10. Полуортогональное разложение для раздутия

В этой лекции мы обсудим полуортогональные разложения для проективизации векторного расслоения и для раздутия гладкого многообразия. Это результаты Орлова из статьи [1]. Доказательства, которые мы проведём в этой лекции, не из оригинальной статьи, а являются вариациями аргументов из [2, Sec. 11].

10.1. Проективизация векторного расслоения

Пусть X — гладкое многообразие, а $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на нём. Напомним, что его *проективизацией* $\pi : \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$ называется многообразие пар $\{(x, [v])\}$, где $x \in X$ — точка, а $[v] \subset \mathcal{E}_x$ — одномерное подпространство в слое расслоения $\mathcal{E}$ над x.

Отметим, что если $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus k}$ — тривиальное векторное расслоение, то $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ в этом случае изоморфно произведению $X \times \mathbb{P}^{k-1}$. При этом конструкция, как легко убедиться, локальна по базе: например, если $U \subset X$ — такое открытое подмножество, что $\mathcal{E}|_U$ — тривиальное расслоение, то прообраз $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ изоморфен $U \times \mathbb{P}^{\operatorname{rk} \mathcal{E} - 1}$. Чтобы использовать это замечание в дальнейшем, нам понадобится такой несложный факт:

Лемма 10.1.1: Пусть $f : A \to B$ — морфизм в производной категории $D(X)$. Тогда f является изоморфизмом тогда и только тогда, когда существует открытое покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$ многообразия X, на любой элемент которого f ограничивается как изоморфизм.

Доказательство: В одну сторону утверждение очевидно. Предположим, что f не является изоморфизмом. Тогда его конус $\operatorname{Cone}(f)$ не равен нулю (упражнение!). Мы хотим доказать, что найдётся открытое множество из $U \subset X$ из заданного покрытия, в ограничении на которое f не является изоморфизмом. Пусть $x \in X$ — какая-нибудь точка из носителя $\operatorname{Cone}(f)$. Рассмотрим открытое подмножество U из покрытия, содержащее точку x, и пусть $i : U \hookrightarrow X$ — морфизм вложения. Тогда существует выделенный треугольник

$$i^* A \xrightarrow{i^* f} i^* B \to i^* \operatorname{Cone}(f) \to i^* A[1],$$

где мы используем, что $i^* \operatorname{Cone}(f) \cong \operatorname{Cone}(i^* f)$. По свойствам носителя $R\operatorname{Hom}_U(i^* \operatorname{Cone}(f), \mathcal{O}_x) \neq 0$, где $\mathcal{O}_x$ — пучок-небоскрёб в точке $x \in U$. Значит, конус морфизма $i^* f$ ненулевой, то есть это не изоморфизм. $\square$

Если $\pi : \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$ — проективизация некоторого векторного расслоения, то в обратном образе $\pi^* \mathcal{E}$ расслоения $\mathcal{E}$ существует канонически определённое линейное подрасслоение: над точкой $(x, [v]) \in \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ слой $\pi^* \mathcal{E}$ изоморфен $\mathcal{E}_x$, и в этом слое можно выделить одномерное подпространство $[v] \subset \mathcal{E}_x$. Эти одномерные подпространства склеиваются в линейное расслоение $\mathcal{U} \subset \pi^* \mathcal{E}$ на $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$, называемое *относительным тавтологическим расслоением* для морфизма π (впрочем, линейное расслоение зависит от выбора $\mathcal{E}$, а не только от π, поэтому это не совсем удачное название). На каждый слой $\mathbb{P}^{\operatorname{rk} \mathcal{E} - 1}$ морфизма π расслоение $\mathcal{U}$ ограничивается как $\mathcal{O}(-1)$, поэтому это линейное расслоение ещё часто называют *относительным* $\mathcal{O}(-1)$ для морфизма π. Двойственное к $\mathcal{U}$ линейное расслоение называют *относительным* $\mathcal{O}(1)$ или *относительным обильным расслоением.*

Теорема 10.1.2 ([1]): Пусть X — гладкое многообразие, и пусть $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на X ранга r. Пусть $\pi : Y \to X$ — это проективизация $\mathcal{E}$, а $\mathcal{O}(h)$ — относительное обильное расслоение для морфизма π. Тогда функтор $\pi^* : D(X) \to D(Y)$ — строго полный, и существует полуортогональное разложение

$$D(X) = \langle \pi^* D(X), \pi^* D(X) \otimes \mathcal{O}(h), \dots, \pi^* D(X) \otimes \mathcal{O}((r-1)h) \rangle.$$

Доказательство: Используя сопряжённость функторов π^* и π_*, а так же формулу проекции, получаем изоморфизм

$$R\mathrm{Hom}_Y(\pi^* A, \pi^* B) \cong R\mathrm{Hom}_X(A, \pi_* \pi^* B) \cong R\mathrm{Hom}_X(A, B \otimes \pi_* \mathcal{O}_Y).$$

Поэтому для строгой полноты функтора π^* достаточно доказать, что естественное отображение $\mathcal{O}_X \to \pi_* \mathcal{O}_Y$ является изоморфизмом. То, что некоторый морфизм в производной категории является изоморфизмом, по лемме 10.1.1 можно проверять локально. Поскольку $\mathcal{E}$ локально тривиально, это значит, что достаточно рассмотреть случай $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus r}$, то есть случай проекции $\pi : X \times \mathbb{P}^{r-1} \to X$. Тогда из декартовости квадрата

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbb{P}^{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^{r-1} \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \{*\} \end{tikzcd}$$

и теоремы о плоской замене базы следует, что $\pi_* \mathcal{O}_{X \times \mathbb{P}^{r-1}}$ изоморфно $\mathcal{O}_X \boxtimes R\Gamma(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}})$, то есть просто $\mathcal{O}_X$, что мы и хотели доказать. Значит, функтор $\pi^* : D(X) \to D(Y)$ является строго полным, то есть вложением полной подкатегории. Поскольку у этого функтора есть оба сопряжённых, эта подкатегория допустима в $D(Y)$.

Аналогичным образом из изоморфизма

$$R\mathrm{Hom}_Y(\pi^* A, \pi^* B \otimes \mathcal{O}(kh)) \cong R\mathrm{Hom}_X(A, \pi_*(\pi^* B \otimes \mathcal{O}(kh))) \cong R\mathrm{Hom}_X(A, B \otimes \pi_* \mathcal{O}_Y(kh))$$

получается, что для доказательства полуортогональности последовательности допустимых подкатегорий в формулировке теоремы 10.1.2 достаточно доказать, что $\pi_* \mathcal{O}_Y(kh) = 0$ для $k = -1, -2, ..., -(r-1)$. Используя снова теорему о плоской замене базы, легко видеть, что это следует из обращения в ноль когомологий $R\Gamma(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}(kh))$ для того же списка значений k.

Чтобы завершить построение полуортогонального разложения, осталось доказать, что указанный набор допустимых подкатегорий порождает всю $D(Y)$. Поскольку они полуортогональны, то порождённая ими совместно подкатегория, которую мы назовём $\mathcal{A}$, тоже допустима по лемме из седьмой лекции. Тогда существует полуортогональное разложение $D(Y) = \langle {}^\perp\mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle$ и осталось показать, что ортогонал ${}^\perp\mathcal{A}$ в $D(Y)$ нулевой.

Из нерассказанного на лекции: Если категория $\mathcal{A}' \subset D(Y)$ не является допустимой, то из равенства нулю ортогонала ${}^\perp\mathcal{A}'$ не следует, что $\mathcal{A}' = D(Y)$! Например, если $\mathcal{A}'$ — подкатегория всех объектов $D(Y)$ с нульмерным носителем, то в ней содержатся все пучки-небоскрёбы, поэтому любой объект в ${}^\perp\mathcal{A}'$ имеет пустой носитель, то есть равен нулю.

Выберем какую-нибудь точку $x \in X$. Поскольку π — плоский морфизм, пулбэк $\pi^* \mathcal{O}_x$ пучка-небоскрёба относительно π — это структурный пучок слоя $j : \mathbb{P}(\mathcal{E}_x) \hookrightarrow Y$ над этой точкой. Из вложения $\pi^* D(X) \subset \mathcal{A}$ следует, что объект $j_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}$ лежит в $\mathcal{A}$. По определению $\mathcal{A}$ содержит в том числе и подкрутки этого объекта на $\mathcal{O}(h), ..., \mathcal{O}((r-1)h)$, то есть прямые образы линейных расслоений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}, ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(r-1)$ при вложении $j : \mathbb{P}^{r-1} \to X$. Мы знаем, что их прямая сумма $G_x := \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(i)$ — классический генератор в $D(\mathbb{P}^{r-1})$. Тогда для любого объекта $F \in {}^\perp\mathcal{A}$ по полуортогональности и сопряжённости функторов верно

$$0 = R\mathrm{Hom}_Y(F, j_* G_x) \cong R\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_x)}(j^* F, G_x),$$

но поскольку G_x является классическим генератором в $\mathbb{P}(\mathcal{E}_x)$, это означает, что $j^*F = 0$. Однако точка x была выбрана произвольно, поэтому (производное) ограничение F на любой слой морфизма $\pi : Y \to X$ равно нулю. Из этого следует, что носитель объекта F пуст, что может быть только в случае $F = 0$. Значит, в ${}^\perp\mathcal{A}$ нет ненулевых объектов, что мы и хотели доказать.□

Замечание: Для морфизма $\pi : Y \to X$ гладких собственных многообразий полуортогональное разложение $D(Y) = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ называется *π-линейным разложением*, если каждая из подкатегорий $\mathcal{A}_i$ замкнута относительно тензорного умножения на любой объект вида π^*E, где $E \in D(X)$. Разложение из теоремы 10.1.2 — главный пример линейного разложения. Доказывать, что набор допустимых подкатегорий в $D(Y)$ задаёт π-линейное полуортогональное разложение, можно локально по базе, см. [3]. Именно это и происходит в доказательстве теоремы 10.1.2: полуортогональность мы проверяли, переходя к открытому покрытию X, на котором тривиализуется расслоение $\mathcal{E}$, да и полноту в итоге мы свели к тому к «послойной» полноте.

10.2. Разложение для раздутия: формулировка

Пусть X — гладкое многообразие, в нём $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие коразмерности c. Обозначим через $\pi : Y \to X$ раздутие X с центром в Z, а через $E \subset Y$ — исключительный дивизор, то есть $\pi^{-1}(Z)$. Обозначим морфизмы между этими многообразиями согласно коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

Заодно обозначим через $\mathcal{O}(h)$ относительное обильное расслоение для раздутия, оно же $\mathcal{O}_Y(-E)$.

Теорема 10.2.1 ([1]): В обозначениях выше функторы $\pi^* : D(X) \to D(Y)$ и $i_* \circ p^* : D(Z) \to D(Y)$ являются строго полными, и существует полуортогональное разложение

$$D(Y) = \langle i_*p^*D(Z) \otimes \mathcal{O}_Y(-(c-1)h), ..., i_*p^*D(Z) \otimes \mathcal{O}_Y(-h), \pi^*D(X) \rangle.$$

Эта теорема гораздо сложнее предыдущей. Например, в прошлой теореме многие вычисления сводились к вычислению когомологий некоторых пучков на проективных пространствах. У раздутия тоже каждый слой – проективное пространство, но раздутие не является плоским морфизмом и поэтому сводить вычисление производного прямого образа к послойным когомологиям нельзя, потому что теорема о плоской замене базы неприменима. Поэтому нам понадобится локальная модель раздутия.

Отметим частный случай: если X это гладкая поверхность, а $Z = \{z\}$ — точка в ней, то для раздутия $\pi : Y \to X$ этой точки получается разложение

$$D(Y) = \langle \mathcal{O}_E(E), \pi^*D(X) \rangle,$$

где E — исключительный дивизор. Тогда, как мы раньше обсуждали, $\mathcal{O}_E(E)$ — исключительный объект. В частности, если в категории $D(X)$ существовал полный исключительный набор, то в категории $D(Y)$ такой набор тоже существует и получается добавлением одного исключительного объекта $\mathcal{O}_E(E)$ к пулбэкам исключительных объектов с X. Например, так мы доказали, что на всех рациональных поверхностях существует полный исключительный набор, причём состоящий из когерентных пучков (случай $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ надо рассмотреть отдельно, но там тоже всё просто).

10.3. Локальная модель раздутия

Пусть X — гладкое многообразие, а $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на X. Пусть $s \in \Gamma(X, \mathcal{E})$ — регулярное сечение. Напомним, что это означает, что у подмногообразия

$$Z := \{x \in X \mid s(x) = 0\}$$

коразмерность равна рангу расслоения $\mathcal{E}$, который мы обозначим через c. Пусть $T := \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ — это проективизация расслоения $\mathcal{E}$, с каноническим морфизмом $t : T \to X$. Как обсуждалось в разделе 10.1, на T существует относительное тавтологическое расслоение $\mathcal{U}$, определённое как подрасслоение в $t^*\mathcal{E}$. Оно задаёт точную тройку

$$0 \to \mathcal{U} \to t^*\mathcal{E} \to \mathcal{Q} \to 0,$$

где $\mathcal{Q}$ — тавтологическое фактор-раслоение.

Пулбэк глобального сечения $s \in H^0(X, \mathcal{E})$ задаёт сечение $t^*s \in H^0(T, t^*\mathcal{E})$. Пусть $\overline{s} \in H^0(T, \mathcal{Q})$ — образ этого сечения при эпиморфизме $t^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$.

Лемма 10.3.1: Сечение $\overline{s} \in H^0(T, \mathcal{Q})$ является регулярным. Подмногообразие $Y := \{\overline{s} = 0\} \subset T$ его нулей изоморфно раздутию X в подмногообразии Z.

Доказательство: По определению сечение $\overline{s}$ обращается в ноль в некоторой точке $(x, [v]) \in T \cong \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда элемент $s(x) \in \mathcal{E}_x$ лежит в одномерном подпространстве $[v] \subset \mathcal{E}_x$. Значит, над точками, где $s = 0$, то есть над $Z \subset X$, можно брать любое подпространство $[v] \subset \mathcal{E}_x$. Поэтому Y содержит $\pi^{-1}(Z) \subset T$. А над теми точками $x \in X$, где $s(x) \neq 0$, в Y висит ровно одна точка из слоя проекции $t : T \to X$. Получается, что $\dim Y = \dim X$, а $\pi^{-1}(Z) \subset Y$ — это дивизор. Поскольку ранг расслоения Q равен $c - 1 = \dim T - \dim X$, это как раз означает, что $\overline{s}$ — регулярное сечение Q.

Описание слоёв Y над точками X сходится с тем, что Y должно быть изоморфно раздутию X с центром в Z. То, что Y и в самом деле представляет из себя раздутие, мы оставляем в качестве упражнения. (*Подсказка*: для доказательства стоит перейти к аффинной подсхеме в X, на которой расслоение $\mathcal{E}$ тривиализуется. Тогда сечение s — это регулярная последовательность элементов кольца.) □

Мы доказали, что для тех подмногообразий $Z \subset X$, которые можно получить как множество нулей регулярного сечения векторного расслоения, раздутие допускает локальную модель как конкретное, заданное уравнением, подмногообразие в проективизации векторного расслоения. Локально любое (гладкое) подмногообразие имеет такой вид:

Лемма 10.3.2: Пусть X гладкое многообразие, а $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие. Тогда для любой точки $z \in Z$ существует Зариски-открытая окрестность $U \subset X$, на которой можно выбрать расслоение $\mathcal{E}$ с регулярным сечением, обращающимся в ноль только в точках Z.

Доказательство: Это задача по коммутативной алгебре. Дадим набросок доказательства: между локальными кольцами точки z в многообразии X и в его подмногообразии Z существует эпиморфизм $f : \mathcal{O}_{X,z} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$. Используя, что оба этих локальных кольца являются регулярными, можно доказать, что для идеала $\ker f \subset \mathcal{O}_{X,z}$ существует регулярная последовательность порождающих элементов: $\ker f = (s_1, ..., s_c)$, где c — коразмерность Z в X. Подняв элементы s_i из локального кольца $\mathcal{O}_{X,z}$ в координатное кольцо достаточно маленькой аффинной Зариски-открытой окрестности $U \subset X$ точки z, получим желаемое сечение $(\widetilde{s_1}, ..., \widetilde{s_c}) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U^{\oplus c})$, высекающее Z. □

Внимательный читатель, прочитав два доказательства выше, может задаться вопросом: зачем вообще при обсуждении локальной модели говорить о каком-то векторном расслоении $\mathcal{E}$? Раз уж $\mathcal{E}$ локально тривиально, можно с самого начала перейти к чуть меньшему открытому множеству и формулировать всё в терминах тривиального расслоения $\mathcal{O}_X^{\oplus c}$, не вводя отдельную сущность $\mathcal{E}$. Это, конечно, справедливый вопрос. В доказательствах, как правило, всё сводится к этому случаю, но в формулировках обозначение $\mathcal{E}$ удобнее — например, оно позволяет не путать расслоение и двойственное к нему. Отдельное обозначение мешает формулировать утверждения, не имеющие геометрического смысла, и тем самым помогает искать более удобные для работы утверждения [4].

Кроме того, время от времени возникают геометрически интересные ситуации, где подмногообразие $Z \subset X$ можно глобально задать как множество нулей некоторого регулярного сечения, и тогда получаются более сильные результаты, чем просто при использовании локальной модели. Например, если X это проективное пространство, то *полное пересечение* в нём — это подмногообразие, которое можно высечь регулярным сечением расслоения $\mathcal{E}$, изоморфного прямой сумме линейных расслоений $\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k_i)$. Общепринятого термина для тех подмногообразий, которые допускают описание через нули регулярного сечения произвольного расслоения, нет, но они тоже иногда возникают. Однако не каждое подмногообразие может быть так представлено.

Упражнение 10.3.3: Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубика. Докажите, что C нельзя представить в виде множества нулей регулярного сечения никакого векторного расслоения $\mathcal{E}$ ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. (*Указание*: если бы это было возможно, то нормальное расслоение к C в $\mathbb{P}^3$ было бы ограничением линейного расслоения $\Lambda^2\mathcal{E}$ с проективного пространства на C; в частности, его степень тогда делилась бы на 3. Вычислите или найдите описание нормального расслоения к скрученной кубике для завершения доказательства.)

Для дальнейшего использования сформулируем утверждение о *резольвенте Кошуля* для подмногообразия, высекающегося регулярным сечением. Мы его уже использовали в шестой лекции, а тут сформулируем частный случай, который нам понадобится. Доказательство снова опустим.

Лемма 10.3.4: В условиях леммы 10.3.1 для структурного пучка $Y \subset T$ существует резольвента векторными расслоениями:

$$0 \to \Lambda^{c-1}\mathcal{Q}^{\vee} \to \dots \to \Lambda^2\mathcal{Q}^{\vee} \to \mathcal{Q}^{\vee} \to \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_Y \to 0, \qquad (1)$$

где морфизмы заданы подстановкой глобального сечения $\overline{s} \in H^0(T, \mathcal{Q})$.

Докажем для локальной модели раздутия некоторые свойства функторов между производными категориями.

Утверждение 10.3.5: Пусть X — гладкое многообразие, в нём $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие, являющееся множеством нулей регулярного сечения s векторного расслоения $\mathcal{E}$ на X. Пусть $\pi : Y \to X$ — морфизм раздутия X в подмногообразии Z. Тогда естественный морфизм $\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_Y$ в производный прямой образ $\pi_*\mathcal{O}_Y \in D(X)$ является изоморфизмом.

Доказательство: Пусть $T := \mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ — проективизация расслоения $\mathcal{E}$, с морфизмом $t : T \to X$. Пусть $k : Y \hookrightarrow T$ — вложение из леммы 10.3.1. Тогда раздутие $\pi : Y \to X$ это композиция $t \circ k$. Значит, $\pi_*\mathcal{O}_Y$ изоморфно производному прямому образу объекта $k_*\mathcal{O}_Y \in D(T)$ при отображении $t : T \to X$. Поскольку k — замкнутое вложение, объект $k_*\mathcal{O}_Y$ изоморфен структурному пучку подмногообразия Y в T. Используя резольвенту (1) из леммы 10.3.4 для этого пучка, мы видим, что достаточно доказать, что $t_*\mathcal{O}_T \cong \mathcal{O}_X$ и что $t_*\Lambda^i\mathcal{Q}^{\vee} = 0$ при всех $i > 0$.

Поскольку морфизм t — плоский, по теореме о плоской замене базы мы можем вычислять производные прямые образы послойно. Таким методом мы уже доказали в теореме 10.1.2, что $t_*\mathcal{O}_T$ изоморфно $\mathcal{O}_X$. Вспомним теперь, что $\mathcal{Q}$ определялось с помощью точной тройки

$$0 \to \mathcal{U} \to t^*\mathcal{E} \to \mathcal{Q} \to 0,$$

которая в ограничении на каждый слой $\mathbb{P}^{c-1} \subset T$ морфизма $t : T \to X$ по определению превращалась в точную последовательность Эйлера

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}^{\oplus c} \to T_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1) \to 0.$$

Значит, ограничение расслоения $\Lambda^i\mathcal{Q}^\vee$ на слой изоморфно $\Omega^i_{\mathbb{P}^{c-1}}(i)$. При всех $i > 0$ у этого расслоения на $\mathbb{P}^{c-1}$ нет когомологий (упражнение!). По теореме о плоской замене базы мы получили, что производный прямой образ $t_*\Lambda^i\mathcal{Q}^\vee \in D(X)$ в каждой точке имеет нулевой слой. Тогда этот прямой образ равен нулю, что завершает вычисление. □

Существование локальной модели для раздутия было очень важно в этом доказательстве: она позволила свести вычисление производного прямого образа относительно морфизма раздутия $\pi : Y \to X$ к вычислению производных прямых образов нескольких векторных расслоений относительно плоского морфизма $t : T \to X$, где всё можно считать послойно.

Следующее утверждение — локальное, о свойствах раздутия в окрестности точки раздуваемого подмногообразия. Поэтому локальная модель раздутия нужна только в доказательстве, а в формулировке раздутие можно взять произвольным.

Утверждение 10.3.6: Пусть $\pi : Y \to X$ — раздутие гладкого многообразия X в гладком подмногообразии $Z \subset X$. Пусть $z \in Z$ — некоторая точка, а $f : F := \pi^{-1}(z) \cong \mathbb{P}^{c-1} \hookrightarrow Y$ — слой морфизма π над ней. Тогда производный обратный образ $\pi^*\mathcal{O}_z \in D(Y)$ пучка-небоскрёба в точке z — это объект производной категории, у которого $(-m)$-тый пучок когомологий $\mathcal{H}^{-m}(\pi^*\mathcal{O}_z) \in \mathrm{Coh}(Y)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$ изоморфен прямому образу $f_*(\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m))$.

Доказательство: Поскольку утверждение локальное, можно считать, что раздутие допускает локальную модель, то есть $Z \subset X$ высекается регулярным сечением s векторного расслоения $\mathcal{E}$ на X. Пусть $t : T \to X$ и $k : Y \hookrightarrow T$ — морфизмы как в доказательстве утверждения 10.3.5. Морфизм k — это замкнутое вложение, поэтому прямой образ k_* является точным функтором, и в частности $k_*\mathcal{H}^{-m}(\pi^*\mathcal{O}_z) \simeq \mathcal{H}^{-m}(k_*\pi^*\mathcal{O}_z)$. Более того, для замкнутого вложения прямой образ k_* — *консервативный функтор* на когерентных пучках, что означает, что если прямые образы двух пучков становятся изоморфны, то они и были изоморфны (упражнение). Соединив эти два факта, получаем, что достаточно доказать, что $\mathcal{H}^{-m}(k_*\pi^*\mathcal{O}_z)$ изоморфно $k_*f_*(\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m))$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Изучим объект $k_*\pi^*\mathcal{O}_z$. Поскольку $\pi = t \circ k$, этот объект изоморфен $k_*k^*t^*\mathcal{O}_z$, что по формуле проекции изоморфно (производному) тензорному произведению $t^*\mathcal{O}_z \otimes k_*\mathcal{O}_Y$. Морфизм t плоский, поэтому производный обратный образ $t^*\mathcal{O}_z$ — это структурный пучок слоя $F \subset Y$ над точкой z. Для объекта $k_*\mathcal{O}_Y$ используем снова резольвенту (1) из леммы 10.3.4. Поскольку эта резольвента состоит из векторных расслоений, с помощью неё можно вычислять производное тензорное произведение:

$$k_*\pi^*\mathcal{O}_z \cong t^*\mathcal{O}_z \otimes k_*\mathcal{O}_Y \cong [\Lambda^{c-1}\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{O}_F \to \ldots \to \mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_F].$$

По формуле проекции для вложения слоя $k \circ f : F \hookrightarrow T$ над точкой $z \in Z$ в этой резольвенте на $(-m)$-том месте написан пучок $k_*f_*(\Lambda^m\mathcal{Q}^\vee|_F)$. По построению в лемме 10.3.4 морфизмы в резольвенте (1) получаются подстановкой сечения $\overline{s}$, которое в ограничении на слой F тождественно равно нулю. Следовательно, объект $k_*\pi^*\mathcal{O}_z$ в производной категории изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} k_*f_*(\Lambda^m\mathcal{Q}^\vee|_F)[m]$. Наконец, вспомним из доказательства утверждения 10.3.5, что в ограничении на любой слой расслоение $\Lambda^m \mathcal{Q}^\vee$ изоморфно $\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$. Это завершает доказательство. $\square$

10.4. Разложение для раздутия: доказательство

В этом разделе мы докажем теорему 10.2.1, используя вспомогательные утверждения, доказанные с помощью локальной модели раздутия в предыдущем разделе. Сперва обобщим одно из этих утверждений до глобальной версии.

Лемма 10.4.1: Пусть $\pi : Y \to X$ — раздутие гладкого многообразия X в гладком подмногообразии $Z \subset X$. Тогда $\pi_* \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X$.

Доказательство: Благодаря сопряжённости прямого и обратного образа существует канонический морфизм $\mathcal{O}_X \to \pi_* \mathcal{O}_Y$. По лемме 10.1.1 проверять, что это отображение изоморфизм, можно локально на открытом покрытии X. Заметим ещё, что вычисление производного прямого образа $\pi_* \mathcal{O}_Y$ тоже Зариски-локально по X, то есть для открытого подмножества $U \subset X$ производный прямой образ структурного пучка $\pi^{-1}(U)$ при проекции на U совпадает с производным ограничением $\pi_* \mathcal{O}_Y$ на $U \subset X$. Это можно получить из теоремы о плоской замене базы, но, вообще говоря, это следствие определения производного прямого образа.

По лемме 10.3.2 многообразие X можно покрыть открытыми множествами, на каждом из которых раздутие с центром в Z допускает локальную модель как в разделе 10.3. Тогда на каждом элементе покрытия морфизм $\mathcal{O}_X \to \pi_* \mathcal{O}_Y$ является изоморфизмом по предложению 10.3.5. Значит, это и был изоморфизм, что мы и хотели доказать. $\square$

В доказательстве нам пригодится такой факт о триангулированных категориях. Он будет полезен для доказательства строгой полноты некоторых функторов.

Лемма 10.4.2: Пусть $\Phi : T_1 \to T_2$ — функтор между двумя триангулированными категориями, и пусть A и B — два объекта в T_1. Предположим, что применение Φ индуцирует изоморфизм

$$R\mathrm{Hom}_{T_1}(A, B) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}_{T_2}(\Phi(A), \Phi(B)).$$

Тогда для любых $A' \in \langle A \rangle \subset T_1$ и $B' \in \langle B \rangle \subset T_1$ верно, что отображение

$$R\mathrm{Hom}_{T_1}(A', B') \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}_{T_2}(\Phi(A'), \Phi(B'))$$

является изоморфизмом. В частности, если A и B оба являются классическими генераторами в T_1, функтор Φ строго полон.

Доказательство: Обсудим сначала случай $B' = B$. Докажем по индукции, что при каждом $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ для любого объекта $A' \in \langle A \rangle_i$ отображение

$$R\mathrm{Hom}_{T_1}(A', B) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}_{T_2}(\Phi(A'), \Phi(B))$$

является изоморфизмом. Для $i = 0$ это напрямую следует из условия: любой точный функтор между триангулированными категориями коммутирует со сдвигами, (конечными) прямыми суммами и переходом к прямым слагаемым. Предположим теперь, что для всех объектов из $\langle A \rangle_i$ отображение является изоморфизмов и докажем, что тогда для $A' \in \langle A \rangle_{i+1}$ — тоже.

По определению существует выделенный треугольник

$$E_0 \to A' \oplus A'' \to E_i \to E_0[1],$$

где $E_0 \in \langle A \rangle_0$ и $E_i \in \langle A \rangle_i$, а A'' — произвольный объект. Из этого выделенного треугольника можно получить две длинные точные последовательности: одну применением функтора $\mathrm{Ext}^\bullet_{T_1}(-, B)$, вторую — применением функтора $\mathrm{Ext}^\bullet_{T_2}(\Phi(-), \Phi(B))$. Между этими точными последовательностями есть отображение, полученное применением функтора Φ. По предположению индукции для E_0 и E_i морфизм объектов в этих точных последовательностях — изоморфизм. Значит, по 5-лемме для объекта $A' \oplus A''$ морфизм тоже является изоморфизмом, а тогда и для A' тоже.

Мы знаем из шестой лекции, что $\langle A \rangle = \cup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \langle A \rangle_i$, поэтому по индукции мы доказали, что утверждение верно, когда $B' = B$. Осталось для каждого выбора A' доказать, что можно в качестве B' брать не только B, а любой объект из $\langle B \rangle$, что делается аналогично. $\square$

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы 10.2.1. Напомним обозначения:

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{i}{\hookrightarrow} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Z & \overset{j}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

Доказательство (теоремы 10.2.1):

<u>Шаг 1</u>. Докажем сначала, что используемые в формулировке функторы в самом деле являются строго полными. Как в доказательстве теоремы 10.1.2, из формулы проекции следует, что функтор π^* строго полный тогда и только тогда, когда отображение $\mathcal{O}_X \to \pi_* \mathcal{O}_Y$ — изоморфизм. Мы доказали это в лемме 10.4.1. У функтора π^* есть оба сопряжённых, поэтому он задаёт вложение допустимой подкатегории $\pi^* : D(X) \hookrightarrow D(Y)$.

Рассмотрим теперь функтор $\Phi = i_* p^* : D(Z) \to D(Y)$. Рассмотрим в подкатегории $D(Z)$ два объекта: произвольный объект $B \in D(Z)$ и объект $A \in D(Z)$, который изоморфен производному ограничению $j^* A_X$ некоторого объекта из $D(X)$. Вычислим тогда $R\mathrm{Hom}$ между образами этих объектов под действием функтора Φ:

$$R\mathrm{Hom}_Y(i_* p^* j^* A_X, i_* p^* B) \cong R\mathrm{Hom}_Y(i_* i^* \pi^* A_X, i_* p^* B) \cong R\mathrm{Hom}_Y(\pi^* A_X \otimes i_* \mathcal{O}_E, i_* p^* B).$$

Здесь в первом изоморфизме мы пользовались коммутативностью квадрата, то есть равенством $j \circ p = \pi \circ i$, а второй следует по формуле проекции. Продолжим вычисление, воспользовавшись сопряжённостью между i_* и i^*:

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}_Y(\pi^* A_X \otimes i_* \mathcal{O}_E, i_* p^* B) &\cong R\mathrm{Hom}_E(i^* \pi^* A_X \otimes i^* i_* \mathcal{O}_E, p^* B) \cong \\ &\cong R\mathrm{Hom}_E(p^* j^* A_X \otimes i^* i_* \mathcal{O}_E, p^* B). \end{aligned}$$

Объект $i^* i_* \mathcal{O}_E$ допускает более конкретное описание: поскольку i — замкнутое вложение, производный прямой образ $i_* \mathcal{O}_E$ — это структурный пучок дивизора E в Y. Для него существует резольвента линейными расслоениями:

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-E) \to \mathcal{O}_Y \to i_* \mathcal{O}_E \to 0.$$

Поскольку первый морфизм в этой точной тройке — умножение на уравнение E, при ограничении на E он становится нулевым. Значит, объект $i^* i_* \mathcal{O}_E$ изоморфен прямой сумме $\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E(-E)[1]$. Подставим это описание в вычисление выше:

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}_E(p^* j^* A_X \otimes i^* i_* \mathcal{O}_E, p^* B) &\cong R\mathrm{Hom}_E(p^* j^* A_X \oplus (p^* j^* A_X \otimes \mathcal{O}_E(-E)[1]), p^* B) \cong \\ &\cong R\mathrm{Hom}_E(p^* j^* A_X, p^* B) \oplus R\mathrm{Hom}_E(p^* j^* A_X, p^* B \otimes \mathcal{O}_E(E)[-1]). \end{aligned}$$

Морфизм p — это проективизация векторного расслоения, поэтому из теоремы 10.1.2 мы знаем, что функтор $p^* : D(Z) \to D(E)$ строго полный. Более того, поскольку по свойствам раздутия линейное расслоение $\mathcal{O}_E(E)$ — это относительное тавтологическое расслоение для морфизма p, в той же теореме мы доказали, что подкатегории $p^*D(Z)$ и $p^*D(Z)\otimes\mathcal{O}_E(E)$ полуортогональны. Итого мы получили цепочку изоморфизмов

$$\begin{aligned}
&R\mathrm{Hom}_Y(i_*p^*j^*A_X, i_*p^*B) \cong \\
&\qquad\cong R\mathrm{Hom}_E(p^*j^*A_X, p^*B)\oplus R\mathrm{Hom}_E(p^*j^*A_X, p^*B\otimes\mathcal{O}_E(E)[-1]) \cong \\
&\qquad\cong R\mathrm{Hom}_Z(j^*A_X, B)\oplus 0 \cong R\mathrm{Hom}_Z(j^*A_X, B).
\end{aligned}$$

Вычисление выше показывает, что для объектов $A, B\in D(Z)$ отображение

$$R\mathrm{Hom}_Z(A,B)\stackrel{i_*p^*}{\to} R\mathrm{Hom}_Y(i_*p^*A, i_*p^*B)$$

является изоморфизмом при условии, что A имеет вид j^*A_X для некоторого $A_X\in D(X)$.

Из нерассказанного на лекции: Строго говоря, надо ещё объяснить, что построенный изоморфизм получается именно применением функтора i_*p^*. Это следует из того, что все использованные нами изоморфизмы, включая формулу проекции и т.п., получаются из естественных преобразований единицы и коединицы между сопряжёнными функторами. Например, расщепление $i^*i_*\mathcal{O}_E$ в прямую сумму задаётся с помощью морфизма коединицы $i^*i_*\mathcal{O}_E\to\mathcal{O}_E$. Проследить за изоморфизмом можно, но несколько занудно, а записать это рассуждение хоть сколько-нибудь детально, причём чтобы это можно было потом прочитать, кажется почти невозможно.

Мы хотим доказать, что i_*p^* строго полный, то есть что это отображение является изоморфизмом и для произвольного $A\in D(Z)$. Пусть $\mathcal{O}_X(H)$ — обильное линейное расслоение на X. Тогда его ограничение на Z тоже обильно. Из пятой лекции мы знаем, что для $N\gg 0$ тогда объект

$$G_Z := j^*\left(\bigoplus_{n=0}^{N}\mathcal{O}_X(nH)\right)\cong\bigoplus_{n=0}^{N} j^*\mathcal{O}_X(nH)\in D(Z)$$

является классическим генератором в $D(Z)$, при этом лежащим в образе ограничения $j^*: D(X)\to D(Z)$. Подставив в лемму 10.4.2 в качестве объектов $A=B=G_Z$, получаем, что функтор $i_*p^*: D(Z)\to D(Y)$ строго полон. Поскольку у этого функтора есть оба сопряжённых, он задаёт вложение допустимой подкатегории $D(Z)\hookrightarrow D(Y)$. Функторы $i_*p^*(-)\otimes\mathcal{O}_Y(kE)$ для разных $k\in\mathbb{Z}$ отличаются от i_*p^* на подкрутку, то есть на автоэквивалентность $D(Y)$, поэтому тоже задают вложения допустимых подкатегорий.

<u>Шаг 2</u>: докажем теперь полуортогональность последовательности допустимых подкатегорий. Полуортогональность подкатегории $\pi^*D(X)$ и подкатегорий вида $i_*p^*D(Z)\otimes\mathcal{O}_Y(kh)$ для $k\in[-(c-1);-1]$ получается из сопряжённости функторов π_* и π^*:

$$\begin{aligned}
&R\mathrm{Hom}(\pi^*A, i_*p^*B\otimes\mathcal{O}_Y(kh))\cong R\mathrm{Hom}_X(A, \pi_*(i_*p^*B\otimes\mathcal{O}_Y(kh)))\cong \\
&\qquad\cong R\mathrm{Hom}_X(A, j_*p_*(p^*B\otimes\mathcal{O}_E(kh)))\cong R\mathrm{Hom}_X(A, j_*(B\otimes p_*\mathcal{O}_E(kh))).
\end{aligned}$$

Для всех k между $-(c-1)$ и -1 производный прямой образ $p_*\mathcal{O}_E(kh)$ равен нулю по теореме о плоской замене базы (мы это вычисляли в ходе доказательства теоремы 10.1.2), поэтому полуортогональность для таких пар подкатегорий доказана.

Нужно ещё доказать, что подкатегории $i_*p^*D(Z)\otimes\mathcal{O}_Y(kh)$ и $i_*p^*D(Z)\otimes\mathcal{O}_Y(k'h)$ полуортогональны, где $k'>k$ из интервала от $-(c-1)$ до -1. Подкрутив всё на $\mathcal{O}_Y(-kh)$, видим, что достаточно показать, что для любых объектов A, B из $D(Z)$ градуированное пространство

$$R\mathrm{Hom}_Y(i_*p^*A, i_*p^*B \otimes \mathcal{O}_Y(lh))$$

равно нулю при $l = k - k'$ от -1 до $-(c-2)$. Аналогично первому шагу, если предположить сначала, что A изоморфно объекту вида j^*A_X для некоторого $A_X \in D(X)$, то в результате цепочки изоморфизмов получаем

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}_Y(i_*p^*j^*A_X, i_*p^*B \otimes \mathcal{O}_Y(lh) \cong R\mathrm{Hom}_E(p^*j^*A_X, p^*B \otimes \mathcal{O}_E(-lE)) \oplus \\ \oplus R\mathrm{Hom}_E(p^*j^*A_X, p^*B \otimes \mathcal{O}_E((1-l)E)[1]). \end{aligned} \tag{2}$$

Для l из интервала от -1 до $-(c-2)$ оба линейных расслоения $\mathcal{O}_E(-lE)$ и $\mathcal{O}_E((1-l)E)$ являются послойно ацикличными, потому что ограничение $\mathcal{O}_E(E)$ на слой $\mathbb{P}^{c-1}$ это $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1)$. Значит, по теореме о плоской замене базы их производные прямые образы при проекции $p : E \to Z$ равны нулю. Тогда оба слагаемых в формуле (2) равны нулю, то есть полуортогональность выполняется по крайней мере для таких пар объектов $A, B \in D(Z)$, где A изоморфно j^*A_X для некоторого $A_X \in D(X)$. В прошлом шаге мы доказали, что в $D(Z)$ существует классический генератор G_Z, лежащий в образе функтора $j^* : D(X) \to D(Z)$. Рассуждая в духе леммы 10.4.2, нетрудно доказать, что из этого следует полуортогональность для произвольного объекта $A \in D(Z) = \langle G_Z \rangle$.

Шаг 3. В двух первых шагах мы проверили, что указанный в формулировке теоремы 10.2.1 набор подкатегорий — это полуортогональная последовательность допустимых подкатегорий в $D(Y)$. Назовём порождённую ими совместно подкатегорию $\mathcal{A} \subset D(Y)$. Она допустима, поэтому для доказательства теоремы осталось убедиться, что ортогонал ${}^\perp\mathcal{A}$ равен нулю.

Аналогично доказательству теоремы 10.1.2, мы покажем, что ограничение произвольного объекта $R \in {}^\perp\mathcal{A}$ на каждый слой морфизма $\pi : Y \to X$ равно нулю.

Если $x \in X$ — точка, не лежащая в подмногообразии $Z \subset X$, то производный обратный образ $\pi^*\mathcal{O}_x$ пучка-небоскрёба — это пучок-небоскрёб в точке $\pi^{-1}(x)$. Подкатегория $\mathcal{A}$ по определению содержит подкатегорию $\pi^*D(X) \subset D(Y)$, поэтому пучок $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}$ лежит в $\mathcal{A}$. Тогда любой объект $E \in {}^\perp\mathcal{A}$ удовлетворяет

$$R\mathrm{Hom}_Y\Big(R, \mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}\Big) \cong R\mathrm{Hom}_Y(R, \pi^*\mathcal{O}_x) = 0$$

по полуортогональности. Значит, ограничение объекта R на любую точку из подмножества $\pi^{-1}(X \setminus Z) \subset Y$ равно нулю. В частности, (теоретико-множественный) носитель каждого объекта $R \in {}^\perp\mathcal{A}$ содержится в $E \subset Y$.

Осталось понять, что происходит в слоях раздутия $\pi : Y \to X$ над точками $Z \subset X$. Выберем какую-нибудь точку $z \in Z$ и обозначим вложение слоя $\pi^{-1}(z) \simeq \mathbb{P}^{c-1}$ над ней через $f : F \hookrightarrow Y$. В категории $\mathcal{A}$ по определению содержатся объекты $i_*p^*\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_Y(kh)$ для k от $-(c-1)$ до -1, а так же объект $\pi^*\mathcal{O}_z$. Заметим, что из плоскости морфизма p следует, что производный обратный образ $p^*\mathcal{O}_z \in D(E)$ это структурный пучок $\mathcal{O}_F$ слоя $F \subset E$, и тогда по формуле проекции

$$i_*p^*\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_Y(kh) \cong i_*(\mathcal{O}_F \otimes i^*\mathcal{O}_Y(kh)) \cong \mathcal{O}_F(k)$$

содержится в $\mathcal{A}$ для любого k от $-(c-1)$ до -1. Чтобы завершить доказательство аналогично теореме 10.1.2, то есть показать, что в $\mathcal{A}$ содержится прямой образ какого-нибудь классического генератора из категории $D(F)$, нам достаточно будет ещё одной подкрутки — например, просто структурный пучок $\mathcal{O}_F$, соответствующий $k = 0$. В следующем шаге мы покажем, что $\mathcal{O}_F$ лежит в $\mathcal{A}$.

Шаг 4. В $\mathcal{A}$ по определению содержится объект $\pi^*\mathcal{O}_z$, про который мы доказали утверждение 10.3.6: его нулевой пучок когомологий это $\mathcal{O}_F$, а для $m > 0$ его $(-m)$'тый пучок когомологий изоморфен $f_*\Omega^m_F(m)$. С помощью этого факта мы ниже выведем, что структурный пучок $\mathcal{O}_F$ тоже лежит в $\mathcal{A}$. Для этого достаточно показать, что для всех $m > 0$ пучок $f_*\Omega^m_F(m)$ лежит в $\mathcal{A}$ (упражнение: если объект $P \in D(Y)$ лежит в триангулированной подкатегории $\mathcal{A} \subset D(Y)$ и все его пучки когомологий, кроме одного, тоже лежат в $\mathcal{A}$, то и оставшийся пучок когомологий тоже принадлежит $\mathcal{A}$.)

В этом курсе мы уже несколько раз использовали факт, что на проективном пространстве $F \simeq \mathbb{P}^{c-1}$ у расслоения $\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$ при $m > 0$ нет никаких когомологий. Иными словами, $\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$ лежит в подкатегории $\mathcal{O}^{\perp}_{\mathbb{P}^{c-1}} \subset D(\mathbb{P}^{c-1})$. У проективного пространства существует исключительный набор Бейлинсона

$$D(\mathbb{P}^{c-1}) = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-(c-1)), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}} \rangle,$$

поэтому ортогонал к структурному пучку в $D(\mathbb{P}^{c-1})$ имеет явное описание как подкатегория, порождённая $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(k)$ для k от $-(c-1)$ до -1. В частности мы доказали, что при любом $m > 0$ выполняется

$$\Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m) \in \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-(c-1)), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1) \rangle \subset D(\mathbb{P}^{c-1}).$$

Из этого следует, что пучок $f_* \Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$ лежит в подкатегории $D(E)$, порождённной прямыми образами

$$f_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-(c-1)) \cong \mathcal{O}_F(-(c-1)), \quad ..., \quad f_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-1) \cong \mathcal{O}_F(-1),$$

каждый из которых, как мы доказали выше, лежит в $\mathcal{A}$. Следовательно, при любом $m > 0$ пучок $f_* \Omega^m_{\mathbb{P}^{c-1}}(m)$ лежит в $\mathcal{A}$. Значит, приведённый в начале этого шага аргумент показывает, что пучок $\mathcal{O}_F$ тоже лежит в $\mathcal{A}$.

Шаг 5. Теперь мы можем завершить доказательство полноты, то есть того, что ${}^{\perp}\mathcal{A} = 0$. Мы уже знаем, что носитель любого объекта $R \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ содержится в E. Пусть $z \in Z$ — какая-нибудь точка, а $f : F \hookrightarrow Y$ — слой раздутия $\pi : Y \to X$ над ней. В третьем и четвёртом шаге мы показали, что объекты

$$\mathcal{O}_F(-(c-1)), ..., \mathcal{O}_F(-1), \mathcal{O}_F$$

лежат в подкатегории $\mathcal{A} \subset D(Y)$. Их прямая сумма — это прямой образ относительно вложения $f : F \hookrightarrow Y$ классического генератора $\bigoplus_{m=0}^{c-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-m)$ производной категории когерентных пучков на $F \simeq \mathbb{P}^{c-1}$. Тогда из полуортогональности

$$R\mathrm{Hom}_Y\left(R, \bigoplus_{m=0}^{c-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(-m)\right) = 0$$

следует, что производное ограничение R на слой F равно нулю. Значит, носитель R не содержит никаких точек из F. Однако слой F был выбран произвольно. Поэтому носитель любого объекта $R \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ пуст. Но тогда в ${}^{\perp}\mathcal{A}$ не содержится никаких объектов, кроме нулевого, что мы и хотели доказать. □

Замечание: То, что функтор $i_* p^*$ является строго полным, можно доказать напрямую, без использования генераторов и леммы 10.4.2. Для этого нужно знать, как устроена композиция функторов $i^* i_*(-) : D(E) \to D(E)$ для вложения дивизора $i : E \hookrightarrow Y$. Это не тот порядок, в котором можно применить формулу проекции, но ответ всё равно существует. Его можно найти в [2, Cor. 11.4], а альтернативное доказательство строгой полноты, использующее это описание — в [2, Prop. 11.18].

Упражнение 10.4.3: В доказательстве утверждения 10.3.6 мы показали, что объект $\pi^* \mathcal{O}_z$ после применения производного прямого образа вдоль замкнутого вложения $k : Y \hookrightarrow T$ распадается в прямую сумму пучков когомологий. Докажите, что сам объект $\pi^* \mathcal{O}_z \in D(Y)$ до взятия прямого образа не является изоморфным прямой сумме своих пучков когомологий. (*Указание*: используйте полуортогональность с подкатегорией $i_* p^* D(Z) \otimes \mathcal{O}_Y(-(c-1)h)$.)

Библиография

[1] Д. Орлов, «Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков», *Изв. РАН. Сер. матем.*, т. 56, вып. 4, сс. 852–862, 1992, [Онлайн]. Доступно на: http://mi.mathnet.ru/im929

[2] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. в Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, с. viii+307.

[3] A. Kuznetsov, «Base change for semiorthogonal decompositions», *Compos. Math.*, т. 147, вып. 3, сс. 852–876, 2011.

[4] K. E. Iverson, «Notation as a tool of thought», *Comm. ACM*, т. 23, вып. 8, сс. 444–465, 1980.