2. Свойства производных категорий.

2.1. Морфизмы в производной категории

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, как в прошлой лекции. В прошлый раз мы обсудили понятия гомотопической категории комплексов $K(\mathcal{A})$ и производной категории $D(\mathcal{A})$. Тогда речь шла про произвольные комплексы, но в сегодняшней лекции нам понадобятся обозначения для некоторых специальных классов комплексов.

Определение 2.1.1: Объект $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$ в производной категории называется:
- *ограниченным снизу*, если для всех $i \ll 0$ когомологии $H^i(A^\bullet)$ равны нулю;
- *ограниченным сверху*, если для всех $i \gg 0$ когомологии $H^i(A^\bullet)$ равны нулю;
- *ограниченным*, если только для конечного числа $i \in \mathbb{Z}$ когомологии $H^i(A^\bullet)$ ненулевые ($\Leftrightarrow$ он ограничен и сверху, и снизу).

Подкатегории таких комплексов в $D(\mathcal{A})$ обозначаются $D^+(\mathcal{A})$, $D^-(\mathcal{A})$ и $D^b(\mathcal{A})$, соответственно. Аналогичные обозначения используются и для таким же образом определённых подкатегорий в $K(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$.

Обратите внимание, что даже в категории $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ ограниченным снизу называют комплекс, который в достаточно отрицательных степенях *точен*, а не такой, который в достаточно отрицательных степенях состоит из нулевых объектов.

Лемма 2.1.2: Пусть $I^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ — ограниченный снизу комплекс, состоящий из инъективных объектов в $\mathcal{A}$, а $A^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ — произвольный ограниченный снизу комплекс. Тогда для морфизмов из $A^\bullet$ в $I^\bullet$ в производной категории верно следующее равенство

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \quad \left(\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)/\sim\right)$$

Доказательство: Полное доказательство см., например, в [1, Lem. 2.39]. Идея: если домик $A^\bullet \overset{\mathrm{qis}}{\leftarrow} C^\bullet \overset{f}{\rightarrow} I^\bullet$ представляет какой-то морфизм в $D(\mathcal{A})$, то из свойств инъективных объектов и ограниченности всех комплексов снизу можно вывести, что отображение абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(C^\bullet, I^\bullet)$$

является изоморфизмом. Следовательно, данный нам домик можно «сплющить», спустив отображение $f : C^\bullet \to I^\bullet$ до отображения комплексов напрямую из $A^\bullet$. □

Лемма 2.1.3: Если в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов, то для любого комплекса $A^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ существует квазиизоморфизм $A^\bullet \to I^\bullet$ в комплекс $I^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$, состоящий из инъективных объектов. Кроме того, если когомологии $A^\bullet$ нулевые во всех степенях, меньших некоторого $i \in \mathbb{Z}$, то комплекс $I^\bullet$ тоже можно выбрать нулевым в степенях, меньших, чем i.

Доказательство: Доказывать не будем. Получается по индукции, идея изложена в [1, Prop. 2.35], подробности есть, например, в [2, Лекция 4, Часть 3]. □

Вывод: группы морфизмов в $D^+(\mathcal{A})$ теоретически можно вычислять, используя инъективные резольвенты. Для неограниченных комплексов какие попало резольвенты комплексами из инъективных объектов брать нельзя (ответ будет неправильный), но можно брать специальным образом устроенные, и этого достаточно для тех производных категорий, которые мы будем рассматривать («K-инъективные комплексы» Спалтенштейна [3] более понятный ответ с помощью гомотопических (ко)пределов есть в [4]).

Следствие 2.1.4: Пусть $A, B \in \mathcal{A}$ — два объекта. Если в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов, то $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, B[i]) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B)$.

Доказательство: Это следует из классического определения функтора Ext в абелевой категории: заменить B на инъективную резольвенту, посчитать отображения почленно. □

Из нерассказанного на лекции: Приведём пример морфизма выделенных треугольников, который нельзя дополнить до 3×3-диаграммы. Рассмотрим в производной категории абелевых групп $D(\mathrm{Ab})$ выделенный треугольник

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[1]$$

и его сдвиг из аксиомы **TR2**:

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}[1]$$

Для любого $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ следующая диаграмма коммутативна: средний квадрат коммутирует, потому что $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$, а правый квадрат — потому, что $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ является группой n-кручения:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}[1] \\
\big\downarrow 0 & & \big\downarrow 0 & & \big\downarrow \xi & & \big\downarrow 0 \\
\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1] & \xrightarrow{\cdot\, n} & \mathbb{Z}[1]
\end{array}$$

Упражнение: докажите, что если $\xi \neq 0$, то из конусов вертикальных стрелок нельзя никаким образом построить выделенный треугольник в $D(\mathrm{Ab})$.

Мы рассмотрим и некоторые другие случаи, когда морфизмы в $D(\mathcal{A})$ устроены просто. Сперва пара лемм.

Лемма 2.1.5: Пусть морфизм $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ комплексов в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ таков, что каждое отображение $f^i : A^i \to B^i$ инъективно. Тогда $\mathrm{Cone}(f^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{qis}} \mathrm{Coker}(f^\bullet)$.

Доказательство: Упражнение. □

Определение 2.1.6: Пусть $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ — комплекс, $i \in \mathbb{Z}$ целое число. Тогда обозначим через $\tau_{\leq i}(A^\bullet)$ подкомплекс, чьё вложение в $A^\bullet$ изображено в диаграмме:

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker(d_i : A^i \to A^{i+1}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r] & A^i \arrow[r] & A^{i+1} \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

Назовём коядро этого вложения $\tau_{>i}(A^\bullet)$. Тогда верно следующее:
- при $j \leq i$ имеем $H^j(\tau_{\leq i}(A^\bullet)) = H^j(A^\bullet)$, а при $j > i$ получается $H^j(\tau_{\leq i}(A^\bullet)) = 0$.
- аналогичные равенства верны для $\tau_{>i}(A^\bullet)$.
- в производной категории $D(\mathcal{A})$ существует выделенный треугольник

$$\tau_{\leq i}(A^\bullet) \to A^\bullet \to \tau_{>i}(A^\bullet) \to \tau_{\leq i}(A^\bullet)[1] \tag{1}$$

- если комплекс $B^\bullet$ квазиизоморфен $A^\bullet$, то треугольники обрезания для $A^\bullet$ и $B^\bullet$ изоморфны в категории $D(\mathcal{A})$. Иными словами, треугольник (1) корректно определён и для объекта $A^\bullet$ из производной категории.

Бывают ещё «тупые» (stupid) обрезания, но они, в отличие от «умных» (обычно называемых «каноническими») выше, зависят от выбора конкретного комплекса $A^\bullet$, а не только от класса с точностью до квазиизоморфизма.

С помощью обрезаний комплексов мы можем продемонстрировать несколько случаев, в которых можно вычислить группу морфизмов в производной категории без необходимости разбираться с «домиками» или с выбором инъективной резольвенты.

Лемма 2.1.7: Пусть у комплекса $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ когомологии сосредоточены в степенях $(-\infty, 0]$, а у комплекса $B^\bullet$ — в степенях $[1, \infty)$. Тогда $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) = 0$.

Доказательство: Можно заменить $B^\bullet$ на квазиизоморфный комплекс $\tau_{>0}(B^\bullet)$, который сам по себе сосредоточен в степенях $[1, \infty)$: поскольку отображение $B^\bullet \to \tau_{>0}(B^\bullet)$ является квазиизоморфизмом, в производной категории эти два комплекса представляют изоморфные объекты, и в частности

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, \tau_{>0}(B^\bullet)).$$

Аналогично можно заменить $A^\bullet$ на $\tau_{\leq 0}(A^\bullet)$.

Затем заменим $\tau_{>0}(B^\bullet)$ на инъективную резольвенту $I^\bullet$ — по лемме 2.1.3 это возможно, причём можно выбрать комплекс $I^\bullet$ так, что ненулевые объекты в нём тоже только в степенях $[1, \infty)$. Тогда получаем

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(\tau_{\leq 0}(A^\bullet), I^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) = 0,$$

где второй изоморфизм получается по лемме 2.1.2, а равенство нулю приходит просто из соображений того, что между комплексами $\tau_{\leq 0}(A^\bullet)$ и $I^\bullet$ вообще нет ненулевых морфизмов в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$, а значит, по определению категории $K(\mathcal{A})$, и в гомотопической категории комплексов тоже. $\square$

Упражнение 2.1.8: Пусть $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ — комплекс, у которого только один объект когомологий ненулевой, $H^i(A^\bullet) \simeq A \in \mathcal{A}$. Докажите, что в производной категории $D(\mathcal{A})$ объект $A^\bullet$ квазиизоморфен объекту $A[-i]$. (*Указание*: рассмотрите сначала обрезание $A^\bullet$ в степенях $(-\infty, i]$, а затем обрезание полученного комплекса в степенях $[i, \infty)$.)

Лемма 2.1.9: Пусть у комплекса $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ когомологии сосредоточены в степенях $(-\infty, 0]$, а у комплекс $B^\bullet$ — в степенях $[0, \infty)$. Тогда существует изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0(A^\bullet), H^0(B^\bullet)).$$

Доказательство: Рассмотрим для $B^\bullet$ треугольник обрезания:

$$\tau_{\leq 0}(B^\bullet) \to B^\bullet \to \tau_{>0}(B^\bullet).$$

Заметим, что поскольку у комплекса $\tau_{\leq 0}(B^\bullet)$ когомологии только в степени 0, упражнение 2.1.8 утверждает, что в $D(\mathcal{A})$ этот объект изоморфен просто $H^0(B^\bullet)$, рассмотренному как тривиальный комплекс. Применим к этому треугольнику функтор $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, -)$. Получится точная последовательность

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, \tau_{>0}(B^\bullet)[-1]) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, H^0(B^\bullet)) \to \\ \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, \tau_{>0}(B^\bullet))\end{gathered} \tag{2}$$

Поскольку комплексы $\tau_{>0}(B^\bullet)$ и тем более $\tau_{>0}(B^\bullet)[-1]$ сосредоточены в степенях $[1, \infty)$, по лемме 2.1.7 первая и последняя абелевы группы в (2) равны нулю. Следовательно, отображение

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, H^0(B^\bullet)) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet)$$

является изоморфизмом. Дальше нужно рассмотреть треугольник обрезания для $A^\bullet$, воспользоваться изоморфизмом $\tau_{>-1}(A^\bullet) \simeq H^0(A^\bullet)$ из упражнения 2.1.8, и аналогичным образом получить равенство

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(H^0(A^\bullet), H^0(B^\bullet)).$$

Отображения между объектами из $\mathcal{A}$ в самой абелевой категории и отображения между ними в $D(\mathcal{A})$ совпадают, например, по лемме 2.1.2. $\square$

Как вообще устроены морфизмы между объектами в производной категории в терминах их объектов когомологий из $\mathcal{A}$? Сперва рассмотрим вырожденный случай: пусть комплекс $A^\bullet \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ квазиизоморфен прямой сумме своих когомологий, то есть в производной категории существует изоморфизм $A^\bullet \simeq \oplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i(A^\bullet)[-i]$. Это случается редко, обычно объекты в производной категории не такие (ниже, в разделе 2.2, мы обсудим это подробнее). Предположим дополнительно, что $A^\bullet$ лежит в $D^b(\mathcal{A})$, то есть только конечное число когомологий $A^\bullet$ нетривиально. И пусть комплекс $B^\bullet$ тоже такой же. Тогда из следствия 2.1.4 для каждого $m \in \mathbb{Z}$ получается изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^m_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) \simeq \bigoplus_{p+q=m} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^{m+p}_{\mathcal{A}}(H^i(A^\bullet), H^{i-p}(B^\bullet)).$$

Для произвольных объектов производной категории эта формула не годится, полученную прямую сумму нужно «поправить»: а именно, существует спектральная последовательность, начинающаяся с этой прямой суммы, и заканчивающаяся правильным ответом. Строго говоря, нам не понадобится в курсе от этой последовательности ничего, кроме того, что можно аналогично лемме 2.1.9 вывести из треугольников обрезания, но для полноты картины сформулируем утверждение.

Теорема 2.1.10 ([5, (3.1.3)]): Пусть $A^\bullet, B^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$ — два объекта. Предположим, что $\mathcal{A}$ — категория конечной гомологической размерности, имеющая достаточно много инъективных объектов. Тогда существует спектральная последовательность

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^{2p+q}(H^i(A^\bullet), H^{i-p}(B^\bullet)), \qquad d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1},$$

которая сходится к $\operatorname{Ext}_{D(\mathcal{A})}^{p+q}(A^\bullet, B^\bullet)$.

Замечание: Напомним, что условие конечной гомологической размерности здесь означает, что существует $m_0 \in \mathbb{Z}$, при котором для любых двух объектов $A, A' \in \mathcal{A}$ и для любого $m \geq m_0$ выполняется $\operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^m(A, A') = 0$. Поскольку мы предположили, что оба объекта лежат в ограниченной производной категории, это гарантирует, что на первом листе спектральной последовательности лишь конечное число ненулевых клеток. Это условие выполнено, например, в категории когерентных пучков на гладком многообразии (и гомологическая размерность категории равна размерности самого многообразия).

Замечание: Во многих источниках, например, в книге Хёйбрехтса [1], эту спектральную последовательность для морфизмов в производной категории формулируют и используют только при условии, что либо $A^\bullet$, либо $B^\bullet$ сосредоточены в одной градуировке. Эти частные случаи получаются из стандартных подходов к спектральным последовательностям, а для построения спектралки в общем случае нужно немного повозиться с категорией фильтрованных комплексов и т.п.

Упражнение 2.1.11: Передокажите утверждения лемм 2.1.7 и 2.1.9 с помощью спектральной последовательности из теоремы 2.1.10. (Это упражнение по пониманию того, что значат индексы в прямой сумме, написанной в теореме, и того, куда бьют дифференциалы.)

Выпишем в явном виде два простых следствия из существования этой спектральной последовательности. Оба этих следствия можно получить, много раз используя треугольники обрезания и длинные точные последовательности как в лемме 2.1.9, но раз уж у нас есть спектральная последовательность, то можно не возиться.

Следствие 2.1.12: Пусть в условиях теоремы 2.1.10 для какого-то $m \in \mathbb{Z}$ верно, что для всех разложений $p + q = m$ получается $E_1^{p,q} = 0$. Тогда $\operatorname{Ext}_{D(\mathcal{A})}^m(A^\bullet, B^\bullet) = 0$.

Следствие 2.1.13: Пусть в условиях теоремы 2.1.10 для какой-то пары $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ верно, что
- $E_1^{p,q} \neq 0$;
- Если $(p', q') \in \mathbb{Z}^2$ такие два числа, что $p' > p$ или $q' > q$, то $E_1^{p',q'} = 0$.

Тогда $\operatorname{Ext}_{D(\mathcal{A})}^m(A^\bullet, B^\bullet) \simeq E_1^{p,q}$.

2.2. Устройство объекта производной категории

В предыдущем разделе мы обсуждали, как можно понимать морфизмы между объектами в производной категории в терминах абелевой категории $\mathcal{A}$, с которой мы начинали. Поговорим немного про то, как можно проанализировать структуру объекта $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$. Если вникать в детали определения производной категории, то объект там по построению был просто комплексом объектов из $\mathcal{A}$. Такой ответ полезен в доказательствах фундаментальных свойств производной категории, но с категорной точки зрения правильнее думать не об отдельном объекте, а о его классе изоморфизма. Как можно описать класс изоморфизма объекта $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$?

Во-первых, у каждого объекта производной категории канонически определены его объекты когомологий $H^i(A^\bullet)$. Поскольку когомологии сохраняются при квазиизоморфизмах, эти объекты корректно определены (более точно, каждый изоморфизм $A^\bullet \simeq B^\bullet$ в $D(\mathcal{A})$ канонически индуцирует изоморфизм объектов когомологий).

Набор объектов когомологий не определяет однозначно с точностью до изоморфизма объект в производной категории. Например, есть такие более тонкие инварианты:

Определение 2.2.1: Пусть $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$ — объект, а $i \in \mathbb{Z}$ — целое число. Обозначим через $\tau_{i,i-1}(A^\bullet)$ композицию обрезаний $\tau_{\geq i-1}(\tau_{<i+1}(A^\bullet))$. Это комплекс, у которого все объекты когомологий, кроме i'тых и $(i-1)$-ых, равны нулю. Рассмотрим для него треугольник обрезания на часть с i-тыми и часть с $(i-1)$'ыми когомологиями. По упражнению 2.1.8 получится выделенный треугольник

$$H^{i-1}(A^\bullet)[-(i-1)] \to \tau_{i,i-1}(A^\bullet) \to H^i(A^\bullet)[-i] \to H^{i-1}(A^\bullet)[-(i-1)+1].$$

Последняя стрелка задаёт по следствию 2.1.4 класс $\xi_i \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(H^i(A^\bullet), H^{i-1}(A^\bullet))$. Его можно назвать *$i$-тым склеивающим классом объекта* $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$.

Замечание: Это нестандартное название. Есть ли для этих классов какой-то стандартный термин — я не знаю (ни по-русски, ни по-английски).

Упражнение 2.2.2: Пусть $A^\bullet$ — комплекс, в котором все дифференциалы нулевые. Проверьте, что все склеивающие классы $\xi_{A,i}$ равны нулю.

Упражнение 2.2.3: Пусть $f_\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ — квазиизоморфизм комплексов. Проверьте, что при индуцированных изоморфизмах $H^i(f) : H^i(A^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^i(B^\bullet)$ и $H^{i-1}(f) : H^{i-1}(A^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^{i-1}(B^\bullet))$ склеивающий класс $\xi_{A,i} \in \mathrm{Ext}^2(H^i(A^\bullet), H^{i-1}(A^\bullet))$ переходит в аналогичным образом определённый класс для $B^\bullet$. Выведите из этого, что склеивающие классы корректно определены для объекта производной категории. (Это упражнение про то, как устроены треугольники обрезания.)

Замечание: Склеивающие классы описывают дифференциалы на первом листе спектральной последовательности из теоремы 2.1.10. Пусть есть отображение

$$H^i(A^\bullet) \xrightarrow{f} H^j(B^\bullet)[n]$$

в производной категории, соответствующее какому-то классу в прямой сумме Ext'ов из клетки на первом листе спектральной последовательности. Тогда при помощи склеивающих классов для $A^\bullet$ и $B^\bullet$ можно получить два отображения:

$$H^{i+1}(A^\bullet)[-2] \xrightarrow{\xi_{A,i+1}} H^i(A^\bullet) \xrightarrow{f} H^j(B^\bullet)[n] \quad \text{и} \quad H^i(A^\bullet) \xrightarrow{f} H^j(B^\bullet)[n] \xrightarrow{\xi_{B,j}} H^{j-1}(B^\bullet)[n+2]$$

Эти два класса в Ext'а, сложенные с какими-то знаками, и равны $d_1(f)$.

Итак, каждый объект $A^\bullet \in D(\mathcal{A})$ канонически определяет:
- набор объектов когомологий $\{H^i(A^\bullet) \in \mathcal{A}\}_{i \in \mathbb{Z}}$;
- набор склеивающих классов $\{\xi_i \in \mathrm{Ext}^2(H^i(A^\bullet), H^{i-1}(A^\bullet))\}_{i \in \mathbb{Z}}$

Эти данные, вообще говоря, не определяют объект с точностью до изоморфизма. Бывают, например, объекты в производной категории, у которых только два объекта когомологий ненулевые, они не соседние, а объект всё равно нетривиален.

Упражнение 2.2.4: Пусть $A, B \in \mathcal{A}$ — два объекта абелевой категории, а $\varphi \in \mathrm{Ext}^m_{\mathcal{A}}(A, B)$ — ненулевой класс для какого-нибудь $m > 1$. Рассмотрим конус $C^\bullet$ морфизма

$$A[-1] \xrightarrow{\varphi} B[m-1]$$

в производной категории (см. следствие 2.1.4).

- Докажите, что $H^0(C^\bullet) \cong A$ и $H^{-(m-1)}(C^\bullet) \cong B$, а остальные когомологии нулевые.
- Докажите, что если $\varphi \neq 0$, то $C^\bullet$ не изоморфен прямой сумме $A[0] \oplus B[m-1]$. (*Указание*: для строгого доказательства удобнее всего обобщить определение 2.2.1. Если предположить, что в категории $\mathcal{A}$ все Ext'ы конечномерны, то можно доказать более приземлённым методом — рассмотреть длинную точную последовательность Ext'ов из A в выделенный треугольник из морфизма φ и его конуса.)
- Если $m = 2$, проверьте, что $\xi_{C^\bullet,0}$ равно φ. Если $m > 2$, проверьте, что все склеивающие классы объекта $C^\bullet$ равны нулю.

В случаях, когда гомологическая размерность у категории $\mathcal{A}$ маленькая, указанных нами инвариантов достаточно, чтобы описать классы изоморфизма объектов в производной категории $D(\mathcal{A})$. Например, если гомологическая размерность равна нулю или единице, то любой объект в производной категории получается прямой суммой сдвигов объектов из $\mathcal{A}$:

Лемма 2.2.5: Пусть $\mathcal{A}$ — категория гомологической размерности ≤ 1, то есть для всех $m > 1$ и любых пар объектов $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ абелева группа $\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ нулевая. Тогда любой объект $A^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$ изоморфен в производной категории прямой сумме своих объектов когомологий со сдвигами:

$$A^\bullet \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(A^\bullet)[-i]$$

Доказательство: Докажем по индукции по числу ненулевых объектов когомологий у $A^\bullet$. Если только при одном $i \in \mathbb{Z}$ объект $H^i(A^\bullet)$ не равен нулю, то всё доказано в упражнении 2.1.8. Иначе пусть $i \in \mathbb{Z}$ — наибольшее, для которого $H^i(A^\bullet) \neq 0$. Рассмотрим треугольник обрезания:

$$\tau_{\leq i-1}(A^\bullet) \to A^\bullet \to H^i(A^\bullet)[-i] \xrightarrow{\varphi} \tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1] \tag{3}$$

По предположению индукции объект $\tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1]$ в производной категории изоморфен прямой сумме сдвигов объектов из $\mathcal{A}$, и все эти объекты находятся в степенях не больших, чем $i-2$ (не забудьте о сдвиге на $[1]$!). Поэтому морфизм φ по следствию 2.1.4 лежит в абелевой группе

$$\bigoplus_{j \leq i-2} \mathrm{Ext}^{i-j}_{\mathcal{A}}(H^i(A^\bullet), H^j(A^\bullet)).$$

По предположению гомологической размерности 1 каждая из этих Ext-групп равна нулю. Значит, морфизм φ нулевой. В силу треугольника (3) комплекс $A^\bullet$ изоморфен сдвигу на $[-1]$ конуса морфизма φ, но для нулевого морфизма мы знаем, что

$$\mathrm{Cone}\Big(H^i(A^\bullet)[-i] \xrightarrow{0} \tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1]\Big) \cong (H^i(A^\bullet)[-i] \oplus \tau_{\leq i-1}(A^\bullet))[1].$$

А это мы и хотели доказать. □

Та часть доказательства, где объясняется, почему морфизм φ нулевой, на самом деле не требует предположения индукции. Это частный случай такого наблюдения:

Упражнение 2.2.6: Пусть $\mathcal{A}$ — категория гомологической размерности $\leq n$. Пусть $A^\bullet, B^\bullet \in D^b(\mathcal{A})$ — два объекта, и предположим, что когомологии $A^\bullet$ сосредоточены в степенях $[0, \infty)$, а когомологии $B^\bullet$ сосредоточены в степенях $(-\infty, -(n+1)]$. Докажите, что тогда $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) = 0$. (*Указание*: можно по индукции с треугольниками обрезания, а можно подставить всё в спектральную последовательность из теоремы 2.1.10.)

Для категорий гомологической размерности 2 тоже получается понятная классификация:

Лемма 2.2.7: Пусть $\mathcal{A}$ — категория гомологической размерности 2. Любой объект $A^\bullet$ в ограниченной производной категории $D^b(\mathcal{A})$ однозначно с точностью до изоморфизма определяется такими данными:
- набор объектов $\{F^i := H^i(A^\bullet)\}_{i\in\mathbb{Z}}$, из которых только конечное число не равно нулю;
- набор склеивающих классов $\xi_i \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(F^i, F^{i-1})$.

Из нерассказанного на лекции:

Доказательство: Как в лемме 2.2.5, доказываем по индукции. Пусть $i \in \mathbb{Z}$ наибольшее число, для которого $H^i(A^\bullet) \neq 0$. Рассмотрим треугольник обрезания

$$\tau_{\leq i-1}(A^\bullet) \to A^\bullet \to H^i(A^\bullet)[-i] \xrightarrow{\varphi} \tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1]$$

Для доказательства шага индукции достаточно доказать, что морфизм φ однозначно определяется склеивающим классом ξ_i, который по определению получается композицией φ с ещё одним обрезанием

$$\tau_{\leq i-1}(A^\bullet) \xrightarrow{\psi} \tau_{>i-2}(\tau_{\leq i-1}(A^\bullet)) \simeq H^{i-1}(A^\bullet)[-(i-1)].$$

Продолжим эту стрелку до выделенного треугольника и посмотрим на длинную точную последовательность, получаемую из него применением функтора $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(H^i(A^\bullet), -)$. Используя упражнение 2.2.6, получаем, что отображение

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(H^i(A^\bullet)[-i], \tau_{\leq i-1}(A^\bullet)[1]) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}, (H^i(A^\bullet)[-i], H^{i-1}(A^\bullet)[-(i-1)+1])$$

является изоморфизмом. □

2.3. Производные функторы

Как устроены функторы между производными категориями? Начнём с простого замечания:

Лемма 2.3.1: Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный функтор между абелевыми категориями. Тогда он задаёт функтор $F : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$, определяемый почленным применением F к комплексам.

Доказательство: Поскольку F — точный, легко проверить, что если отображение комплексов $f : A^\bullet \to B^\bullet$ — квазиизоморфизм, то $F(f) : F(A^\bullet) \to F(B^\bullet)$ — тоже квазиизоморфизм. Ещё проще доказать, что если два отображения $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ гомотопны, то $F(f)$ и $F(g)$ тоже гомотопны. Значит, функтор F спускается сначала с категории $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ на гомотопическую категорию $K(\mathcal{A})$, а затем и на производную $D(\mathcal{A})$. □

Точных функторов между абелевыми категориями довольно мало, особенно в алгебраической геометрии. Нас будут интересовать, например, прямые и обратные образы пучков при морфизмах многообразий: как известно, для $f : X \to Y$ функтор прямого образа $f_* : \mathrm{QCoh}(X) \to \mathrm{QCoh}(Y)$ точен только слева, а функтор обратного образа $f^* : \mathrm{QCoh}(Y) \to \mathrm{QCoh}(X)$ точен только справа. Оказывается, что и для таких функторов удаётся определить соответствующие им функторы между производными категориями.

Теорема 2.3.2: Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный слева функтор между абелевыми категориями. Предположим, что в $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов. Тогда существует *правый производный функтор* $RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$, удовлетворяющий следующим свойствам:
- RF является точным функтором между триангулированными категориями.
- Для любого $A^\bullet \in D^{\geq 0}(\mathcal{A})$ результат применения $RF(A^\bullet)$ лежит в $D^{\geq 0}(\mathcal{B})$.
- Для объекта $A \in \mathcal{A}$ нулевой объект когомологий $H^0(RF(A)) \in \mathcal{B}$ изоморфен $F(B)$.

Доказательство: (не то что бы доказательство…) Для объекта $A^\bullet \in D^+(\mathcal{A})$ определим $RF(A^\bullet)$ следующим образом: выберем для $A^\bullet$ инъективную резольвенту, то есть комплекс $I^\bullet \in \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$, состоящий из инъективных объектов, с квазиизоморфизмом $A^\bullet \to I^\bullet$. Это возможно по лемме 2.1.3. Тогда значением функтора $RF(A^\bullet)$ будет почленное применение $F(I^\bullet)$ функтора F к комплексу $I^\bullet$. Проверку свойств такого определения, в частности его корректность (не зависит от выбора инъективной резольвенты, функториально и т.п.), мы обсуждать не будем, а поверим, что всё работает. Условие про точность в триангулированном смысле морально является следствием леммы о змее. Если интересны подробности — см. [2, Лекция 10] или книгу [6]. □

Замечание: Собственно, ради утверждений в таком духе и создавалось определение производной категории: с помощью производных категорий можно удобно «упаковать» всю информацию о не-точности функтора F в производный функтор RF, согласованный с триангулированной структурой.

Естественно, аналогичное утверждение верно и про левые производные функторы для точных справа функторов и ограниченных сверху категорий $D^-(-)$ — при условии, что в $\mathcal{A}$ имеется достаточно много проективных объектов. Но для нас это серьёзная проблема. В категории квазикогерентных пучков на алгебраическом многообразии всегда достаточно много инъективных объектов, а вот проективных обычно вообще нет. А как же нам изучать производные категории когерентных пучков, если непонятно, что делать, скажем, с функтором обратного образа относительно морфизма многообразий? К счастью, гомологическая алгебра умеет справляться и с такими ситуациями.

Проективные резольвенты годятся для того, чтобы вычислять левый производный функтор от любого точного справа функтора. Но для каждого отдельного функтора F можно использовать резольвенты из более широкого класса объектов, так называемых «F-приспособленных» («F-adapted») объектов. Для нужных нам геометрических функторов — тензорного произведения в производной категории и пулбэка относительно морфизма многообразий — в качестве приспособленных объектов можно брать плоские пучки, в частности векторные расслоения. Плоских пучков достаточно много, чтобы писать все нужные резольвенты. На практике всякий раз, когда нам нужно будет посчитать значение функтора пулбэка или вычислить тензорное произведение объектов производной категории когерентных пучков на многообразии, мы будем выбирать резольвенту из векторных расслоений и применять непроизводный функтор почленно.

Библиография

[1] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry.* в Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, с. viii+307.

[2] А. Кузнецов, «Записки лекций по гомологической алгебре». [Онлайн]. Доступно на: https://homepage.mi-ras.ru/~akuznet/homalg/index-homalg.htm

[3] N. Spaltenstein, «Resolutions of unbounded complexes», *Compositio Math.*, т. 65, вып. 2, сс. 121–154, 1988.

[4] M. Bökstedt и A. Neeman, «Homotopy limits in triangulated categories», *Compositio Math.*, т. 86, вып. 2, сс. 209–234, 1993.

[5] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein, и P. Deligne, «Faisceaux pervers», *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, т. 100. в Astérisque, vol. 100. Soc. Math. France, Paris, сс. 5–171, 1982 г.

[6] С. Гельфанд и Ю. Манин, *Гомологическая алгебра*, т. 38. в Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., vol. 38. ВИНИТИ, 1989.