1. Введение и триангулированные категории

1.1. Общий обзор курса

Мы будем изучать производные категории когерентных пучков на алгебраических многообразиях. Я предполагаю, что слушатели уже знают, что такое когерентные пучки на алгебраических многообразиях и умеют с ними обращаться. В первых нескольких лекциях мы обсудим необходимые понятия из гомологической алгебры, а дальше постепенно будет добавляться больше алгебраической геометрии. Сразу предупрежу, что курс в основном про алгебро-геометрические аспекты этой области науки, поэтому многие утверждения из гомологической алгебры будут формулироваться без доказательства.

Итак, о чем же пойдёт речь? Пусть X — гладкое проективное многообразие над $\mathbb{C}$. Можно рассматривать более широкие классы многообразий, но мы хотим избежать технических сложностей и потому будем рассматривать только такие случаи. По нему строится некоторый инвариант $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, его *производная категория когерентных пучков*. В следующих двух лекциях мы обсудим, что именно из себя представляет этот объект, но пока достаточно понимать, что это некоторая категория, содержащая категорию когерентных пучков на X. Например, пучок-небоскрёб в какой-нибудь точке X задаёт объект категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. Этот сложно устроенный инвариант сначала появился в работах Гротендика и Вердье как технический объект, позволяющий более удобно обращаться с производными функторами. Позже категорию $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ стали изучать не только как техническое приспособление, но и как геометрически интересный объект. Чтобы объяснить, как это произошло, упомяну несколько статей, которые сыграли важную роль в истории развития этой области:

- **1978: А. Бейлинсон, «Когерентные пучки на $\mathbb{P}^n$ и проблемы линейной алгебры»**
  В этой короткой статье Бейлинсон дал альтернативное описание производной категории $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathbb{P}^n)$ в терминах представлений некоторой конечномерной алгебры. Заодно из доказательства следует удобный метод построения произвольного объекта производной категории $\mathbb{P}^n$ с помощью линейных расслоений («спектральная последовательность Бейлинсона»). Этот результат оказался очень полезен для многих классических вопросов о свойствах векторных расслоений на проективных пространствах, об их пространствах модулей и т.п.
- **1981: S. Mukai, «Duality between $D(X)$ and $D\left(\widehat{X}\right)$ with its application to Picard sheaves»**
  Пусть A — абелево многообразие, а $\hat{A}$ — двойственное к нему абелево многообразие. Мукаи показал, что существует некоторая эквивалентность производных категорий $D^b_{\mathrm{coh}}(A) \to D^b_{\mathrm{coh}}\left(\hat{A}\right)$, переводящая линейные расслоения степени ноль на A в пучки-небоскрёбы на $\hat{A}$. Поскольку многообразия A и $\hat{A}$ обычно не изоморфны, это значит, что у разных многообразий может быть одинаковая производная категория когерентных пучков! Это любопытно, но на практике важно другое — эквивалентность получается совсем не тривиальная: всё-таки небоскрёбы не очень похожи на линейные расслоения, а получаем, что ведут себя они в этой ситуации одинаково. В этой статье тоже результат про производные категории был немедленно применён к вопросам о векторных расслоениях на абелевых многообразиях. После применения эквивалентности производных категорий некоторые расслоения превратились в более простые и понятные объекты на двойственном многообразии.
- **1994: М. Концевич, «Homological Algebra of Mirror Symmetry»**
  Максим Концевич в своём докладе на ICM предложил математическую интерпретацию физического понятия зеркальной симметрии, по крайней мере, некоторых его аспектов. Мы не будем обсуждать гомологическую зеркальную симметрию в этом курсе за недостатком времени. Грубо говоря, физические теории предсказывают, что *нечто*, строящееся по алгебраическому многообразию, должно совпадать с другим *нечто*, строящимся по симплектической структуре на каком-то другом многообразии. Концевич предложил, что в качестве первого *нечто* можно взять не что иное, как производную категорию когерентных пучков на многообразии (а с симплектической стороны должен возникнуть некоторый вариант категории Фукаи). Эта гипотеза оказалась весьма популярной и привлекла внимание многих

математиков к изучению производных категорий когерентных пучков. Отметим, что тут производная категория возникает сама себе, как непосредственно интересный объект.

Это, конечно, далеко не полный список важных работ о производных категориях когерентных пучков.

1.2. Триангулированные категории

Производная категория когерентных пучков $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, как и вообще производная категория чего бы то ни было, является *триангулированной категорией*. Мы обсудим, что это значит.

Определение 1.2.1: *Аддитивной категорией* $\mathcal{A}$ называется категория, в которой для каждой пары объектов $A, B \in \mathcal{A}$ на множестве $\operatorname{Hom}(A, B)$ задана структура абелевой группы, согласованная с композицией морфизмов, а также выполнены дополнительные условия:
- существует нулевой объект $0 \in \mathcal{A}$;
- в $\mathcal{A}$ существуют конечные прямые произведения.

Замечание: Из этих условий следует, что конечные прямые произведения в $\mathcal{A}$ совпадают с конечными копроизведениями. Используя это, можно доказать, что на самом деле «быть аддитивной категорией» для $\mathcal{A}$ — это не дополнительная структура, а свойство, в том смысле, что структура абелевой группы на Hom'ах определена однозначно.

Мы будем чаще работать не просто с аддитивными категориями, а с $\mathbb{C}$-*линейными категориями*: это вариант определения выше, где $\operatorname{Hom}(A, B)$ предполагается не просто абелевой группой, а векторным пространством над $\mathbb{C}$. Функторы между аддитивными или $\mathbb{C}$-линейными категориями всегда предполагаются согласованными с этой структурой.

Определение 1.2.2: *Триангулированная категория* — это набор данных:
- аддитивная категория T;
- автоэквивалентность $[1] : T \to T$, называемая *функтором сдвига*;
- Набор *выделенных треугольников*, то есть последовательностей

  $$A \to B \to C \to A[1]$$

  из трёх стрелок в категории T, удовлетворяющий аксиомам TR1-TR4 ниже.

Аксиомы триангулированной категории таковы:

<u>TR1</u>:
- Любой морфизм $A \xrightarrow{f} B$ в T достраивается до выделенного треугольника $A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1]$. Каждое такое C мы будем называть *конусом f*.
- Треугольник $A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \to 0 \to A[1]$ является выделенным.
- Любая последовательность из трёх морфизмов, изоморфная выделенному треугольнику, является выделенным треугольником.

<u>TR2</u>: Последовательность

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

является выделенным треугольником тогда и только когда, когда «сдвинутая» последовательность

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1]$$

является выделенным треугольником.

Замечание: Поскольку функтор $[1]$ и обратный к нему (который мы будем обозначать через $[-1]$) можно применять много раз, аксиому **TR2** стоит воспринимать как утверждение, что любой выделенный треугольник

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

вписывается в бесконечную «спираль»

$$\ldots \to B[-1] \to C[-1] \to A \to B \to C \to A[1] \to B[1] \to C[1] \to A[2] \to \ldots$$

каждые три стрелки в которой образуют выделенный треугольник.

<u>**TR3**</u>: Для двух выделенных треугольников $A \to B \to C \to A[1]$ и $A' \to B' \to C' \to A'[1]$ и морфизмов f, g, которые делают первый квадрат в диаграмме ниже коммутативным:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & A[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

существует морфизм h, делающий всю диаграмму коммутативной.

Оставшуюся аксиому **TR4** мы обсудим позже, а пока сначала докажем несколько следствий из первых трёх аксиом. Категории, удовлетворяющие только аксиомам **TR1**-**TR3**, называют *предтриангулированными категориями*.

Лемма 1.2.3: Пусть $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to A[1]$ — выделенный треугольник. Тогда $g \circ f : A \to C$ — это нулевое отображение.

Доказательство: По аксиоме **TR1** существует выделенный треугольник $A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \to 0 \to A[1]$. По аксиоме **TR3** существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & A[1] \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & A[1]
\end{tikzcd}$$

Поскольку $\mathrm{Hom}(0, C) = 0$, отображение h только одно, нулевое. Тогда из коммутативности среднего квадрата следует, что композиция $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ равна нулю. □

Лемма 1.2.4: Пусть $A \to B \to C \to A[1]$ — выделенный треугольник, а $X \in T$ любой объект. Тогда последовательность абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_T(X, A) \to \mathrm{Hom}_T(X, B) \to \mathrm{Hom}_T(X, C) \qquad (1)$$

точна.

Доказательство: По лемме 1.2.3 мы знаем, что композиция стрелок в (1) равна нулю. Осталось доказать, что если $f : X \to B$ — морфизм, для которого композиция с $B \to C$ равно нулю, то он поднимается до морфизма $X \to A$. Рассмотрим существующие по аксиоме **TR2** сдвиги треугольников $A \to B \to C \to A[1]$ и $X \to X \to 0 \to X[1]$, и воспользуемся, как в лемме 1.2.3, аксиомами **TR1** и **TR3**, чтобы получить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
B \arrow[r] & C \arrow[r] & A[1] \arrow[r] & B[1]
\end{tikzcd}$$

Значит, сдвиг h в обратную сторону, $h[-1]$, является искомым подъёмом. □

Лемма 1.2.5: Пусть $A \to B \to C \to A[1]$ — выделенный треугольник, а $X \in T$ — любой объект. Тогда существует длинная точная последовательность абелевых групп

$$\begin{aligned}
&& \ldots \to\quad & \mathrm{Hom}_T(X, C[-1]) \to \\
\to \mathrm{Hom}_T(X, A) \to\quad & \mathrm{Hom}_T(X, B) \to\quad & & \mathrm{Hom}_T(X, C) \to \\
\to \mathrm{Hom}_T(X, A[1]) \to & \mathrm{Hom}_T(X, B[1]) \to & & \mathrm{Hom}_T(X, C[1]) \to \\
\to \ldots
\end{aligned}$$

Доказательство: Получается из леммы 1.2.4 и многократного применения аксиомы **TR2**. □

Лемма 1.2.6: Конус морфизма определен однозначно с точностью до изоморфизма, т.е., если существует два выделенных треугольника

$$A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1] \quad \text{и} \quad A \xrightarrow{f} B \to C' \to A[1],$$

то C изоморфно C'.

Доказательство: По аксиоме **TR3** существует морфизм $h : C \to C'$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & A[1] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & C' \arrow[r] & A[1]
\end{tikzcd}$$

Пусть $X \in T$ какой-нибудь объект. Рассмотрим морфизм длинных точных последовательностей, получаемых применением функтора $\mathrm{Hom}_{T(X,-)}$ по лемме 1.2.5:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Hom}(X,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,A[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,B[1]) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{h\circ -} & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(X,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,C') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,A[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,B[1])
\end{array}
$$

Все вертикальные стрелки, кроме средней, являются изоморфизмами. Тогда по 5-лемме средняя стрелка тоже является изоморфизмом. Это верно для любого выбора $X \in T$, то есть функторы $\mathrm{Hom}_T(-, C)$ и $\mathrm{Hom}_T(-, C')$ изоморфны. По лемме Йонеды представимые функторы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их представляющие объекты, то есть C и C'. Это мы и хотели доказать. □

Вернёмся к определению триангулированной категории. Мы его не закончили, потому что сформулировали только три аксиомы из четырёх. Аксиома **TR4** более сложная, чем предыдущие. Как ни странно, человечеству неизвестно, бывают ли категории, которые удовлетворяют **TR1**-**TR3**, но не удовлетворяют **TR4**; иногда даже случаются попытки доказать, что последняя аксиома следует из первых трёх, но пока все эти попытки оказываются бесплодными. Это до некоторой степени объясняется тем, что все встречающиеся на практике триангулированные категории на самом деле обладают гораздо более тонкой структурой, чем просто набор выделенных треугольников (т.е., допускают «оснащения» до dg-категорий или стабильных ∞ -категорий, что бы это ни значило). А никакого способа строить категории, в которых кроме выделенных треугольников не было бы ничего хорошего, мы не знаем.

Вместо аксиомы **TR4** в классическом варианте я сначала сформулирую её следствие, иногда называемое «3×3-лемма». Оно выглядит строго сильнее самой аксиомы, но на самом деле равносильно ей. В этом курсе мы сами не будем строго доказывать, что что-то является триангулированной категорией, будем только ссылаться на другие источники, поэтому нам не очень важно, чтобы список аксиом был минимальным. С учетом этого мне кажется полезным в первую очередь знать вариант аксиомы, которые проще запомнить и чаще удаётся непосредственно применять.

<u>TR4(+)</u> (3×3-лемма): Пусть дан коммутативный квадрат

$$
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & B \\
\downarrow & & \downarrow \\
A' & \longrightarrow & B'
\end{array}
$$

и для всех четырёх морфизмов в квадрате выбраны конусы C, C', A'', B''. Тогда квадрат можно дополнить до диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A[1] \arrow[d] \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A'[1] \arrow[d] \\
A'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & B'' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & C'' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & A''[1] \arrow[d] \\
A[1] \arrow[r] & B[1] \arrow[r] & C[1] \arrow[r] & A[2]
\end{tikzcd}
$$

в которой все строчки и столбцы являются выделенными треугольниками, все квадраты коммутативны, кроме нижнего правого, который антикоммутирует (два отображения $C'' \to A[2]$ отличаются умножением на -1).

Важным частным случаем этой 3×3-леммы является такой. Рассмотрим два морфизма $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ (не из выделенного треугольника, а просто два любых морфизма). Тогда дополним коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \big\downarrow \mathrm{id} & & \big\downarrow g \\ A & \xrightarrow{g \circ f} & C \end{array}$$

по аксиоме **TR4(+)** до диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(f) & \longrightarrow & A[1] \\ \big\downarrow \mathrm{id} & & \big\downarrow g & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ A & \xrightarrow{\ g \circ f\ } & C & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(g \circ f) & \to & A[1] \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(g) & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(g) & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ A[1] & \longrightarrow & B[1] & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(f)[1] & \to & A[2] \end{array}$$

В третьем столбце мы видим, что из аксиомы **TR4(+)** следует, что конус композиции морфизмов $g \circ f$ вписывается в середину выделенного треугольника между конусом f и конусом g. (Конус g в этом столбце возникает как конус отображения $0 \to \mathrm{Cone}(g)$ в третьей строке.) Полезно сравнить эту ситуацию с такой: если бы $A \subset B \subset C$ были бы вложенными абелевыми группами, то существовала бы короткая точная тройка

$$0 \to B/A \to C/A \to C/B \to 0,$$

аналогом которой является полученный нами выделенный треугольник. Этот частный случай 3×3-леммы и называют обычно аксиомой **TR4**: из него вместе с предыдущего аксиомами следует общее утверждение (см., например, [1, Lem. 1.7] или [2, Tag 05R0]).

Другое название аксиомы **TR4** — *аксиома октаэдра* — происходит благодаря тому, что коммутативный квадрат из A, B и C логичнее представить в виде треугольника (не выделенного, а обычного коммутативного треугольника), и если это делать достаточно последовательно, то 3×3-квадрат можно превратить во что-то вроде развёртки октаэдра. Если интересно, можно найти это в (английской) википедии или в первой главе [3].

Замечание: Аксиома **TR4(+)** в таком виде, разумеется, является усилением аксиомы **TR3**: морфизм h из **TR3** не просто существует, а может быть дополнен до большой диаграммы. Как отметили на лекции, это похоже на утверждение леммы о змее в абелевых категориях, но аналогия не совсем полная: не каждый морфизм выделенных треугольников может быть дополнен до такой диаграммы! То есть среди возможных h в **TR3** некоторые морфизмы лучше, чем прочие, но «хорошие» морфизмы ничего осмысленного не образуют — они не замкнуты ни относительно композиции, ни относительно сложения. Подробнее эти нюансы обсуждаются, например, в [4].

1.3. Комплексы и производные категории

Объектами категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, которую мы будем изучать, являются комплексы когерентных пучков на многообразии X, но морфизмы там устроены сложнее. В этом разделе мы немного обсудим, как именно.

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, например, категория абелевых групп или категория когерентных пучков на каком-нибудь алгебраическом многообразии. Обозначим через $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ категорию комплексов объектов из $\mathcal{A}$.

Будем обозначать через [1] функтор сдвига градуировки на комплексе: а именно, если $A^\bullet$ это комплекс

$$... \to A^{-1} \overset{d_{-1}}{\to} A^0 \overset{d_0}{\to} A^1 \overset{d_1}{\to} A^2 \to ...$$

то его сдвиг $A^\bullet[1]$ это комплекс, где $(A^\bullet[1])^i := A^{i+1}$, а дифференциал $(d[1])_i := -d_{i+1}$, то есть сдвиг «влево».

Определим также конус морфизма комплексов: если $f_\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ это морфизм, то его *конусом* называется комплекс $\mathrm{Cone}(f)$ из объектов $\mathrm{Cone}(f)^i := A^{i+1} \oplus B^i$ с дифференциалом $\begin{pmatrix} -d_{A,i+1} & 0 \\ f_i & d_{B,i} \end{pmatrix}$.

Такие понятия сдвига и конуса совершенно не делают категорию $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ триангулированной. Основная проблема с аксиомой **TR2**: если мы рассмотрим морфизм комплексов $A^\bullet \overset{f}{\to} B^\bullet$ и его конус $\mathrm{Cone}(f)$ с естественными морфизмами комплексов

$$A^\bullet \overset{f}{\to} B^\bullet \overset{g}{\to} \mathrm{Cone}(f) \to A^\bullet[1]$$

то видно, что конус морфизма $g : B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)$ совершенно не изоморфен комплексу $A^\bullet[1]$: если забыть дифференциал, то у $\mathrm{Cone}(g)$ подлежащий градуированный объект это прямая сумма $A^\bullet[1] \oplus B^\bullet \oplus B^\bullet[1]$. Но оказывается, что $\mathrm{Cone}(g)$ *гомотопически эквивалентен* комплексу $A^\bullet[1]$. Напомним, что это значит.

Определение 1.3.1: *Гомотопией* между двумя морфизмами $f_1, f_2 : A^\bullet \to B^\bullet$ называется набор отображений $\{h_i : A^i \to B^{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$, таких, что $(f_1 - f_2)_i = d_{B,i-1} h_i + h_{i+1} d_{A,i}$.

Из определения видно, что гомотопические классы отображений между комплексами $A^\bullet$ и $B^\bullet$ это фактор группы $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$ по подгруппе тех морфизмов, которые гомотопны нулю («стягиваемые морфизмы»). Это определение пришло из алгебраической топологии, где оно возникает как алгебраическое отражение обычного понятия гомотопии отображений топологических пространств.

Определение 1.3.2: Морфизм комплексом $f : A^\bullet \to B^\bullet$ называется *гомотопической эквивалентностью*, если существует морфизм $g : B^\bullet \to A^\bullet$ так, что композиция $g \circ f$ гомотопна тождественному отображению на $A^\bullet$ и композиция $f \circ g$ гомотопна тождественному отображению на $B^\bullet$.

Пример: Для любого объекта $A \in \mathcal{A}$ комплекс $0 \to A \overset{\mathrm{id}}{\to} A \to 0$ гомотопически эквивалентен нулевому комплексу («стягиваемый комплекс»). Достаточно показать, что тождественное отображение на этом комплексе гомотопно нулевому, что достигается при простой гомотопии:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[dl, phantom] & A \arrow[r] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 1.3.3: Докажите, что любого комплекса $A^\bullet$ конус тождественного морфизма $A^\bullet \to A^\bullet$ является стягиваемым комплексом. (*Подсказка*: комплекс в примере выше это конус тождественного отображения из объекта $A \in \mathcal{A}$, обобщите конструкцию гомотопии.)

Упражнение 1.3.4: Докажите, что для любого отображения $f : A^\bullet \to B^\bullet$ конус естественного отображения $B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)$ гомотопически эквивалентен $A^\bullet[1]$. (Решение можно прочитать в [5, Prop. 2.16])

Определение 1.3.5: *Гомотопической категорией комплексов* объектов $\mathcal{A}$ называется категория $K(\mathcal{A})$, объектами которой являются комплексы объектов из $\mathcal{A}$, а морфизмы между комплексами $A^\bullet$ и $B^\bullet$ это фактор-группа

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)/\sim$$

всех морфизмов комплексов по подгруппе морфизмов, гомотопных нулевому.

Упражнение 1.3.6: Проверьте, что это в самом деле определяет категорию, то есть что композиция гомотопических классов морфизмов корректно определена.

С учётом упражнения 1.3.4 следующая теорема кажется не столь неожиданной:

Теорема 1.3.7: Гомотопическая категория комплексов $K(\mathcal{A})$ с функтором сдвига [1] является триангулированной категорией, если объявить выделенными треугольниками последовательности морфизмов комплексов

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f) \to A[1] \tag{2}$$

и все изоморфные им в категории $K(\mathcal{A})$ (то есть на уровне комплексов — гомотопически эквивалентные последовательности).

Мы не будем доказывать эту теорему. Доказательство можно прочитать, например, в [6, Лекция 7, Теорема 3.2]. Основная сложность в том, что возникающие в аксиомах **TR3** и **TR4** коммутативные квадраты в категории $K(\mathcal{A})$ с точки зрения комплексов объектов из $\mathcal{A}$ будут не коммутативными, а только с точностью до гомотопии, и дальше надо аккуратно использовать эту заданную гомотопию.

У нас появился первый пример нетривиальной триангулированной категории. Но вообще более полезна не гомотопическая категория комплексов, а *производная категория* абелевой категории $\mathcal{A}$. Это категория, в которой комплекс и все его «резольвенты» отождествлены, т.е., соответствующие объекты изоморфны друг другу. Резольвента тут понимается в широком смысле — любой комплекс, квазиизоморфный данному. Напомним определение:

Определение 1.3.8: Морфизм комплексов $f : A^\bullet \to B^\bullet$ называется *квазиизоморфизмом*, если отображение на объектах когомологий $H^i(f) : H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)$ является изоморфизмом для всех $i \in \mathbb{Z}$.

В гомотопической категории комплекс не всегда изоморфен своей резольвенте. В качестве иллюстрации рассмотрим пока категорию $K(\mathbb{Z} - \mathrm{mod})$, гомотопическую категорию комплексов абелевых групп. Там есть объект $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (абелева группа, рассматриваемая как тривиальный комплекс: сама группа в степени ноль, остальные компоненты комплекса нулевые). У группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ есть свободная резольвента $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$. Для любой абелевой группы все её свободные резольвенты гомотопически эквивалентны друг другу (упражнение по гомологической алгебре), то есть изоморфны в $K(\mathbb{Z} - \mathrm{mod})$. Однако сам объект $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ не изоморфен в $K(\mathbb{Z} - \mathrm{mod})$ своей резольвенте, потому что нельзя придумать никакой нетривиальной гомотопии:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dl, dotted, "???"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Оказывается, что из гомотопической категории можно соорудить триангулированную категорию, в которой любой квазиизоморфизм комплексов становится изоморфизмом.

Теорема 1.3.9: Существует триангулированная категория $D(\mathcal{A})$ и точный функтор $K(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$, который переводит любой квазиизоморфизм в $K(\mathcal{A})$ в изоморфизм в категории $D(\mathcal{A})$, и является универсальным среди точных функторов в триангулированные категории с таким свойством.

Эту теорему мы доказывать тоже не будем. Она является частным случаем понятия *локализации* триангулированной категории: при некоторых условиях на класс морфизмов в триангулированной категории существует универсальный способ построить категорию, в которой эти морфизмы станут обратимы. Можно показать, что квазиизоморфизмы в гомотопической категории комплексов удовлетворяют всем необходимым условиям, при которых категорию можно локализовать.

Опишем лишь некоторые свойства производной категории:
- Объекты в $D(\mathcal{A})$ — комплексы объектов из $\mathcal{A}$, так же, как в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ и $K(\mathcal{A})$.
- Комплекс $A^\bullet$ в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ изоморфен нулю в $D(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда все его когомологии $H^i(A^\bullet)$ равны нулю.
- С точностью до изоморфизма в $D(\mathcal{A})$ любой выделенный треугольник в $D(\mathcal{A})$ является образом последовательности комплексов $A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f) \to A^\bullet[1]$.
- Любой морфизм из комплекса $A^\bullet$ в комплекс $B^\bullet$ в категории $D(\mathcal{A})$ можно представить как «домик»

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet \arrow[d, "\mathrm{qis}"'] \arrow[dr] & \\
A^\bullet & B^\bullet
\end{tikzcd}$$

где $C^\bullet$ — какой-то комплекс с квазиизоморфизмом из $C^\bullet$ в $A^\bullet$. Такое представление далеко не единственно.

Пример: Пусть в категории $\mathcal{A}$ дана короткая точная последовательность

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Тогда в категории $D(\mathcal{A})$ существует выделенный треугольник

$$A \to B \to C \xrightarrow{\delta} A[1],$$

где морфизм δ представляется домиком из комплексов

$$\begin{tikzcd} & {[A \to B]} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ {[0 \quad C]} & & {[A \quad 0]} \end{tikzcd}$$

Тут изображены комплексы, сосредоточенные в градуировках -1 и 0: морфизм слева это квазиизоморфизм между отображением $A \to B$ и его коядром C, а справа — проекция на одну из компонент.

Замечание: Более общо, для двух объектов $A, B \in \mathcal{A}$ из абелевой категории, рассматриваемых как комплексы, сосредоточенные только в степени 0, существует изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, B[i]) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B).$$

Тут Ext определяется по Йонеде (то есть как классы точных последовательностей

$$0 \to B \to C_1 \to \ldots \to C_i \to A \to 0$$

в абелевой категории с точностью до некоторого отношения эквивалентности). Из-за этого часто для любых двух объектов X, Y в триангулированной категории T группу $\mathrm{Hom}_T(X, Y[i])$ обозначают как $\mathrm{Ext}^i_T(X, Y)$.

Библиография

[1] P. May, «The axioms of triangulated categories». [Онлайн]. Доступно на: http://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/Triangulate.pdf

[2] T. Stacks project authors, «The Stacks project». 2024 г.

[3] R. Hartshorne, *Residues and duality*. в Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966, с. vii+423.

[4] A. Neeman, «Some new axioms for triangulated categories», *J. Algebra*, т. 139, вып. 1, сс. 221–255, 1991.

[5] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. в Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, с. viii+307.

[6] А. Кузнецов, «Записки лекций по гомологической алгебре». [Онлайн]. Доступно на: https://homepage.mi-ras.ru/~akuznet/homalg/index-homalg.htm