют *относительным* $\mathcal{O}(-1)$ для морфизма $\pi$. Двойственное к $\mathcal{U}$ линейное расслоение называют *относительным* $\mathcal{O}(1)$ или *относительным обильным расслоением.*

10.3. Теорема ([Орл92]). *Пусть $X$ — гладкое многообразие, и пусть $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на $X$ ранга $r$. Пусть $\pi\colon Y \to X$ — это проективизация $\mathcal{E}$, а $\mathcal{O}(h)$ — относительное обильное расслоение для морфизма $\pi$. Тогда функтор $\pi^*\colon D(X) \to D(Y)$ — строго полный, и существует полуортогональное разложение*

$$D(X) = \langle \pi^* D(X), \pi^* D(X) \otimes \mathcal{O}(h), \dots, \pi^* D(X) \otimes \mathcal{O}((r-1)h) \rangle.$$

*Доказательство.* Используя сопряжённость функторов $\pi^*$ и $\pi_*$, а так же формулу проекции, получаем изоморфизм

$$\operatorname{RHom}_Y(\pi^* A, \pi^* B) \cong \operatorname{RHom}_X(A, \pi_*\pi^* B) \cong \operatorname{RHom}_X(A, B \otimes \pi_*\mathcal{O}_Y).$$

Поэтому для строгой полноты функтора $\pi^*$ достаточно доказать, что естественное отображение $\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_Y$ является изоморфизмом. То, что некоторый морфизм в производной категории является изоморфизмом, по лемме 10.2 можно проверять локально. Поскольку $\mathcal{E}$ локально тривиально, это значит, что достаточно рассмотреть случай $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus r}$, то есть случай проекции $\pi\colon X \times \mathbb{P}^{r-1} \to X$. Тогда из декартовости квадрата

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbb{P}^{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^{r-1} \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \{*\} \end{tikzcd}$$

и теоремы о плоской замене базы следует, что $\pi_*\mathcal{O}_{X\times\mathbb{P}^{r-1}}$ изоморфно $\mathcal{O}_X \boxtimes \mathrm{R}\Gamma\left(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}\right)$, то есть просто $\mathcal{O}_X$, что мы и хотели доказать. Значит, функтор $\pi^*\colon D(X) \to D(Y)$ является строго полным, то есть вложением полной подкатегории. Поскольку у этого функтора есть оба сопряжённых, эта подкатегория допустима в $D(Y)$.

Аналогичным образом из изоморфизма

$$\operatorname{RHom}_Y(\pi^* A, \pi^* B \otimes \mathcal{O}(kh)) \cong \operatorname{RHom}_X(A, \pi_*(\pi^* B \otimes \mathcal{O}(kh))) \cong \operatorname{RHom}_X(A, B \otimes \pi_*\mathcal{O}_Y(kh))$$

получается, что для доказательства полуортогональности последовательности допустимых подкатегорий в формулировке теоремы 10.3 достаточно доказать, что $\pi_*\mathcal{O}_Y(kh) = 0$ для $k = -1, -2, \dots, -(r-1)$. Используя снова теорему о плоской замене базы, легко видеть, что это следует из обращения в ноль когомологий $\mathrm{R}\Gamma\left(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}(kh)\right)$ для того же списка значений $k$.

Чтобы завершить построение полуортогонального разложения, осталось доказать, что указанный набор допустимых подкатегорий порождает всю $D(Y)$. Поскольку они полуортогональны, то порождённая ими совместно подкатегория, которую мы назовём $\mathcal{A}$, тоже допустима по лемме 7.24 из седьмой лекции. Тогда существует полуортогональное разложение $D(Y) = \langle {}^\perp\mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle$ и осталось показать, что ортогонал ${}^\perp\mathcal{A}$ в $D(Y)$ нулевой.

Из нерассказанного на лекции. Если категория $\mathcal{A}' \subset D(Y)$ не является допустимой, то из равенства нулю ортогонала ${}^{\perp}\mathcal{A}'$ не следует, что $\mathcal{A}' = D(Y)$! Например, если $\mathcal{A}'$ — подкатегория всех объектов $D(Y)$ с нульмерным носителем, то в ней содержатся все пучки-небоскрёбы, поэтому любой объект в ${}^{\perp}\mathcal{A}'$ имеет пустой носитель, то есть равен нулю.

Выберем какую-нибудь точку $x \in X$. Поскольку $\pi$ — плоский морфизм, пулбэк $\pi^*\mathcal{O}_x$ пучка-небоскрёба относительно $\pi$ — это структурный пучок слоя $j\colon \mathbb{P}(\mathcal{E}_x) \hookrightarrow Y$ над этой точкой. Из вложения $\pi^*D(X) \subset \mathcal{A}$ следует, что объект $j_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}$ лежит в $\mathcal{A}$. По определению $\mathcal{A}$ содержит в том числе и подкрутки этого объекта на $\mathcal{O}(h), \ldots, \mathcal{O}((r-1)h)$, то есть прямые образы линейных расслоений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}, \ldots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(r-1)$ при вложении $j\colon \mathbb{P}^{r-1} \to X$. Мы знаем, что их прямая сумма $G_x := \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(i)$ — классический генератор в $D(\mathbb{P}^{r-1})$. Тогда для любого объекта $F \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ по полуортогональности и сопряжённости функторов верно

$$0 = \mathrm{RHom}_Y(F, j_*G_x) \cong \mathrm{RHom}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_x)}(j^*F, G_x),$$

но поскольку $G_x$ является классическим генератором в $\mathbb{P}(\mathcal{E}_x)$, это означает, что $j^*F = 0$. Однако точка $x$ была выбрана произвольно, поэтому (производное) ограничение $F$ на любой слой морфизма $\pi\colon Y \to X$ равно нулю. Из этого следует, что носитель объекта $F$ пуст, что может быть только в случае $F = 0$. Значит, в ${}^{\perp}\mathcal{A}$ нет ненулевых объектов, что мы и хотели доказать. □

*Замечание.* Для морфизма $\pi\colon Y \to X$ гладких собственных многообразий полуортогональное разложение $D(Y) = \langle \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \rangle$ называется *$\pi$-линейным разложением*, если каждая из подкатегорий $\mathcal{A}_i$ замкнута относительно тензорного умножения на любой объект вида $\pi^*E$, где $E \in D(X)$. Разложение из теоремы 10.3 — главный пример линейного разложения. Доказывать, что набор допустимых подкатегорий в $D(Y)$ задаёт $\pi$-линейное полуортогональное разложение, можно локально по базе, см. [Kuz11]. Именно это и происходит в доказательстве теоремы 10.3: полуортогональность мы проверяли, переходя к открытому покрытию $X$, на котором тривиализуется расслоение $\mathcal{E}$, да и полноту в итоге мы свели к тому к “послойной” полноте.

10.4. **Разложение для раздутия: формулировка.** Пусть $X$ — гладкое многообразие, в нём $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие коразмерности $c$. Обозначим через $\pi\colon Y \to X$ раздутие $X$ с центром в $Z$, а через $E \subset Y$ — исключительный дивизор, то есть $\pi^{-1}(Z)$. Обозначим морфизмы между этими многообразиями согласно коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

Заодно обозначим через $\mathcal{O}(h)$ относительное обильное расслоение для раздутия, оно же $\mathcal{O}_Y(-E)$.

10.5. Теорема ([Орл92]). *В обозначениях выше функторы*

$$\pi^*\colon D(X) \to D(Y) \quad \textit{и} \quad i_* \circ p^*\colon D(Z) \to D(Y)$$

*являются строго полными, и существует полуортогональное разложение*

$$D(Y) = \langle i_* p^* D(Z) \otimes \mathcal{O}_Y(-(c-1)h), \dots, i_* p^* D(Z) \otimes \mathcal{O}_Y(-h), \pi^* D(X) \rangle.$$

Эта теорема гораздо сложнее предыдущей. Например, в прошлой теореме многие вычисления сводились к вычислению когомологий некоторых пучков на проективных пространствах. У раздутия тоже каждый слой – проективное пространство, но раздутие не является плоским морфизмом и поэтому сводить вычисление производного прямого образа к послойным когомологиям нельзя, потому что теорема о плоской замене базы неприменима. Поэтому нам понадобится локальная модель раздутия.

Отметим частный случай: если $X$ это гладкая поверхность, а $Z = \{z\}$ — точка в ней, то для раздутия $\pi\colon Y \to X$ этой точки получается разложение

$$D(Y) = \langle \mathcal{O}_E(E), \pi^* D(X) \rangle,$$

где $E$ — исключительный дивизор. Тогда, как мы раньше обсуждали, $\mathcal{O}_E(E)$ — исключительный объект. В частности, если в категории $D(X)$ существовал полный исключительный набор, то в категории $D(Y)$ такой набор тоже существует и получается добавлением одного исключительного объекта $\mathcal{O}_E(E)$ к пулбэкам исключительных объектов с $X$. Например, так мы доказали, что на всех рациональных поверхностях существует полный исключительный набор, причём состоящий из когерентных пучков (случай $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ надо рассмотреть отдельно, но там тоже всё просто).

10.6. **Локальная модель раздутия.** Пусть $X$ — гладкое многообразие, а $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на $X$. Пусть $s \in \Gamma(X, \mathcal{E})$ — регулярное сечение. Напомним, что это означает, что у подмногообразия

$$Z := \{x \in X \mid s(x) = 0\}$$

коразмерность равна рангу расслоения $\mathcal{E}$, который мы назовём $c$. Пусть $T := \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ — это проективизация расслоения $\mathcal{E}$, с каноническим морфизмом $t\colon T \to X$. Как обсуждалось в разделе 10.1, на $T$ существует относительное тавтологическое расслоение $\mathcal{U}$, определённое как подрасслоение в $t^*\mathcal{E}$. Оно задаёт точную тройку

$$0 \to \mathcal{U} \to t^*\mathcal{E} \to \mathcal{Q} \to 0,$$

где $\mathcal{Q}$ — тавтологическое фактор-раслоение.

Пулбэк глобального сечения $s \in H^0(X, \mathcal{E})$ задаёт сечение $t^*s \in H^0(T, t^*\mathcal{E})$. Пусть $\overline{s} \in H^0(T, \mathcal{Q})$ — образ этого сечения при эпиморфизме $t^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$.

10.7. Лемма. *Сечение $\overline{s} \in H^0(T, \mathcal{Q})$ является регулярным. Подмногообразие*

$$Y := \{\overline{s} = 0\} \subset T$$

*его нулей изоморфно раздутию $X$ в подмногообразии $Z$.*

*Доказательство.* По определению сечение $\overline{s}$ обращается в ноль в некоторой точке

$$(x, [v]) \in T \cong \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$$

тогда и только тогда, когда элемент $s(x) \in \mathcal{E}_x$ лежит в одномерном подпространстве $[v] \subset \mathcal{E}_x$. Значит, над точками, где $s = 0$, то есть над $Z \subset X$, можно брать любое подпространство $[v] \subset \mathcal{E}_x$. Поэтому $Y$ содержит $\pi^{-1}(Z) \subset T$. А над теми точками $x \in X$, где $s(x) \neq 0$, в $Y$ висит ровно одна точка из слоя проекции $t\colon T \to X$.

Получается, что $\dim Y = \dim X$, а $\pi^{-1}(Z) \subset Y$ — это дивизор. Поскольку ранг расслоения $Q$ равен $c - 1 = \dim T - \dim X$, это как раз означает, что $\overline{s}$ — регулярное сечение $Q$.

Описание слоёв $Y$ над точками $X$ сходится с тем, что $Y$ должно быть изоморфно раздутию $X$ с центром в $Z$. То, что $Y$ и в самом деле представляет из себя раздутие, мы оставляем в качестве упражнения. (*Подсказка*: для доказательства стоит перейти к аффинной подсхеме в $X$, на которой расслоение $\mathcal{E}$ тривиализуется. Тогда сечение $s$ — это регулярная последовательность элементов кольца.) $\square$

Мы доказали, что для тех подмногообразий $Z \subset X$, которые можно получить как множество нулей регулярного сечения векторного расслоения, раздутие допускает локальную модель как конкретное, заданное уравнением, подмногообразие в проективизации векторного расслоения. Локально любое (гладкое) подмногообразие имеет такой вид:

10.8. Лемма. *Пусть $X$ гладкое многообразие, а $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие. Тогда для любой точки $z \in Z$ существует Зариски-открытая окрестность $U \subset X$, на которой можно выбрать расслоение $\mathcal{E}$ с регулярным сечением, обращающимся в ноль только в точках $Z$.*

*Доказательство.* Это задача по коммутативной алгебре. Дадим набросок доказательства: между локальными кольцами точки $z$ в многообразии $X$ и в его подмногообразии $Z$ существует эпиморфизм $f\colon \mathcal{O}_{X,z} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$. Используя, что оба этих локальных кольца являются регулярными, можно доказать, что для идеала $\ker f \subset \mathcal{O}_{X,z}$ существует регулярная последовательность порождающих элементов: $\ker f = (s_1, \ldots, s_c)$, где $c$ — коразмерность $Z$ в $X$. Подняв элементы $s_i$ из локального кольца $\mathcal{O}_{X,z}$ в координатное кольцо достаточно маленькой аффинной Зариски-открытой окрестности $U \subset X$ точки $z$, получим желаемое сечение $(\widetilde{s}_1, \ldots, \widetilde{s}_c) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U^{\oplus c})$, высекающее $Z$. $\square$

Внимательный читатель, прочитав два доказательства выше, может задаться вопросом: зачем вообще при обсуждении локальной модели говорить о каком-то векторном расслоении $\mathcal{E}$? Раз уж $\mathcal{E}$ локально тривиально, можно с самого начала перейти к чуть меньшему открытому множеству и формулировать всё в терминах тривиального расслоения $\mathcal{O}_X^{\oplus c}$, не вводя отдельную сущность $\mathcal{E}$. Это, конечно, справедливый вопрос. В доказательствах, как правило, всё сводится к этому случаю, но в формулировках обозначение $\mathcal{E}$ удобнее — например, оно позволяет не путать расслоение и двойственное к нему. Отдельное обозначение мешает формулировать утверждения, не имеющие геометрического смысла, и тем самым помогает искать более удобные для работы утверждения [Ive80].

Кроме того, время от времени возникают геометрически интересные ситуации, где подмногообразие $Z \subset X$ можно глобально задать как множество нулей некоторого регулярного сечения, и тогда получаются более сильные результаты, чем просто при использовании локальной модели. Например, если $X$ это проективное пространство, то *полное пересечение* в нём — это подмногообразие, которое можно высечь регулярным сечением расслоения $\mathcal{E}$, изоморфного прямой сумме линейных расслоений $\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k_i)$. Общепринятого термина для тех подмногообразий, которые допускают описание через нули регулярного сечения произвольного расслоения, нет, но они тоже иногда возникают. Однако не каждое подмногообразие может быть так представлено.

10.9. Упражнение. Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубика. Докажите, что $C$ нельзя представить в виде множества нулей регулярного сечения никакого векторного расслоения $\mathcal{E}$ ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. (*Указание*: если бы это было возможно, то нормальное расслоение к $C$ в $\mathbb{P}^3$ было бы ограничением линейного расслоения $\Lambda^2\mathcal{E}$ с проективного пространства на $C$; в частности, его степень тогда делилась бы на 3. Вычислите или найдите описание нормального расслоения к скрученной кубике для завершения доказательства.)

Для дальнейшего использования сформулируем утверждение о *резольвенте Кошуля* для подмногообразия, высекающегося регулярным сечением. Мы его уже использовали в лемме 6.23 из шестой лекции, а тут сформулируем частный случай, который нам понадобится. Доказательство снова опустим.

10.10. Лемма. *В условиях леммы 10.7 для структурного пучка $Y \subset T$ существует резольвента векторными расслоениями:*

$$0 \to \Lambda^{c-1}\mathcal{Q}^\vee \to \cdots \to \Lambda^2\mathcal{Q}^\vee \to \mathcal{Q}^\vee \to \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_Y \to 0, \tag{10.10.1}$$

*где морфизмы заданы подстановкой глобального сечения $\overline{s} \in H^0(T, \mathcal{Q})$.*

Докажем для локальной модели раздутия некоторые свойства функторов между производными категориями.

10.11. Утверждение. *Пусть $X$ — гладкое многообразие, в нём $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие, являющееся множеством нулей регулярного сечения $s$ векторного расслоения $\mathcal{E}$ на $X$. Пусть $\pi\colon Y \to X$ — морфизм раздутия $X$ в подмногообразии $Z$. Тогда естественный морфизм $\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_Y$ в производный прямой образ $\pi_*\mathcal{O}_Y \in D(X)$ является изоморфизмом.*

*Доказательство.* Пусть $T := \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ — проективизация расслоения $\mathcal{E}$, с морфизмом $t\colon T \to X$. Пусть $k\colon Y \hookrightarrow T$ — вложение из леммы 10.7. Тогда раздутие $\pi\colon Y \to X$ это композиция $t \circ k$. Значит, $\pi_*\mathcal{O}_Y$ изоморфно производному прямому образу объекта $k_*\mathcal{O}_Y \in D(T)$ при отображении $t\colon T \to X$. Поскольку $k$ — замкнутое вложение, объект $k_*\mathcal{O}_Y$ изоморфен структурному пучку подмногообразия $Y$ в $T$. Используя резольвенту (10.10.1) из леммы 10.10 для этого пучка, мы видим, что достаточно доказать, что $t_*\mathcal{O}_T \cong \mathcal{O}_X$ и что $t_*\Lambda^i\mathcal{Q}^\vee = 0$ при всех $i > 0$.

Поскольку морфизм $t$ — плоский, по теореме о плоской замене базы мы можем вычислять производные прямые образы послойно. Таким методом мы уже доказали в теореме 10.3, что $t_*\mathcal{O}_T$ изоморфно $\mathcal{O}_X$. Вспомним теперь, что $\mathcal{Q}$ определялось с помощью точной тройки

$$0 \to \mathcal{U} \to t^*\mathcal{E} \to \mathcal{Q} \to 0,$$

которая в ограничении на каждый слой $\mathbb{P}^{c-1} \subset T$ морфизма $t\colon T \to X$ по определению превращалась в точную последовательность Эйлера

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}^{\oplus c} \to T_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1) \to 0.$$

Значит, ограничение расслоения $\Lambda^i\mathcal{Q}^\vee$ на слой изоморфно $\Omega^i_{\mathbb{P}^{c-1}}(i)$. При всех $i > 0$ у этого расслоения на $\mathbb{P}^{c-1}$ нет когомологий (упражнение!). По теореме о плоской замене базы мы получили, что производный прямой образ $t_*\Lambda^i\mathcal{Q}^\vee \in D(X)$ в каждой точке имеет нулевой слой. Тогда этот прямой образ равен нулю, что завершает вычисление. □

Существование локальной модели для раздутия было очень важно в этом доказательстве: она позволила свести вычисление производного прямого образа относительно морфизма раздутия $\pi\colon Y \to X$ к вычислению производных прямых образов нескольких векторных расслоений относительно плоского морфизма $t\colon T \to X$, где всё можно считать послойно.

Следующее утверждение — локальное, о свойствах раздутия в окрестности точки раздуваемого подмногообразия. Поэтому локальная модель раздутия нужна только в доказательстве, а в формулировке раздутие можно взять произвольным.

10.12. Утверждение. *Пусть $\pi\colon Y \to X$ — раздутие гладкого многообразия $X$ в гладком подмногообразии $Z \subset X$. Пусть $z \in Z$ — некоторая точка, а $f\colon F := \pi^{-1}(z) \cong \mathbb{P}^{c-1} \hookrightarrow Y$ — слой морфизма $\pi$ над ней. Тогда производный обратный образ $\pi^*\mathcal{O}_z \in D(Y)$ пучка-небоскрёба в точке $z$ — это объект производной категории, у которого $(-m)$-тый пучок когомологий $\mathcal{H}^{-m}(\pi^*\mathcal{O}_z) \in \mathrm{Coh}(Y)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$ изоморфен прямому образу $f_*(\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m))$.*

*Доказательство.* Поскольку утверждение локальное, можно считать, что раздутие допускает локальную модель, то есть $Z \subset X$ высекается регулярным сечением $s$ векторного расслоения $\mathcal{E}$ на $X$. Пусть $t\colon T \to X$ и $k\colon Y \hookrightarrow T$ — морфизмы как в доказательстве утверждения 10.11. Морфизм $k$ — это замкнутое вложение, поэтому прямой образ $k_*$ является точным функтором, и в частности $k_*\mathcal{H}^{-m}(\pi^*\mathcal{O}_z) \simeq \mathcal{H}^{-m}(k_*\pi^*\mathcal{O}_z)$. Более того, для замкнутого вложения прямой образ $k_*$ — *консервативный функтор* на когерентных пучках, что означает, что если прямые образы двух пучков становятся изоморфны, то они и были изоморфны (упражнение). Соединив эти два факта, получаем, что достаточно доказать, что $\mathcal{H}^{-m}(k_*\pi^*\mathcal{O}_z)$ изоморфно $k_*f_*(\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m))$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Изучим объект $k_*\pi^*\mathcal{O}_z$. Поскольку $\pi = t \circ k$, этот объект изоморфен $k_*k^*t^*\mathcal{O}_z$, что по формуле проекции изоморфно (производному) тензорному произведению $t^*\mathcal{O}_z \otimes k_*\mathcal{O}_Y$. Морфизм $t$ плоский, поэтому производный обратный образ $t^*\mathcal{O}_z$ — это структурный пучок слоя $F \subset Y$ над точкой $z$. Для объекта $k_*\mathcal{O}_Y$ используем снова резольвенту (10.10.1) из леммы 10.10. Поскольку эта резольвента состоит из векторных расслоений, с помощью неё можно вычислять производное тензорное произведение:

$$k_*\pi^*\mathcal{O}_z \cong t^*\mathcal{O}_z \otimes k_*\mathcal{O}_Y \cong [\Lambda^{c-1}\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{O}_F \to \cdots \to \mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_F].$$

По формуле проекции для вложения слоя $k \circ f\colon F \hookrightarrow T$ над точкой $z \in Z$ в этой резольвенте на $(-m)$-том месте написан пучок $k_*f_*(\Lambda^m\mathcal{Q}^\vee|_F)$. По построению в лемме 10.10 морфизмы в резольвенте 10.10.1 получаются подстановкой сечения $\overline{s}$, которое в ограничении на слой $F$ тождественно равно нулю. Следовательно, объект $k_*\pi^*\mathcal{O}_z$ в производной категории изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} k_*f_*(\Lambda^m\mathcal{Q}^\vee|_F)[m]$. Наконец, вспомним из доказательства утверждения 10.11, что в ограничении на любой слой расслоение $\Lambda^m\mathcal{Q}^\vee$ изоморфно $\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$. Это завершает доказательство. □

10.13. **Разложение для раздутия: доказательство.** В этом разделе мы докажем теорему 10.5, используя вспомогательные утверждения, доказанные с помощью локальной модели раздутия в предыдущем разделе. Сперва обобщим одно из этих утверждений до глобальной версии.

10.14. Лемма. *Пусть* $\pi\colon Y \to X$ — *раздутие гладкого многообразия* $X$ *в гладком подмногообразии* $Z \subset X$. *Тогда* $\pi_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X$.

*Доказательство.* Благодаря сопряжённости прямого и обратного образа существует канонический морфизм $\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_Y$. По лемме 10.2 проверять, что это отображение изоморфизм, можно локально на открытом покрытии $X$. Заметим ещё, что вычисление производного прямого образа $\pi_*\mathcal{O}_Y$ тоже Зариски-локально по $X$, то есть для открытого подмножества $U \subset X$ производный прямой образ структурного пучка $\pi^{-1}(U)$ при проекции на $U$ совпадает с производным ограничением $\pi_*\mathcal{O}_Y$ на $U \subset X$. Это можно получить из теоремы о плоской замене базы, но, вообще говоря, это следствие определения производного прямого образа.

По лемме 10.8 многообразие $X$ можно покрыть открытыми множествами, на каждом из которых раздутие с центром в $Z$ допускает локальную модель как в разделе 10.6. Тогда на каждом элементе покрытия морфизм $\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_Y$ является изоморфизмом по предложению 10.11. Значит, это и был изоморфизм, что мы и хотели доказать. □

В доказательстве нам пригодится такой факт о триангулированных категориях. Он будет полезен для доказательства строгой полноты некоторых функторов.

10.15. Лемма. *Пусть* $\Phi\colon T_1 \to T_2$ — *функтор между двумя триангулированными категориями, и пусть* $A$ *и* $B$ — *два объекта в* $T_1$. *Предположим, что применение* $\Phi$ *индуцирует изоморфизм*

$$\mathrm{RHom}_{T_1}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_{T_2}(\Phi(A), \Phi(B)).$$

*Тогда для любых* $A' \in \langle A\rangle \subset T_1$ *и* $B' \in \langle B\rangle \subset T_1$ *верно, что отображение*

$$\mathrm{RHom}_{T_1}(A', B') \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_{T_2}(\Phi(A'), \Phi(B'))$$

*является изоморфизмом. В частности, если* $A$ *и* $B$ *оба являются классическими генераторами в* $T_1$, *функтор* $\Phi$ *строго полон.*

*Доказательство.* Обсудим сначала случай $B' = B$. Докажем по индукции, что при каждом $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ для любого объекта $A' \in \langle A\rangle_i$ отображение

$$\mathrm{RHom}_{T_1}(A', B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_{T_2}(\Phi(A'), \Phi(B))$$

является изоморфизмом. Для $i = 0$ это напрямую следует из условия: любой точный функтор между триангулированными категориями коммутирует со сдвигами, (конечными) прямыми суммами и переходом к прямым слагаемым. Предположим теперь, что для всех объектов из $\langle A\rangle_i$ отображение является изоморфизмов и докажем, что тогда для $A' \in \langle A\rangle_{i+1}$ — тоже.

По определению существует выделенный треугольник

$$E_0 \to A' \oplus A'' \to E_i \to E_0[1],$$

где $E_0 \in \langle A\rangle_0$ и $E_i \in \langle A\rangle_i$, а $A''$ — произвольный объект. Из этого выделенного треугольника можно получить две длинные точные последовательности: одну применением функтора $\mathrm{Ext}^\bullet_{T_1}(-, B)$, вторую — применением функтора $\mathrm{Ext}^\bullet_{T_2}(\Phi(-), \Phi(B))$. Между этими точными последовательностями есть отображение, полученное применением функтора $\Phi$. По предположению индукции для $E_0$ и $E_i$ морфизм объектов в этих точных последовательностях — изоморфизм. Значит, по 5-лемме для объекта $A' \oplus A''$ морфизм тоже является изоморфизмом, а тогда и для $A'$ тоже.

Мы знаем из утверждения 6.10 из шестой лекции, что $\langle A\rangle = \cup_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\langle A\rangle_i$, поэтому по индукции мы доказали, что утверждение верно, когда $B' = B$. Осталось для каждого выбора $A'$ доказать, что можно в качестве $B'$ брать не только $B$, а любой объект из $\langle B\rangle$, что делается аналогично. □

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы 10.5. Напомним обозначения:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

*Доказательство теоремы 10.5.* Шаг 1. Докажем сначала, что используемые в формулировке функторы в самом деле являются строго полными. Как в доказательстве теоремы 10.3, из формулы проекции следует, что функтор $\pi^*$ строго полный тогда и только тогда, когда отображение $\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_Y$ — изоморфизм. Мы доказали это в лемме 10.14. У функтора $\pi^*$ есть оба сопряжённых, поэтому он задаёт вложение допустимой подкатегории $\pi^*\colon D(X) \hookrightarrow D(Y)$.

Рассмотрим теперь функтор $\Phi = i_*p^*\colon D(Z) \to D(Y)$. Рассмотрим в подкатегории $D(Z)$ два объекта: произвольный объект $B \in D(Z)$ и объект $A \in D(Z)$, который изоморфен производному ограничению $j^*A_X$ некоторого объекта из $D(X)$. Вычислим тогда RHom между образами этих объектов под действием функтора $\Phi$:

$$\mathrm{RHom}_Y(i_*p^*j^*A_X, i_*p^*B) \cong \mathrm{RHom}_Y(i_*i^*\pi^*A_X, i_*p^*B) \cong \mathrm{RHom}_Y(\pi^*A_X \otimes i_*\mathcal{O}_E, i_*p^*B).$$

Здесь в первом изоморфизме мы пользовались коммутативностью квадрата, то есть равенством $j\circ p = \pi\circ i$, а второй следует по формуле проекции. Продолжим вычисление, воспользовавшись сопряжённостью между $i_*$ и $i^*$:

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_Y(\pi^*A_X \otimes i_*\mathcal{O}_E, i_*p^*B) &\cong \mathrm{RHom}_E(i^*\pi^*A_X \otimes i^*i_*\mathcal{O}_E, p^*B) \cong \\ &\cong \mathrm{RHom}_E(p^*j^*A_X \otimes i^*i_*\mathcal{O}_E, p^*B). \end{aligned}$$

Объект $i^*i_*\mathcal{O}_E$ допускает более конкретное описание: поскольку $i$ — замкнутое вложение, производный прямой образ $i_*\mathcal{O}_E$ — это структурный пучок дивизора $E$ в $Y$. Для него существует резольвента линейными расслоениями:

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-E) \to \mathcal{O}_Y \to i_*\mathcal{O}_E \to 0.$$

Поскольку первый морфизм в этой точной тройке — умножение на уравнение $E$, при ограничении на $E$ он становится нулевым. Значит, объект $i^*i_*\mathcal{O}_E$ изоморфен прямой сумме $\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E(-E)[1]$. Подставим это описание в вычисление выше:

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_E(p^*j^*A_X \otimes i^*i_*\mathcal{O}_E, p^*B) &\cong \mathrm{RHom}_E(p^*j^*A_X \oplus (p^*j^*A_X \otimes \mathcal{O}_E(-E)[1]), p^*B) \cong \\ &\cong \mathrm{RHom}_E(p^*j^*A_X, p^*B) \oplus \mathrm{RHom}_E(p^*j^*A_X, p^*B \otimes \mathcal{O}_E(E)[-1]). \end{aligned}$$

Морфизм $p$ — это проективизация векторного расслоения, поэтому из теоремы 10.3 мы знаем, что функтор $p^*\colon D(Z) \to D(E)$ строго полный. Более того, поскольку по свойствам раздутия линейное расслоение $\mathcal{O}_E(E)$ — это относительное тавтологическое расслоение для морфизма $p$, в той же теореме мы доказали, что подкатегории $p^*D(Z)$ и $p^*D(Z) \otimes \mathcal{O}_E(E)$ полуортогональны. Итого мы получили цепочку изоморфизмов

$$\begin{aligned}\mathrm{RHom}_Y(i_*p^*j^*A_X, i_*p^*B) &\cong \\ &\cong \mathrm{RHom}_E(p^*j^*A_X, p^*B) \oplus \mathrm{RHom}_E(p^*j^*A_X, p^*B \otimes \mathcal{O}_E(E)[-1]) \cong \\ &\cong \mathrm{RHom}_Z(j^*A_X, B) \oplus 0 \cong \mathrm{RHom}_Z(j^*A_X, B).\end{aligned}$$

Вычисление выше показывает, что для объектов $A, B \in D(Z)$ отображение

$$\mathrm{RHom}_Z(A, B) \xrightarrow{i_*p^*} \mathrm{RHom}_Y(i_*p^*A, i_*p^*B)$$

является изоморфизмом при условии, что $A$ имеет вид $j^*A_X$ для некоторого $A_X \in D(X)$.

Из нерассказанного на лекции. Строго говоря, надо ещё объяснить, что построенный изоморфизм получается именно применением функтора $i_*p^*$. Это следует из того, что все использованные нами изоморфизмы, включая формулу проекции и т.п., получаются из естественных преобразований единицы и коединицы между сопряжёнными функторами. Например, расщепление $i^*i_*\mathcal{O}_E$ в прямую сумму задаётся с помощью морфизма коединицы $i^*i_*\mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_E$. Проследить за изоморфизмом можно, но несколько занудно, а записать это рассуждение хоть сколько-нибудь детально, причём чтобы это можно было потом прочитать, кажется почти невозможно.

Мы хотим доказать, что $i_*p^*$ строго полный, то есть что это отображение является изоморфизмом и для произвольного $A \in D(Z)$. Пусть $\mathcal{O}_X(H)$ — обильное линейное расслоение на $X$. Тогда его ограничение на $Z$ тоже обильно. Из доказательства теоремы 5.15 в пятой лекции мы знаем, что для $N \gg 0$ тогда объект

$$G_Z := j^*\left(\bigoplus_{n=0}^{N} \mathcal{O}_X(nH)\right) \cong \bigoplus_{n=0}^{N} j^*\mathcal{O}_X(nH) \in D(Z)$$

является классическим генератором в $D(Z)$, при этом лежащим в образе ограничения $j^*\colon D(X) \to D(Z)$. Подставив в лемму 10.15 в качестве объектов $A = B = G_Z$, получаем, что функтор $i_*p^*\colon D(Z) \to D(Y)$ строго полон. Поскольку у этого функтора есть оба сопряжённых, он задаёт вложение допустимой подкатегории $D(Z) \hookrightarrow D(Y)$. Функторы $i_*p^*(-) \otimes \mathcal{O}_Y(kE)$ для разных $k \in \mathbb{Z}$ отличаются от $i_*p^*$ на подкрутку, то есть на автоэквивалентность $D(Y)$, поэтому тоже задают вложения допустимых подкатегорий.

Шаг 2: докажем теперь полуортогональность последовательности допустимых подкатегорий. Полуортогональность подкатегории $\pi^*D(X)$ и подкатегорий вида $i_*p^*D(Z) \otimes \mathcal{O}_Y(kh)$ для $k \in [-(c-1); -1]$ получается из сопряжённости функторов $\pi_*$ и $\pi^*$:

$$\begin{aligned}\mathrm{RHom}(\pi^*A, i_*p^*B \otimes \mathcal{O}_Y(kh)) &\cong \mathrm{RHom}_X(A, \pi_*(i_*p^*B \otimes \mathcal{O}_Y(kh))) \cong \\ &\cong \mathrm{RHom}_X(A, j_*p_*(p^*B \otimes \mathcal{O}_E(kh))) \cong \mathrm{RHom}_X(A, j_*(B \otimes p_*\mathcal{O}_E(kh))).\end{aligned}$$

Для всех $k$ между $-(c-1)$ и $-1$ производный прямой образ $p_*\mathcal{O}_E(kh)$ равен нулю по теореме о плоской замене базы (мы это вычисляли в ходе доказательства теоремы 10.3), поэтому полуортогональность для таких пар подкатегорий доказана.

Нужно ещё доказать, что подкатегории $i_*p^*D(Z) \otimes \mathcal{O}_Y(kh)$ и $i_*p^*D(Z) \otimes \mathcal{O}_Y(k'h)$ полуортогональны, где $k' > k$ из интервала от $-(c-1)$ до $-1$. Подкрутив всё на $\mathcal{O}_Y(-kh)$, видим, что достаточно показать, что для любых объектов $A, B$ из $D(Z)$ градуированное пространство

$$\mathrm{RHom}_Y(i_*p^*A, i_*p^*B \otimes \mathcal{O}_Y(lh))$$

равно нулю при $l = k - k'$ от $-1$ до $-(c-2)$. Аналогично первому шагу, если предположить сначала, что $A$ изоморфно объекту вида $j^*A_X$ для некоторого $A_X \in D(X)$, то в результате цепочки изоморфизмов получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{RHom}_Y(i_*p^*j^*A_X, i_*p^*B \otimes \mathcal{O}_Y(lh) \cong \mathrm{RHom}_E(p^*j^*A_X, p^*B \otimes \mathcal{O}_E(-lE))\oplus \\ \oplus \mathrm{RHom}_E(p^*j^*A_X, p^*B \otimes \mathcal{O}_E((1-l)E)[1]). \end{aligned} \tag{10.15.1}$$

Для $l$ из интервала от $-1$ до $-(c-2)$ оба линейных расслоения $\mathcal{O}_E(-lE)$ и $\mathcal{O}_E((1-l)E)$ являются послойно ацикличными, потому что ограничение $\mathcal{O}_E(E)$ на слой $\mathbb{P}^{c-1}$ это $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1)$. Значит, по теореме о плоской замене базы их производные прямые образы при проекции $p\colon E \to Z$ равны нулю. Тогда оба слагаемых в формуле (10.15.1) равны нулю, то есть полуортогональность выполняется по крайней мере для таких пар объектов $A, B \in D(Z)$, где $A$ изоморфно $j^*A_X$ для некоторого $A_X \in D(X)$. В прошлом шаге мы доказали, что в $D(Z)$ существует классический генератор $G_Z$, лежащий в образе функтора $j^*\colon D(X) \to D(Z)$. Рассуждая в духе леммы 10.15, нетрудно доказать, что из этого следует полуортогональность для произвольного объекта $A \in D(Z) = \langle G_Z \rangle$.

Шаг 3. В двух первых шагах мы проверили, что указанный в формулировке теоремы 10.5 набор подкатегорий — это полуортогональная последовательность допустимых подкатегорий в $D(Y)$. Назовём порождённую ими совместно подкатегорию $\mathcal{A} \subset D(Y)$. Она допустима, поэтому для доказательства теоремы осталось убедиться, что ортогонал ${}^{\perp}\mathcal{A}$ равен нулю.

Аналогично доказательству теоремы 10.3, мы покажем, что ограничение произвольного объекта $R \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ на каждый слой морфизма $\pi\colon Y \to X$ равно нулю.

Если $x \in X$ — точка, не лежащая в подмногообразии $Z \subset X$, то производный обратный образ $\pi^*\mathcal{O}_x$ пучка-небоскрёба — это пучок-небоскрёб в точке $\pi^{-1}(x)$. Подкатегория $\mathcal{A}$ по определению содержит подкатегорию $\pi^*D(X) \subset D(Y)$, поэтому пучок $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}$ лежит в $\mathcal{A}$. Тогда любой объект $E \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ удовлетворяет

$$\mathrm{RHom}_Y(R, \mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}) \cong \mathrm{RHom}_Y(R, \pi^*\mathcal{O}_x) = 0$$

по полуортогональности. Значит, ограничение объекта $R$ на любую точку из подмножества $\pi^{-1}(X \setminus Z) \subset Y$ равно нулю. В частности, (теоретико-множественный) носитель каждого объекта $R \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ содержится в $E \subset Y$.

Осталось понять, что происходит в слоях раздутия $\pi\colon Y \to X$ над точками $Z \subset X$. Выберем какую-нибудь точку $z \in Z$ и обозначим вложение слоя $\pi^{-1}(z) \simeq \mathbb{P}^{c-1}$ над ней через $f\colon F \hookrightarrow Y$. В категории $\mathcal{A}$ по определению содержатся объекты $i_*p^*\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_Y(kh)$ для $k$ от $-(c-1)$ до $-1$, а так же объект $\pi^*\mathcal{O}_z$. Заметим, что из плоскости морфизма $p$ следует, что производный обратный образ $p^*\mathcal{O}_z \in D(E)$ это структурный пучок $\mathcal{O}_F$ слоя $F \subset E$, и тогда по формуле проекции

$$i_*p^*\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_Y(kh) \cong i_*(\mathcal{O}_F \otimes i^*\mathcal{O}_Y(kh)) \cong \mathcal{O}_F(k)$$

содержится в $\mathcal{A}$ для любого $k$ от $-(c-1)$ до $-1$. Чтобы завершить доказательство аналогично теореме 10.3, то есть показать, что в $\mathcal{A}$ содержится прямой образ какого-нибудь классического генератора из категории $D(F)$, нам достаточно будет ещё одной подкрутки — например, просто структурный пучок $\mathcal{O}_F$, соответствующий $k = 0$. В следующем шаге мы покажем, что $\mathcal{O}_F$ лежит в $\mathcal{A}$.

Шаг 4. В $\mathcal{A}$ по определению содержится объект $\pi^*\mathcal{O}_z$, про который мы доказали утверждение 10.12: его нулевой пучок когомологий это $\mathcal{O}_F$, а для $m > 0$ его $(-m)$'тый пучок когомологий изоморфен $f_*\Omega^m_F(m)$. С помощью этого факта мы ниже выведем, что структурный пучок $\mathcal{O}_F$ тоже лежит в $\mathcal{A}$. Для этого достаточно показать, что для всех $m > 0$ пучок $f_*\Omega^m_F(m)$ лежит в $\mathcal{A}$ (упражнение: если объект $P \in D(Y)$ лежит в триангулированной подкатегории $\mathcal{A} \subset D(Y)$ и все его пучки когомологий, кроме одного, тоже лежат в $\mathcal{A}$, то и оставшийся пучок когомологий тоже принадлежит $\mathcal{A}$.)

В этом курсе мы уже несколько раз использовали факт, что на проективном пространстве $F \simeq \mathbb{P}^{c-1}$ у расслоения $\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$ при $m > 0$ нет никаких когомологий. Иными словами, $\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$ лежит в подкатегории $\mathcal{O}^{\perp}_{\mathbb{P}^{c-1}} \subset D(\mathbb{P}^{c-1})$. У проективного пространства существует исключительный набор Бейлинсона

$$D(\mathbb{P}^{c-1}) = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-(c-1)), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}} \rangle,$$

поэтому ортогонал к структурному пучку в $D(\mathbb{P}^{c-1})$ имеет явное описание как подкатегория, порождённая $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(k)$ для $k$ от $-(c-1)$ до $-1$. В частности мы доказали, что при любом $m > 0$ выполняется

$$\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m) \in \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-(c-1)), \dots, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1) \rangle \subset D(\mathbb{P}^{c-1}).$$

Из этого следует, что пучок $f_*\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$ лежит в подкатегории $D(E)$, порождённной прямыми образами

$$f_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-(c-1)) \cong \mathcal{O}_F(-(c-1)), \quad \dots, \quad f_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1) \cong \mathcal{O}_F(-1),$$

каждый из которых, как мы доказали выше, лежит в $\mathcal{A}$. Следовательно, при любом $m > 0$ пучок $f_*\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$ лежит в $\mathcal{A}$. Значит, приведённый в начале этого шага аргумент показывает, что пучок $\mathcal{O}_F$ тоже лежит в $\mathcal{A}$.

Шаг 5. Теперь мы можем завершить доказательство полноты, то есть того, что ${}^{\perp}\mathcal{A} = 0$. Мы уже знаем, что носитель любого объекта $R \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ содержится в $E$. Пусть $z \in Z$ — какая-нибудь точка, а $f\colon F \hookrightarrow Y$ — слой раздутия $\pi\colon Y \to X$ над ней. В третьем и четвёртом шаге мы показали, что объекты

$$\mathcal{O}_F(-(c-1)), \dots, \mathcal{O}_F(-1), \mathcal{O}_F$$

лежат в подкатегории $\mathcal{A} \subset D(Y)$. Их прямая сумма — это прямой образ относительно вложения $f\colon F \hookrightarrow Y$ классического генератора $\bigoplus_{m=0}^{c-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-m)$ производной категории когерентных пучков на $F \simeq \mathbb{P}^{c-1}$. Тогда из полуортогональности

$$\mathrm{RHom}_Y(R, \bigoplus_{m=0}^{c-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-m)) = 0$$

следует, что производное ограничение $R$ на слой $F$ равно нулю. Значит, носитель $R$ не содержит никаких точек из $F$. Однако слой $F$ был выбран произвольно. Поэтому носитель любого объекта $R \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ пуст. Но тогда в ${}^{\perp}\mathcal{A}$ не содержится никаких объектов, кроме нулевого, что мы и хотели доказать. $\square$

*Замечание.* То, что функтор $i_*p^*$ является строго полным, можно доказать напрямую, без использования генераторов и леммы 10.15. Для этого нужно знать, как устроена композиция функторов $i^*i_*(-)\colon D(E) \to D(E)$ для вложения дивизора $i\colon E \hookrightarrow Y$. Это не тот порядок, в котором можно применить формулу проекции, но ответ всё равно существует. Его можно найти в [Huy06, Cor. 11.4], а альтернативное доказательство строгой полноты, использующее это описание — в [Huy06, Prop. 11.18].

10.16. Упражнение. В доказательстве утверждения 10.12 мы показали, что объект $\pi^*\mathcal{O}_z$ после применения производного прямого образа вдоль замкнутого вложения $k\colon Y \hookrightarrow T$ распадается в прямую сумму пучков когомологий. Докажите, что сам объект $\pi^*\mathcal{O}_z \in D(Y)$ до взятия прямого образа не является изоморфным прямой сумме своих пучков когомологий. (*Указание*: используйте полуортогональность с самой первой из последовательности подкатегорией $i_*p^*D(Z) \otimes \mathcal{O}_Y(-(c-1)h)$.)

## Список литературы


[Bal02] Paul Balmer. «Presheaves of triangulated categories and reconstruction of schemes». В: *Math. Ann.* 324.3 (2002), с. 557—580. ISSN: 0025-5831.

[BB03] A. Bondal и M. van den Bergh. «Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry». В: *Mosc. Math. J.* 3.1 (2003), с. 1—36, 258. ISSN: 1609-3321.

[BBD82] A. A. Beilinson, J. Bernstein и P. Deligne. «Faisceaux pervers». В: *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*. Т. 100. Astérisque. Soc. Math. France, Paris, 1982, с. 5—171.

[BFK14] Matthew Ballard, David Favero и Ludmil Katzarkov. «A category of kernels for equivariant factorizations, II: further implications». В: *J. Math. Pures Appl. (9)* 102.4 (2014), с. 702—757. ISSN: 0021-7824.

[BN93] Marcel Bökstedt и Amnon Neeman. «Homotopy limits in triangulated categories». В: *Compositio Math.* 86.2 (1993), с. 209—234. ISSN: 0010-437X.

[BO01] Alexei Bondal и Dmitri Orlov. «Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences». В: *Compositio Math.* 125.3 (2001), с. 327—344. ISSN: 0010-437X.

[BOR20] Pieter Belmans, Shinnosuke Okawa и Andrea T. Ricolfi. *Moduli spaces of semiorthogonal decompositions in families*. 2020. arXiv: 2002.03303 [math.AG].

[Bra18] Martin Brandenburg. «Rosenberg's reconstruction theorem». В: *Expo. Math.* 36.1 (2018), с. 98—117. ISSN: 0723-0869.

[CHS23] Wen Chang, Fabian Haiden и Sibylle Schroll. *Braid group actions on branched coverings and full exceptional sequences*. 2023. arXiv: 2301.04398 [math.RT].

[CS12] Alberto Canonaco и Paolo Stellari. «Non-uniqueness of Fourier-Mukai kernels». В: *Math. Z.* 272.1-2 (2012), с. 577—588. ISSN: 0025-5874.

[DL85] J.-M. Drezet и J. Le Potier. «Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $P_2$». В: *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 18.2 (1985), с. 193—243. ISSN: 0012-9593.

[Gab62] Pierre Gabriel. «Des catégories abéliennes». В: *Bull. Soc. Math. France* 90 (1962), с. 323—448. ISSN: 0037-9484.

[GR87] A. L. Gorodentsev и A. N. Rudakov. «Exceptional vector bundles on projective spaces». В: *Duke Math. J.* 54.1 (1987), с. 115—130. ISSN: 0012-7094.

[Har66] Robin Hartshorne. *Residues and duality*. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64, With an appendix by P. Deligne. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966, с. vii+423.

[Huy06] Daniel Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, с. viii+307. ISBN: 978-0-19-929686-6.

[Ive80] Kenneth E. Iverson. «Notation as a tool of thought». В: *Comm. ACM* 23.8 (1980), с. 444—465. ISSN: 0001-0782.

[Kel94] Bernhard Keller. «Deriving DG categories». В: *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 27.1 (1994), с. 63—102. ISSN: 0012-9593.

[KO18] Kotaro Kawatani и Shinnosuke Okawa. *Nonexistence of semiorthogonal decompositions and sections of the canonical bundle*. 2018. arXiv: 1508.00682 [math.AG].

[KO94] S. A. Kuleshov и D. O. Orlov. «Exceptional sheaves on Del Pezzo surfaces». В: *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 58.3 (1994), с. 53—87. ISSN: 1607-0046.

[Kuz11] Alexander Kuznetsov. «Base change for semiorthogonal decompositions». В: *Compos. Math.* 147.3 (2011), с. 852—876. ISSN: 0010-437X.

[May01] Peter May. *The axioms of triangulated categories*. online. 2001. URL: http://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/Triangulate.pdf.

[Muk81] Shigeru Mukai. «Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves». В: *Nagoya Math. J.* 81 (1981), с. 153—175. ISSN: 0027-7630.

[Nee91] Amnon Neeman. «Some new axioms for triangulated categories». В: *J. Algebra* 139.1 (1991), с. 221—255. ISSN: 0021-8693.

[Nee96] Amnon Neeman. «The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability». В: *J. Amer. Math. Soc.* 9.1 (1996), с. 205—236. ISSN: 0894-0347.

[Oka23] Shinnosuke Okawa. *Semiorthogonal indecomposability of minimal irregular surfaces*. 2023. arXiv: 2304.14048 [math.AG].

[Ola24] Noah Olander. «Orlov's Theorem in the smooth proper case». В: *J. Algebra* 643 (2024), с. 284—293. ISSN: 0021-8693.

[Orl09] Dmitri Orlov. «Remarks on generators and dimensions of triangulated categories». В: *Mosc. Math. J.* 9.1 (2009), 153—159, back matter. ISSN: 1609-3321.

[Orl97] D. O. Orlov. «Equivalences of derived categories and $K3$ surfaces». В: т. 84. 5. Algebraic geometry, 7. 1997, с. 1361—1381.

[OSS11] Christian Okonek, Michael Schneider и Heinz Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Corrected reprint of the 1988 edition, With an appendix by S. I. Gelfand. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011, с. viii+239. ISBN: 978-3-0348-0150-8.

[Pol11] A. Polishchuk. «Simple helices on Fano threefolds». В: *Canad. Math. Bull.* 54.3 (2011), с. 520—526. ISSN: 0008-4395.

[Rou06] Raphaël Rouquier. «Representation dimension of exterior algebras». В: *Invent. Math.* 165.2 (2006), с. 357—367. ISSN: 0020-9910.

[Rou08] Raphaël Rouquier. «Dimensions of triangulated categories». В: *J. K-Theory* 1.2 (2008), с. 193—256. ISSN: 1865-2433.

[RVN19] Alice Rizzardo, Michel Van den Bergh и Amnon Neeman. «An example of a non-Fourier-Mukai functor between derived categories of coherent sheaves». В: *Invent. Math.* 216.3 (2019), с. 927—1004. ISSN: 0020-9910.

[Sch13] Christian Schnell. *A graduate course on the Generic vanishing theorem*. 2013. URL: https://www.math.stonybrook.edu/~cschnell/pdf/notes/generic-vanishing.pdf.

[Spa88] N. Spaltenstein. «Resolutions of unbounded complexes». В: *Compositio Math.* 65.2 (1988), с. 121—154. ISSN: 0010-437X.

[Sta24] The Stacks project authors. *The Stacks project*. https://stacks.math.columbia.edu. 2024.

[Toë07] Bertrand Toën. «The homotopy theory of *dg*-categories and derived Morita theory». В: *Invent. Math.* 167.3 (2007), с. 615—667. ISSN: 0020-9910.

[Vol19] Vadim Vologodsky. «Triangulated endofunctors of the derived category of coherent sheaves which do not admit DG liftings». В: *Arnold Math. J.* 5.2-3 (2019), с. 387—391. ISSN: 2199-6792.

[Zuc03] Francesco Zucconi. «Surfaces with $p_g = q = 2$ and an irrational pencil». В: *Canad. J. Math.* 55.3 (2003), с. 649—672. ISSN: 0008-414X.

[AM01] М. Атья и И. Макдональд. *Введение в коммутативную алгебру*. МЦНМО, 2001. ISBN: 978-5-4439-1624-8.

[Бей78] А.А. Бейлинсон. «Когерентные лучки на $PP^n$ и проблемы линейной алгебры». В: *Функц. анализ и его прил.* 12.3 (1978), с. 68—69.

[БК89] А.И. Бондал и М.М. Капранов. «Представимые функторы, функторы Серра и перестройки». В: *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 53.6 (1989), с. 1183—1205.

[ГМ89] С.И. Гельфанд и Ю.И. Манин. *Гомологическая алгебра*. Т. 38. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. ВИНИТИ, 1989.

[Куз08] Александр Кузнецов. *Записки лекций по гомологической алгебре*. online. 2008. URL: https://homepage.mi-ras.ru/~akuznet/homalg/index-homalg.htm.

[Куз13] Александр Кузнецов. *Записки лекций о DG-категориях*. online. 2013. URL: https://homepage.mi-ras.ru/~akuznet/dgcat/index-dgcat.htm.

[Мам71] Д. Мамфорд. *Абелевы многообразия*. Мир, 1971.

[Орл92] Д.О. Орлов. «Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков». В: *Изв. РАН. Сер. матем.* 56.4 (1992), с. 852—862. URL: http://mi.mathnet.ru/im929.

[Хар81] Р. Хартсхорн. *Алгебраическая геометрия*. Мир, 1981.


*Email address*: dpirozhkov@mi-ras.ru