3. Двойственность Серра. Теорема Бондала–Орлова.

В конце прошлой лекции мы обсудили, как точные хотя бы с одной стороны функторы между абелевыми категориями индуцируют точные в триангулированном смысле функторы между производными категориями (при некоторых технических условиях). Обсудим сначала немного специфику производных категорий, возникающих в алгебраической геометрии.

3.1. $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ и $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$

Во-первых, производные категории бывают разные. Кроме вариантов с ограниченностью комплексов (D^b, D^+, D^-) есть более существенные отличия. Пусть X — гладкое проективное многообразие. В категории квазикогерентных пучков $\mathrm{QCoh}(X)$ достаточно много инъективных объектов, а вот в категории *когерентных* пучков $\mathrm{Coh}(X)$ — нет, потому что инъективные объекты, как правило, очень большие. Поэтому, формально говоря, не очень понятно, как определять производные функторы между производными категориями именно *когерентных* пучков. Введём такое обозначение:

Определение 3.1.1: Категорией $D_{\mathrm{coh}}(X)$ называется полная подкатегория в $D(\mathrm{QCoh}(X))$, состоящая из тех комплексов, чьи объекты когомологий являются когерентными пучками.

Легко проверить, что это триангулированная подкатегория, и что существует естественный точный функтор $D(\mathrm{Coh}(X)) \to D_{\mathrm{coh}}(X)$, являющийся «производным» функтором от точного функтора вложения категорий $\mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{QCoh}(X)$. Если вместо $D(\mathrm{Coh}(X))$ рассматривать $D_{\mathrm{coh}}(X)$, то фундаментальная сложность с определением производного функтора пропадает. Но тут есть тонкость.

Теорема 3.1.2 (см., например, [1, Prop. 3.3.5]): Для любой нётеровой схемы X функтор $D^b(\mathrm{Coh}(X)) \to D_{\mathrm{coh}}(X)$ является эквивалентностью, то есть $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ вкладывается как полная подкатегория в $D^b(\mathrm{QCoh}(X))$.

В нашем курсе все схемы будут гладкими проективными многообразиями, поэтому нётеровость не накладывает никаких дополнительных условий. Но вообще при работе с «маленькими» категориями вроде $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ иногда приходится опасаться подвохов со стороны гомологической алгебры.

Замечание: Поясним на примере, в чём содержательное препятствие к тому, чтобы $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ всегда было эквивалентно $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. На первой лекции мы упоминали, что вне зависимости от наличия инъективных объектов в категории $\mathrm{Coh}(X)$ для двух когерентных пучков $F, G \in \mathrm{Coh}(X)$ абелева группа

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{Coh}(X))}(F, G[i])$$

изоморфна определённому по Ионеде $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Coh}(X)}(F, G)$, то есть классифицирует точные последовательности вида

$$0 \to G \to G_1 \to \ldots \to G_i \to F \to 0 \tag{1}$$

в $\mathrm{Coh}(X)$ с точностью до некоторого отношения эквивалентности. А если же рассмотреть $\mathrm{Hom}_{D_{\mathrm{coh}}}(F, G[i])$, что по определению совпадает с Hom в категории $D(\mathrm{QCoh}(X))$, то эта группа классифицирует последовательности вида (1), где промежуточные объекты $G_1, \ldots, G_i$ могут быть квазикогерентными пучками. Если схема X — нётерова, то из того, что F и G когерентны, следует, что любая последовательность (1) с квазикогерентными (то есть «слишком большими») промежуточными пучками будет эквивалентна аналогичной последовательности, где все $G_1, ..., G_i$ уже когерентны, а без нётеровости «урезать» последовательность не всегда возможно.

Замечание: Для некоторых утверждений технически правильно рассматривать не только $D_{\mathrm{coh}}(X)$ вместо $D(\mathrm{Coh}(X))$, а даже и вместо $D(\mathrm{QCoh}(X))$ брать подкатегорию в производной категории пучков $\mathcal{O}_X$-модулей абелевых групп, состоящую из комплексов, чьи объекты когомологий будут квазикогерентны. Это нужно, например, для построения производных функторов между неограниченными производными категориями. В нашей ситуации эти две категории тоже эквивалентны.

3.2. Геометрические производные функторы

Пусть $f : X \to Y$ — отображение многообразий. Тогда, как мы обсудили в прошлой лекции, для «больших» категорий $D(\mathrm{QCoh}(X))$ и $D(\mathrm{QCoh}(Y))$ определены производные функторы прямого Rf_* и обратного Lf^* образа. Выпишем несколько условий, когда производные функторы существуют и между «маленькими» категория $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ и $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$. Доказывать их мы не будем.

Лемма 3.2.1: Пусть $f : X \to Y$ — отображение многообразий.
- Если Y — гладкое многообразие, то функтор $Lf^* : D(\mathrm{QCoh}(Y) \to D(\mathrm{QCoh}(X)))$ ограничивается до функтора $D^b_{\mathrm{coh}}(Y) \to D^b_{\mathrm{coh}}(X)$.
- Если морфизм f собственный, то функтор $Rf_* : D(\mathrm{QCoh}(X)) \to D(\mathrm{QCoh}(Y))$ ограничивается до функтора $D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$.
- Функтор Lf^* является левым сопряжённым к функтору Rf_*, как между большими категориями, так и между маленькими.

Бывает удобно обозначать через $R^i f_*(-)$ объект когомологий $H^i(Rf_*(-)) \in \mathrm{Coh}(X)$ и аналогично для обратного образа.

Ещё есть несколько функторов, связанных с производной категорией одного и того же многообразия. Обозначим через $R\Gamma(X, -)$ функтор прямого образа относительно морфизма в точку $X \to \{*\}$. Это производный функтор от функтора глобальных сечений пучка. Поскольку глобальные сечения пучка $\mathcal{F}$ это то же самое, что его нулевые когомологии, естественно, что $R\Gamma(X, \mathcal{F})$ это когомологии пучка. Поскольку $R\Gamma$ можно вычислять на любом объекте производной категории, то называть его функтором когомологий двусмысленно, потому что путается просто с объектами когомологий у комплекса. Поэтому этот функтор часто называют функтором *гиперкогомологий*.

Заметим, что $D(\mathrm{QCoh}(\{*\}))$ это производная категория векторных пространств, которая по лемме о гомологической размерности из прошлой лекции эквивалентна просто категории градуированных векторных пространств. а $D^b_{\mathrm{coh}}(\{*\})$ — это категория конечномерных градуированных векторных пространств (т.е., только конечное число градуировок не равно нулю, и все они конечномерны). Будем называть эти две категории $D(\mathrm{Vect})$ и $D^b(\mathrm{vect})$.

Кроме производных функторов в том смысле, что мы говорили, существует вариант для производных функторов от двух аргументов. По сути ничего нового не происходит (надо заменить хотя бы один из аргументов на подходящую резольвенту и применить обычный функтор в $\mathrm{QCoh}(X)$ или $\mathrm{Com}(\mathrm{QCoh}(X))$). Вот некоторые из нужных нам в дальнейшем функторов.

Лемма 3.2.2: Пусть X — многообразие.
- Существует *производный* Hom-*функтор*:

$$R\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{QCoh}(X))}(-,-) : D(\mathrm{QCoh}(X)) \times D(\mathrm{QCoh}(X)) \to D(\mathrm{Vect}).$$

  На паре объектов $F, G \in D(\mathrm{QCoh}(X))$ его значение — это градуированное векторное пространство $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(F, G[i])$. Если X гладкое и собственное, то $R\mathrm{Hom}$ ограничивается до функтора $D^b_{\mathrm{coh}}(X) \times D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b(\mathrm{vect})$.

- Если X — гладкое, то существует *производное тензорное произведение* $-\otimes^L - : D^b_{\mathrm{coh}}(X) \times D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(X)$.
- Если X — гладкое, то существует *внутренний производный* Hom: $R\underline{\mathrm{Hom}}(-,-) : D^b_{\mathrm{coh}}(X) \times D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, с такими свойством:
  - $R\Gamma(R\underline{\mathrm{Hom}}(F,G)) \cong R\mathrm{Hom}(F,G)$;
  - $R\underline{\mathrm{Hom}}(F,G) \cong R\underline{\mathrm{Hom}}(F,\mathcal{O}_X) \otimes^L G$;

В ходе курса появится ещё пара важных функторов. Одному из них посвящён следующий раздел.

ВАЖНОЕ СОГЛАШЕНИЕ: поскольку этот курс посвящён производным категориям, по умолчанию все функторы будут предполагаться производными! В частности, под f^* всегда мы имеем в виду производный обратный образ, производное тензорное произведение обозначаем просто $-\otimes-$ и т.п. Если нам нужно будет в какой-то момент говорить, скажем, о не-производном прямом образе для какого-нибудь когерентного пучка, то будем явно писать $R^0 f_*(\mathcal{F})$.

3.3. Двойственность Серра на уровне производных категорий

Поздравляю всех, кто добрался до этого раздела: крэш-курс по гомологической алгебре, нужной для производных категорий как таковых, на этом заканчивается. Дальше нам будет важно, что мы работает именно с многообразиями и когерентными пучками на них. Соответственно, в формулировках и доказательствах будет появляться больше алгебраической геометрии.

Первым делом вспомним про двойственность Серра. Пусть X — гладкое проективное многообразие размерности n. Тогда обозначим через ω_X его каноническое линейное расслоение, то есть Ω^n_X. Классическая двойственность Серра говорит, что если E — векторное расслоение на X, то для любого $i \in \mathbb{Z}$ верна двойственность

$$H^i(X,E) \cong H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee.$$

Оказывается, что если вместо когомологий рассматривать функтор гиперкогомологий, а под двойственностью $(-)^\vee$ в левой части равенства понимать производный внутренний Hom в структурный пучок, то есть $R\underline{\mathrm{Hom}}(-,\mathcal{O}_X)$, то ровно та же самая формула верна и для объектов в производной категории. Часто полезнее более «симметричная» формулировка:

Теорема 3.3.1: Пусть X — гладкое проективное многообразие. Для любых двух объектов $E, F \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ существует функториальный по обоим аргументам изоморфизм градуированных векторных пространств:

$$R\mathrm{Hom}_{D^b_{\mathrm{coh}}(X)}(E,F) \cong R\mathrm{Hom}_{D^b_{\mathrm{coh}}(X)}(F, E \otimes \omega_X[n])^\vee.$$

Напомним, что для градуированных векторных пространств переход к двойственному означает не только замену градуированных компонент на двойственные, но и перенумерацию: i -тая компонента меняется местами с $(-i)$-той. Исходная формулировка получается, если взять в качестве E тут структурный пучок (тогда $R\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X,-) \cong R\Gamma(X,-)$ по определению, а i-тые когомологии это как раз группа i-тых когомологий комплекса $R\Gamma(X,-)$).

Такой феномен двойственности в триангулированных категориях встречается чаще, чем можно было бы подумать. Во второй части курса, когда мы будем обсуждать полуортогональные разложения, это нам пригодится. Бондал и Капранов ввели такое определение:

Определение 3.3.2 ([2]): Пусть T — триангулированная категория, в которой все Hom'ы конечномерны. *Функтором Серра* категории T называется эндофунктор $S_T : T \to T$ с заданным, функториальным по произвольной паре объектов $E, F \in T$, изоморфизмом

$$\mathrm{Hom}^\bullet_T(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet_T(F, S_T(E))^\vee.$$

Функтор Серра, если он существует у категории T, однозначно (с точностью до изоморфизма) определён структурой самой категории. В качестве иллюстрации: для объекта $E \in T$ значение функтора Серра $S_T(E)$ можно определить, как представляющий объект для функтора

$$F \mapsto \mathrm{Hom}_T(E,F)^\vee.$$

По лемме Ионеды представляющий объект по функтору восстанавливается однозначно, если функтор вообще представим. А в статье [2] показывается, что если все такие функторы представимы, то функтор Серра существует и однозначно определён.

То, что функтор Серра однозначно определяется структурой самой категории, можно более строго выразить следующим образом: любая эквивалентность триангулированных категорий коммутирует с функтором Серра.

Лемма 3.3.3 *(см., например, [1, Lem. 1.30])*: Пусть $\Phi : T \to T'$ — эквивалентность триангулированных категорий, обладающих функторами Серра S_T и $S_{T'}$, соответственно. Тогда существует изоморфизм функторов

$$\Phi \circ S_T \cong S_{T'} \circ \Phi.$$

Доказательство: Достаточно показать, что композиция $\Phi \circ S_T \circ \Phi^{-1}$ удовлетворяет свойствам функтора Серра на T'. Это следует из определения функтора Серра и того, что Φ — эквивалентность категорий (в частности, является строго полным функтором). Тогда нужное утверждение следует из единственности функтора Серра на триангулированной категории. □

3.4. Теорема Бондала–Орлова о реконструкции многообразия

На первой лекции упоминалось, что иногда для разных многообразий производные категории эквивалентны: например, Мукаи доказал, что у абелева многообразия A и его двойственного абелева многообразия $A^\vee$. Такие пары многообразий называются *партнёрами Фурье–Мукаи* (при чём тут Фурье, спросите вы? Это мы обсудим в следующей лекции). Это, в принципе, не беда: в алгебраической геометрии сплошь и рядом встречаются инварианты алгебраических многообразий, которые иногда совпадают (группа Пикара, структуры Ходжа и т.д.). Однако для широкого класса многообразий триангулированная категория $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ однозначно определяет многообразие X. И всё благодаря понятию функтора Серра! Бондал и Орлов доказали в 2001 году такую теорему:

Теорема 3.4.1 ([3]): Пусть X — гладкое проективное многообразие, у которого каноническое линейное расслоение ω_X обильно или антиобильно. Если Y — гладкое собственное многообразие, для которого существует эквивалентность $\Phi : D^b_{\mathrm{coh}}(X) \simeq D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ триангулированных категорий, то Y изоморфно X.

Замечание: Напомним, что в теореме Мукаи эквивалентность производных категорий была для двух абелевых многообразий, а у них канонический класс тривиален, т.е., ровно «посередине» между обильным и антиобильным. Многообразия с антиобильным каноническим классом называются многообразиями Фано, а многообразия с обильным каноническим классом — многообразиями общего типа.

Замечание: Абелева категория $\mathrm{QCoh}(X)$ (или же $\mathrm{Coh}(X)$, доказательство одинаковое) всегда однозначно определяет схему X: это доказал Габриэль в [4] для нётеровых схем, а затем обобщали разные люди. Если интересно, рекомендую статью [5], где эта теорема понятно и аккуратно выводится напрямую из определения схемы и когерентного пучка.

Замечание: Если кроме триангулированной структуры на $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ знать ещё и тензорное произведение $D^b_{\mathrm{coh}}(X) \times D^b_{\mathrm{coh}}(X) \to D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, то, как и с абелевыми категориями, никаких условий на X не нужно, чтобы однозначно его восстановить [6].

Это теорема важна с философской точки зрения, но на практике, конечно, она не используется: обычно если удаётся доказать эквивалентность производных категорий, то уж про то, изоморфны ли многообразия или нет, точно всё понятно и без всякой теоремы. Но утверждение, конечно, красивое.

Я расскажу доказательство из оригинальной статьи, с небольшими купюрами. План такой:
1. С помощью функтора Серра можно описать множество объектов в $D(X)$, которые являются пучками-небоскрёбами в точках X. Из этого выводится, что функтор Φ задаёт биекцию между множеством пучков-небоскрёбов на X и множеством пучков-небоскрёбов на Y.
2. По множеству пучков-небоскрёбов однозначно в категорных терминах описывается множество линейных расслоений. Следовательно, функтор Φ задаёт биекцию между множеством линейных расслоений на X и множество линейных расслоений на Y.
3. По множеству пучков-небоскрёбов, множеству линейных расслоений и операции «подкрутка на линейное расслоение L» на них можно узнать очень много свойств расслоения L (глобальные сечения, обильность и т.п.). Поскольку ω_X и ω_Y имеют «одинаковые свойства» (мы уточним в ходе доказательства, что имеется в виду), и одно из них обильно, то и второе тоже. Из этого вместе с предыдущими шагами следует изоморфизм X и Y.

3.5. Как найти пучки-небоскрёбы

Нам понадобится понятие носителя объекта производной категории. Напомним, что носителем когерентного пучка на многообразии называется множество точек, в которых его слой ненулевой. Это всегда замкнутое множество, и оно пустое тогда и только тогда, когда когерентный пучок нулевой.

Определение 3.5.1: Пусть X — многообразие, $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — объект производной категории. Тогда (теоретико-множественным) *носителем* E называется объединение

$$\mathrm{supp}(E) := \cup_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{supp}(H^i(E))$$

носителей пучков когомологий E.

Упражнение 3.5.2 (простое): Докажите, что для любого $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ носитель $\mathrm{supp}(E)$ — замкнутое множество, и оно пусто тогда и только тогда, когда E — нулевой объект в производной категории.

Докажем сперва такую лемму. В ней X любое, не обязательно с условием из теоремы, то есть канонический класс может быть каким угодно.

Лемма 3.5.3: Пусть X — гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{L}$ — обильное линейное расслоение на нём. Пусть $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ это объект. Следующие условия эквивалентны:
- существует изоморфизм $E \otimes \mathcal{L} \simeq E$
- носитель E имеет размерность ноль.

Доказательство: Поскольку подкрутка на $\mathcal{L}$ — точный функтор, достаточно доказать это утверждение для E, являющегося когерентным пучком. Если $\dim(\mathrm{supp}(E)) \geq 1$, то найдётся гладкая кривая C с нетривиальным (следовательно, конечным) отображением $f : C \to X$ так, что $E_C := f^*E$ имеет полный носитель; тогда $E_C/\operatorname{Tors}(E_C)$ это векторное расслоение $\mathcal{E}$ ненулевого ранга на C. По предположению мы знаем, что $\mathcal{E}$ изоморфно подкрутке $\mathcal{E}\otimes f^*\mathcal{L}$, где $f^*\mathcal{L}$ — обильное расслоение, в частности имеет положительную степень. Но при подкрутке меняется степень:

$$\deg(\mathcal{E}\otimes f^*\mathcal{L}) = \deg(\mathcal{E}) + \deg(f^*\mathcal{L})\cdot \operatorname{rk}(\mathcal{E}) > \deg(\mathcal{E}).$$

Так быть не может, значит, $\dim(\operatorname{supp}(E)) = 0$. □

Среди объектов с нульмерным носителем легко отличить самые простые — те, которые с точностью до сдвига в производной категории изоморфны просто пучку-небоскрёбу в какой-то точке. Это можно делать разными способами, мы будем следовать формулировке из статьи Бондала–Орлова.

Лемма 3.5.4: Пусть X — гладкое проективное многообразие, а $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — объект с нульмерным носителем. Тогда следующие условия эквивалентны:
- $\operatorname{Ext}^{\leq 0}(E,E) \simeq \mathbb{C}[0]$ (т.е. нет отрицательных экстов, а Hom в себя одномерен).
- $E \simeq \mathcal{O}_p[m]$ для некоторой точки $p \in X$ и числа $m \in \mathbb{Z}$.

Доказательство: Заметим сначала, что для двух когерентных пучков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с нульмерным носителем можно показать (упражнение по коммутативной алгебре), что $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) = 0$ тогда и только тогда, когда их носители не пересекаются; а эндоморфизмы $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_1)$ одномерны тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_1$ является пучком-небоскрёбом в какой-то точке. Поскольку каждый пучок когомологий объекта E имеет нульмерный носитель, из спектральной последовательности для $\operatorname{Ext}^\bullet(E,E)$ и этого факта легко выводится утверждение леммы.

Можно, конечно, доказать и по индукции с треугольниками обрезания. Ключевой аргумент такой: предположим, что для какой-то точки $p \in X$ более одного пучка когомологий объекта E имеет нетривиальный носитель в p. Пусть тогда i — наибольшее, а j — наименьшее целое число, такое, что $p \in \operatorname{supp}(H^i(E))$ или $H^j(E)$, соответственно. Отображение $\tau_{\leq i}(E) \to H^i(E)[-i]$ из треугольника обрезания поднимается до отображения $E \to H^i(E)[-i]$ (докажите!). Аналогично можно построить и отображение $H^j(E)[-j] \to E$, которое задаёт изоморфизм на j-тых пучках когомологий. По наблюдению о когерентных пучках тогда существует нетривиальный морфизм $f : H^i(E) \to H^j(E)$, с помощью которого можно построить композицию

$$E[i] \to H^i(E) \xrightarrow{f} H^j(E) \to E[j],$$

задающую класс в $\operatorname{Ext}^{j-i}(E,E)$, который не равен нулю, поскольку отображение нетривиально действует на нулевых когомологиях. Однако $j-i$ по предположению это отрицательное число. Получили противоречие, следовательно, каждая точка p из носителя E содержится в носителе ровно одного пучка когомологий. Остальные аспекты доказательства оставляем в качестве упражнения. □

Из двух этих лемм в условиях теоремы 3.4.1 получается найти все пучки-небоскрёбы в категории $D(X)$, не используя ничего, кроме триангулированной структуры на этой категории.

Следствие 3.5.5: Пусть T — триангулированная категория с функтором Серра S_T. Предположим, что существует эквивалентность $\Psi : T \to D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ триангулированных категорий, где X — какое-то гладкое проективное многообразие, у которого канонический класс ω_X обилен или антиобилен. Тогда следующие условия на объект $E \in T$ эквивалентны:
- для какого-то $m \in \mathbb{Z}$ существует изоморфизм $E \simeq S_T(E)[m]$, и при этом $\operatorname{Ext}^{\leq 0}_T(E,E) \simeq \mathbb{C}[0]$;
- объект $\Psi(E) \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ является сдвигом пучка-небоскрёба $\mathcal{O}_x$ для точки $x \in X$ на какое-то число $m' \in \mathbb{Z}$.

Доказательство: Из второго условия первое следует по очевидным причинам. Докажем, что из первого следует второе. В категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ функтор Серра, как мы знаем из теоремы 3.3.1, это подкрутка на (анти)обильное линейное расслоение ω_X плюс сдвиг на размерность X. По лемме 3.5.3 из этого следует, что у объекта $\Psi(E) \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ нульмерный носитель (тут сперва надо понять, что происходит со сдвигом в производной категории, но это я оставляю читателю). По лемме 3.5.4 этот объект ещё и является сдвигом пучка-небоскрёба, что мы и хотели доказать. □

Замечание: Отметим, что число m из формулировки обязательно равно размерности многообразия X.

Так мы нашли все пучки-небоскрёбы в $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. Что происходит для $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$? С ними можно разобраться с помощью красивого и простого соображения.

Утверждение 3.5.6: В условиях теоремы 3.4.1 функтор Φ индуцирует биекцию между множеством пучков-небоскрёбов в точках X с точностью до сдвига в производной категории и множеством пучков-небоскрёбов в точках Y с точностью до сдвига. Кроме того, $\dim(X) = \dim(Y)$.

Доказательство: Пусть $y \in Y$ — какая-то точка. Легко проверить, что пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_y$, как объект в производной категории Y, удовлетворяет всем условиям следствия 3.5.5. Значит, $\Phi^{-1}(\mathcal{O}_y)$ изоморфен с точностью до сдвига пучку-небоскрёбу в какой-то точке $x \in X$. При этом из замечания после следствия мы видим, что размерность Y равна размерности X.

Предположим теперь, что для какой-то точки $x \in X$ объект $\Phi(\mathcal{O}_x) \in D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ не является сдвигом никакого пучка-небоскрёба в Y. Рассмотрим тогда отображения между $\Phi(\mathcal{O}_x)$ и $\mathcal{O}_y$ для произвольной точки $y \in Y$:

$$\mathrm{Hom}^\bullet\big(\Phi(\mathcal{O}_x), \mathcal{O}_y\big) \cong \mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathcal{O}_x, \Phi^{-1}(\mathcal{O}_y)\big).$$

Мы уже доказали, что $\Phi^{-1}(\mathcal{O}_y)$ является, с точностью до сдвига, пучком-небоскрёбом в какой-то точке $x' \in X$. При этом $x' \neq x$, потому что $\Phi(\mathcal{O}_x)$ по предположению не изоморфно сдвигам пучков-небоскрёбов. Следовательно,

$$\mathrm{Hom}^\bullet\big(\mathcal{O}_x, \Phi^{-1}(\mathcal{O}_y)\big) \cong \mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_{x'}) = 0.$$

Однако этот аргумент работает для любой точки $y \in Y$. Значит, $\Phi(\mathcal{O}_x) \in D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ это объект, не допускающий отображений ни в какой сдвиг никакого пучка-небоскрёба из Y. А так не может быть: если $i \in \mathbb{Z}$ — наибольший индекс, для которого i-тый пучок когомологий объекта $\Phi(\mathcal{O}_x)$ ненулевой, а $y \in Y$ — какая-нибудь точка из носителя пучка $H^i(\Phi(\mathcal{O}_x))$, то по одной из лемм из прошлой лекции существует нетривиальное отображение $\Phi(\mathcal{O}_x) \to \mathcal{O}_y[-i]$. Это противоречие, следовательно любой пучок-небоскрёб на X переходит, с точностью до сдвига, в пучок-небоскрёб на Y, что мы и хотели доказать. □

3.6. От небоскрёбов к линейным расслоениям

Благодаря утверждению 3.5.6 мы теперь знаем, что Φ задаёт биекцию между точками многообразия X и точками многообразия Y. Это уже очень сильное утверждение, и на самом деле является самой сложной частью доказательства. Следующий шаг — описать в терминах пучков-небоскрёбов все линейные (а на самом деле — даже все векторные) расслоения на X и Y.

Утверждение 3.6.1: Пусть X — гладкое проективное многообразие, а $E \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — какой-нибудь объект. Предположим, что для всех точек $p \in X$ градуированное векторное пространство $\mathrm{Ext}^\bullet\big(E, \mathcal{O}_p\big)$ сосредоточено только в какой-то одной степени, т.е. для каждой точки $p \in X$ существует число $m_p \in \mathbb{Z}$ такое, что $\mathrm{Ext}^i\big(E, \mathcal{O}_p\big) = 0$ при всех $i \neq m_p$. Тогда:

- все числа m_p равны одному и тому же числу m;
- объект E изоморфен $\mathcal{E}[m]$, где $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на X;
- ранг расслоения $\mathcal{E}$ равен $\dim \mathrm{Ext}^m\big(E, \mathcal{O}_p\big)$ для произвольной точки $p \in X$.

Доказательство: Пусть $j \in \mathbb{Z}$ — наибольшее целое число, при котором $H^j(E) \neq 0$. Если $p \in \operatorname{supp}(H^j(E))$, то по лемме из прошлой лекции мы знаем, что

$$\operatorname{Hom}(E, \mathcal{O}_p[-j]) \simeq \operatorname{Hom}(H^j(E), \mathcal{O}_p[-j]) \neq 0$$

С помощью треугольника обрезания

$$\tau_{\leq j-1}(E) \to E \to H^j(E)[-j]$$

несложно доказать, что кроме изоморфизма выше верно ещё и вложение

$$\operatorname{Ext}^1(H^j(E), \mathcal{O}_p) \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{O}_p[-j]). \tag{2}$$

По предположениям леммы градуированное пространство $\operatorname{Hom}^\bullet(E, \mathcal{O}_p[-j])$ нетривиально только в одной градуировке, то есть из того, что $\operatorname{Hom}(E, \mathcal{O}_p[-j]) \neq 0$, следует, что $\operatorname{Ext}^1(E, \mathcal{O}_p[-j]) = 0$. Из инъективности отображения (2) следует, что тогда $\operatorname{Ext}^1(H^j(E), \mathcal{O}_p) = 0$ для всех точек $p \in \operatorname{supp}(H^j(E))$.

Из этого уже всё следует при помощи классического утверждения из коммутативной алгебры: *локальный критерий плоскости* утверждает, что если R — нётерово локальное кольцо, M — конечно-порождённый модуль над ним, то следующие свойства эквивалентны:
- M — свободный модуль над R;
- M — плоский модуль над R;
- $\operatorname{Tor}_1^R(M, R/\mathfrak{m}) = 0$;
- $\operatorname{Ext}_R^1(M, R/\mathfrak{m}) = 0$.

Замечание: Эквивалентность первых трёх условий следует из леммы Накаямы, доказательство можно найти в учебниках по коммутативной алгебре ([7, Гл. 7, Упр. 15] или, например, в [8, 00MK]); третье и четвёртое оба вычисляются при помощи свободной резольвенты для M. (На мой вкус самый удобный способ про это думать — помнить, что над локальными нётеровыми кольцами у конечно-порождённых модулей существуют *минимальные резольвенты*, т.е. такие свободные резольвенты, что каждый дифференциал равен нулю по модулю максимального идеала. В этом случае обращение $\operatorname{Ext}^1(M, R/\mathfrak{m})$ в ноль означает, что минимальная резольвента имеет длину ноль, то есть модуль M — свободный.)

По локальному критерию плоскости когерентный пучок $H^j(E)$ становится свободным модулем над локальным кольцом любой точки из своего носителя, ну а уж вне носителя пучок нулевой и тем самым тоже свободный. Значит, пучок $H^j(E)$ — локально свободный над X, то есть является векторным расслоением. Для завершения доказательства осталось проверить, что у объекта E, удовлетворяющего условиям утверждения, в таком случае не может быть нетривиальных пучков когомологий, кроме j-той. Эту проверку мы оставляем читателю. (*Указание*: рассмотрите треугольник обрезания для E и применяйте функторы $\operatorname{Hom}^\bullet(-, \mathcal{O}_p)$.) Число m из формулировки утверждения равно j. □

Следствие 3.6.2: В условиях теоремы 3.4.1 функтор Φ задаёт биекцию между множествами:
- векторных расслоений на X как объектов в $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, с точностью до сдвига; и
- векторных расслоений на Y как объектов в $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$, с точностью до сдвига,

причём эта биекция сохраняет ранги векторных расслоений.

Доказательство: По утверждению 3.5.6 мы знаем, что Φ индуцирует биекцию между множествами пучков-небоскрёбов с точностью до сдвига в категориях $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ и $D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$. В формулировке утверждения 3.6.1 неважно, берём ли мы пучок-небоскрёб или какой-то его сдвиг, поэтому из этого утверждения следует, что множества векторных расслоений с точностью до сдвига определяются по структуре триангулированной категории и по множеству пучков-небоскрёбов. □

3.7. Финал доказательства

По следствию 3.6.2 мы знаем, что $\Phi(\mathcal{O}_X) \in D^b_{\mathrm{coh}}(Y)$ изоморфно $L[m]$, для какого-то линейного расслоения L на Y и какого-то $m \in \mathbb{Z}$. Заменив Φ на композицию $[-m] \circ \Phi$, можно считать, что Φ переводит $\mathcal{O}_X$ в линейное расслоение, размещённое в степени ноль.

Упражнение 3.7.1: Докажите, что если $\Phi(\mathcal{O}_X) \simeq L$ для линейного расслоения L на Y, то тогда Φ от любого пучка-небоскрёба на X является пучком-небоскрёбом на Y (без сдвига в производной категории) и Φ от любого расслоения на X является расслоением на Y (тоже без сдвига).

Согласно этому упражнению можно считать, что Φ переводит линейные расслоения на X в линейные расслоения на Y, причём по лемме 3.3.3 мы знаем, что эта биекция $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(Y)$ коммутирует с операцией подкрутки на канонический класс.

Лемма 3.7.2: В условиях теоремы 3.4.1 для каждого $m \in \mathbb{Z}$ функтор Φ индуцирует изоморфизм векторных пространств

$$H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}),$$

согласованный с операциями умножения $H^0(\omega^{\otimes m_1}) \otimes H^0(\omega^{\otimes m_2}) \to H^0(\omega^{\otimes m_1 + m_2})$ слева и справа.

Доказательство: Выберем какое-нибудь линейное расслоение L на X и обозначим через $M \simeq \Phi(L)$ соответствующее линейное расслоение на Y. По утверждению 3.5.6 мы знаем, что размерности X и Y равны (и однозначно определяются по триангулированной структуре категории). Обозначим через $\tilde{S}_X$ и $\tilde{S}_Y$ функторы подкруток на ω_X и ω_Y, соответственно; поскольку функтор Φ коммутирует с функторами Серра, он коммутирует и с этими двумя функторами тоже. Следовательно,

$$H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \cong \mathrm{Hom}_X\big(L, \tilde{S}_X^m(L)\big) \cong \mathrm{Hom}_Y\Big(M, \tilde{S}_Y^m(M)\Big) \cong H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}),$$

где первый и третий изоморфизм получаются из того, что подкрутка на линейное расслоение — строго точный функтор, а второй — из того, что Φ — эквивалентность категорий, коммутирующая с функторами Серра. Поскольку умножение сечений соответствует применению функторов $\tilde{S}_X$ и $\tilde{S}_Y$ несколько раз, изоморфизм по построению согласован с этой операцией. $\square$

Замечание: Отметим, что утверждение верно и для отрицательных степеней $m \in \mathbb{Z}$, просто надо брать обратный функтор к функтору Серра.

Предположим, что в условиях теоремы ω_X — обильное линейное расслоение на X. В дальнейшем случай обильности от антиобильности ничем по сути не отличается, поэтому мы обсудим только такой случай. Тогда по определению верно, что $X \simeq \mathrm{Proj}(\oplus_{m \geq 0} H^0(X, \omega_X^{\otimes m}))$. Если бы мы знали ещё, что и у Y каноническая линейная система обильна, то из леммы 3.7.2 следовал бы искомый изоморфизм X и Y. Осталось каким-нибудь образом вывести, полагаясь на многочисленные доказанные нами свойства функтора Φ, что обильность ω_X влечёт обильность ω_Y. В оригинальной статье Бондала и Орлова это делается таким способом.

Во-первых, они замечают, что имея в какой-нибудь категории множество пучков-небоскрёбов и множество линейных расслоений, можно определить топологию Зариского: если $f : L_1 \to L_2$ это какое-нибудь отображение между линейными расслоениями, то значение f в замкнутой точке $p \in X$ не равно нулю тогда и только тогда, когда отображение

$$\mathrm{Hom}\big(L_2, \mathcal{O}_p\big) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}\big(L_1, \mathcal{O}_p\big)$$

является изоморфизмом. Значит, можно определить подмножество пучков-небоскрёбов на точках открытого множества, где $f \neq 0$. Легко проверить, что на (квази)проективном многообразии открытые множества такого вида задают базу топологии Зариского (в ограничении на множество замкнутых точек, что при работе над $\mathbb{C}$ достаточно хорошо). Благодаря утверждениям 3.5.6 и 3.6.2 из этого следует, что функтор Φ не просто задаёт биекцию на множестве (замкнутых) точек X и Y, а задаёт гомеоморфизм топологий Зариского.

Во-вторых, существует топологический критерий обильности: если для получения базы топологии Зариского вышеописанной процедурой достаточно зафиксировать какие-то два линейных расслоения L_1 и L_2 и варьировать только отображение между ними, то линейное расслоение $L_1^\vee \otimes L_2$ обильно (в статье ссылка на SGA, но можно доказать и самостоятельно, это интересное упражнение). Тогда для доказательства обильности ω_Y достаточно взять любое линейное расслоение L в качестве L_1, а в качестве L_2 взять $\tilde{S}_Y^m(L_1)$ при каком-нибудь $m \gg 0$. Мы знаем, что сечений будет «столько же», сколько на X по лемме 3.7.2, поэтому обильность ω_X и ω_Y равносильна. И вся теорема теперь доказана.

Замечание: В книге Хёйбрехтса другой подход к доказательству этого последнего шага, менее магический: классическое определение обильности через то, что глобальные сечения (какой-то степени) разделяют точки и касательные вектора тоже можно проверять в терминах отображений между пучками-небоскрёбами и линейными расслоениями. См. [1, Prop. 4.11].

Библиография

[1] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. в Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, с. viii+307.

[2] А. Бондал и М. Капранов, «Представимые функторы, функторы Серра и перестройки», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, т. 53, вып. 6, сс. 1183–1205, 1989.

[3] A. Bondal и D. Orlov, «Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences», *Compositio Math.*, т. 125, вып. 3, сс. 327–344, 2001.

[4] P. Gabriel, «Des catégories abéliennes», *Bull. Soc. Math. France*, т. 90, сс. 323–448, 1962.

[5] M. Brandenburg, «Rosenberg's reconstruction theorem», *Expo. Math.*, т. 36, вып. 1, сс. 98–117, 2018.

[6] P. Balmer, «Presheaves of triangulated categories and reconstruction of schemes», *Math. Ann.*, т. 324, вып. 3, сс. 557–580, 2002.

[7] М. Атья и И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру*. МЦНМО, 2001.

[8] T. Stacks project authors, «The Stacks project». 2024 г.