4. Преобразования Фурье–Мукаи и их свойства

Напомню, что мы, как и всегда, обсуждаем только гладкие проективным многообразия. В этой лекции и дальше для многообразия X мы обычно будем использовать сокращённое обозначение $D(X)$ для категории $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. Напомню дополнительно, что все функторы по умолчанию подразумеваются производными.

4.1. Предварительные сведения

Сегодня нам понадобятся несколько важных свойств «геометрических» производных функторов: прямого образа, обратного образа, тензорного произведения и т.п. Они, в основном, являются обобщениями утверждений о когерентных пучках, но благодаря удачному формализму производных категорий верны в большей общности.

Начнём с важного утверждения о согласованности прямого и обратного образа.

Лемма 4.1.1 *(формула проекции)*: Пусть $f : X \to Y$ — морфизм гладких проективных многообразий, а $E \in D(X)$ и $F \in D(Y)$ — пара объектов. Тогда существует функториальный изоморфизм $f_*(E) \otimes F \cong f_*(E \otimes f^*(F))$.

Доказывать эту формулу мы не будем. Морфизм из левого объекта в правый строится с помощью сопряжённости прямого и обратного образа. Напомню, что для когерентных пучков формулой проекции называется выглядящий ровно так же изоморфизм, только функторы f_* и f^* тогда подразумеваются не-производными, а пучок F — не произвольный, а обязательно векторное расслоение. Поскольку определение производного пулбэка и производного тензорного произведения состоит в том, что надо произвольный объект заменить на резольвенту из векторных расслоений, не так удивительно, что для производных категорий утверждение формулы проекции не накладывает никаких ограничений на F.

Из нерассказанного на лекции: Есть приятный, хоть и не особенно полезный, способ думать про формулу проекции: категория $D(Y)$ является моноидальной категорией, т.е., в ней есть прямые суммы и тензорные произведения. Моноидальные категории можно воспринимать как категорификацию понятия кольца. Обратный образ f^* задаёт на категории $D(X)$ структуру «модуля» над $D(Y)$, а формула проекции утверждает, что прямой образ $f_* : D(X) \to D(Y)$ является гомоморфизмом модулей над $D(Y)$.

Следствие 4.1.2: Пусть $f : X \to Y$ — морфизм гладких проективных многообразий. Тогда для любого объекта $F \in D(Y)$ существует изоморфизм $f_* f^* F \cong F \otimes f_* \mathcal{O}_X$.

Доказательство: Возьмём в формуле проекции в качестве объекта E структурный пучок $\mathcal{O}_X$. Поскольку он локально свободный, то производное тензорное умножение на $\mathcal{O}_X$ совпадает с почленным обычным тензорным произведением, то есть является тождественным функтором. Значит, в этом случае формула проекции даёт в точности нужный нам изоморфизм. $\square$

Как мы упоминали раньше, производные функторы прямого и обратного образа сопряжены друг другу. На самом деле верно ещё более сильное утверждение: у производного прямого образа есть не только левый сопряжённый (обратный образ), но и правый. Существование правого сопряжённого функтора, его явное описание и изучение его свойств называется двойственностью Гротендика (в книге [1] используется термин «двойственность Гротендика–Вердье»). Это, вообще говоря, очень сложная деятельность, но для морфизмов между гладкими проективными многообразия всё легко следует из двойственности Серра.

Теорема 4.1.3: Пусть $f : X \to Y$ — морфизм гладких проективных многообразий. Тогда у функтора $f_* : D(X) \to D(Y)$ существует правый сопряжённый функтор $f^! : D(Y) \to D(X)$ (иногда его называют *исключительным обратным образом*), который задаётся формулой

$$f^!(-) := f^*(-) \otimes \omega_X \otimes f^*(\omega_Y^{\vee})[\dim X - \dim Y].$$

Замечание: Из такого определения функтора $f^!$ видно, что он действует локально по базе, в том смысле, что знания того, как объект устроен на открытом множестве $U \subset Y$, достаточно, чтобы вычислить ограничение его исключительного обратного образа на открытое подмножество $f^{-1}(U) \subset X$. Сопряжённость с функтором прямого образа тоже выполняется локально, т.е., для любых двух объектов $E \in D(X)$, $F \in D(Y)$ существует функториальный изоморфизм

$$f_* R\underline{\mathrm{Hom}}_X\big(E, f^!(F)\big) \cong R\underline{\mathrm{Hom}}_Y(f_*(E), F).$$

Напомним, что одним из свойств внутреннего Hom-функтора является то, что $R\Gamma(R\underline{\mathrm{Hom}}(A, B)) \cong R\mathrm{Hom}(A, B)$ для любых A и B, поэтому применение $R\Gamma$ к двум сторонам этого изоморфизма как раз демонстрирует сопряжённость функторов в обычном смысле.

Доказательство: Пусть $E \in D(X)$ и $F \in D(Y)$ — два объекта. Для вычисления левого сопряжённого функтора к прямому образу f_* рассмотрим градуированное пространство $R\mathrm{Hom}_Y(f_* E, F)$ и применим сначала двойственность Серра на Y, затем сопряжённость прямого и обратного образа, а потом — снова двойственность Серра, но уже на X. Напомним, что функтор Серра для X имеет вид $- \otimes \omega_X[\dim X]$ и аналогично для Y.

$$\begin{gathered} R\mathrm{Hom}_Y(f_* E, F) \cong R\mathrm{Hom}_Y(F, f_* E \otimes \omega_Y[\dim Y])^{\vee} \cong R\mathrm{Hom}_Y(F \otimes \omega_Y^{\vee}[-\dim Y], f_* E)^{\vee} \cong \\ \cong R\mathrm{Hom}_X(f^*(F) \otimes f^*(\omega_Y^{\vee})[-\dim Y], E)^{\vee} \cong \\ \cong R\mathrm{Hom}_X(E, f^*(F) \otimes f^* \omega_Y^{\vee}[-\dim Y] \otimes \omega_X[\dim X]). \end{gathered}$$

Легко видеть, что в конце написано как раз выражение $f^!(F)$. Поскольку все проделанные нами преобразования функториальны, это доказывает сопряжённость f_* и $f^!$. □

Замечание: Существование правого сопряжённого функтора к производному прямому образу между *большими* категориями $D(\mathrm{QCoh}(X)) \to D(\mathrm{QCoh}(Y))$ следует из чисто категорных соображений [2], причём далеко не только в случае, когда оба многообразия X и Y гладкие и проективные. Но при таком подходе сложно выяснить, как именно действует функтор $f^!$.

Ещё один чрезвычайно важный факт о функторах производного прямого и обратного образа — теореме о замене базы. Она часто позволяет упростить вычисление композиции нескольких производных функторов, а так же, с более концептуальной точки зрения, позволяет доказывать некоторые утверждения о производных категориях локально по базе. Мы, как обычно, сформулируем теорему не в полной степени общности, а в минимальной достаточной для целей этого курса.

Теорема 4.1.4: Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y' \to Y$ — два морфизма гладких проективных многообразий. Рассмотрим расслоенное произведение:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Если хотя бы один из двух морфизмов f и g является плоским, то для любого объекта $E \in D(X)$ функториальное отображение $g^* f_* E \xrightarrow{\sim} f'_* g'^* E$ объектов в $D(Y')$ является изоморфизмом.

Если сравнить это утверждение, например, с теоремой о замене базы для когерентных пучков в Хартсхорне ([3, Утв. 9.3]), то кажется удивительным, что нам достаточно плоскости любого из двух морфизмов f и g. В книге Хартсхорна, как и во многих других классических источниках, требуют плоскости именно морфизма g, вдоль которого берётся обратный образ. Там это делается для минимизации технической работы с производными функторами, а вообще в естественной общности нужна даже не плоскость какого-нибудь из морфизмов f и g, а только их *Tor-независимость*: нужно, чтобы для любых трёх аффинных открытых подсхем

$$\operatorname{Spec}(R_X) \cong U_X \subset X, \quad \operatorname{Spec}(R_Y) \cong U_Y \subset Y, \quad \operatorname{Spec}(R_{Y'}) \cong U_{Y'} \subset Y',$$

для которых $f(U_X) \subset U_Y$ и $g(U_{Y'}) \subset U_Y$, было верно, что производное тензорное произведение R_X и $R_{Y'}$ в категории R_Y-модулей было просто модулем, а не комплексом модулей, то есть, что $\operatorname{Tor}_i^{R_Y}(R_X, R_{Y'}) = 0$ при всех $i \neq 0$. Этого условия Tor-независимости достаточно, чтобы была верна теорема о замене базы (см., например, [4, Tag 08IB]).

Если хотя бы один из морфизмов плоский, то Tor-независимость автоматически выполняется, но есть и другие ситуации. Например, бывает полезно применять замену базы в случае, когда и f, и g являются вложениями гладких подмногообразий в Y, и тогда условие Tor-независимости означает, что коразмерность пересечения X и Y' в Y равна ожидаемой, то есть сумме коразмерностей этих двух подмногообразий.

4.2. Преобразования Фурье–Мукаи

Определение 4.2.1: Пусть X и Y — гладкие проективные многообразия. Пусть $K \in D(X \times Y)$ — какой-нибудь объект. Тогда *преобразованием Фурье–Мукаи с ядром* K называется функтор $\Phi_K : D(X) \to D(Y)$, определённый формулой

$$\Phi_K(-) := \pi_{Y*}(\pi_X^*(-) \otimes K).$$

Такого рода определения встречаются отнюдь не только при изучении производных категорий: таким же образом, с помощью объектов на произведении многообразий, определяются соответствия в теории мотивов, операции на когомологиях и в K-теории, и т.п.

Замечание: Свойства функторов такого вида между производными категориями в явном виде начал изучать Мукаи [5]. Фурье тут особенно ни при чём, определение больше похоже на общее понятие интегрального преобразования, чем именно на преобразование Фурье. В статье Мукаи основные результаты были про один конкретный функтор, который мы обсудим в разделе 4.6. Именно этот один функтор был в чём-то аналогичен преобразованию Фурье, а дальше название прижилось.

Обсудим примеры.

Пример: Наверное, самым важным примером преобразования Фурье–Мукаи является тождественный функтор. Пусть X — гладкое проективное многообразие. Рассмотрим структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_{\Delta_X} \in D(X \times X)$. Он изоморфен прямому образу $\Delta_*(\mathcal{O}_X)$ при диагональном вложении $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$. Отметим, кстати, что поскольку при замкнутом вложении прямой образ точен, то тут производный прямой образ от пучка $\mathcal{O}_X$ совпадает с обычным прямым образом. Покажем, что Φ_{Δ_X} — тождественный функтор на $D(X)$. В самом деле, для объекта $E \in D(X)$ имеем

$$\Phi_{\Delta_X}(E) \cong \pi_{2*}(\pi_1^*(E) \otimes \Delta_{X*}(\mathcal{O}_X)) \cong \pi_{2*}(\Delta_{X*}(\Delta_X^*(\pi_1^* E) \otimes \mathcal{O}_X))$$

по формуле проекции для вложения $\Delta_X : X \hookrightarrow X \times X$. Поскольку композиция $\pi_1 \circ \Delta_X$ это тождественное отображение $X \to X$, а тензорное произведение на структурный пучок это тождественное отображение на $D(X)$, мы доказали пока что, что

$$\Phi_{\Delta_X}(E) \cong \pi_{2*}(\Delta_{X*}(E)).$$

Но опять-таки, поскольку $\pi_2 \circ \Delta_X$ это тождественное отображение, получаем, что $\Phi_{\Delta_X}(E)$ канонически изоморфно E. Формула проекции и все проделанные нами отождествления функториальны по E, поэтому мы доказали изоморфизм функторов между Φ_{Δ_X} и тождественным функтором $D(X)$.

Пример: Прямые образы и обратные образы — тоже примеры преобразований Фурье–Мукаи. Пусть $f : X \to Y$ — отображение гладких проективных многообразий. Графиком отображения f называется подмногообразие $\Gamma_f \subset X \times Y$, состоящее из пар $\{(x, f(x))\}$. Иначе говоря, это образ естественного отображения $X \to X \times Y$. Тогда функтор Φ_{Γ_f} (где мы имеем в виду структурный пучок этого подмногообразия в качестве ядра) изоморфен функтору прямого образа $f_* : D(X) \to D(Y)$. Если же рассмотреть график морфизма f как подмногообразие в $Y \times X$, что мы будем обозначать через $\tau(\Gamma_f)$, то $\Phi_{\tau(\Gamma_f)}$ изоморфен функтору обратного образа $f^* : D(Y) \to D(X)$. Оба утверждения несложно доказываются с помощью формулы проекции, как в предыдущем примере (упражнение).

Пример: Тензорное произведение на фиксированный объект $E \in D(X)$ — тоже преобразование Фурье–Мукаи. В качестве подходящего ядра можно взять $\Delta_*(E) \in D(X \times X)$, где $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$ это диагональ. Доказательство идентично первому примеру. Отметим, кстати, что частным случаем тензорного произведения является сдвиг в производной категории, потому что для любого $F \in D(X)$ и любого $k \in \mathbb{Z}$ верно $F \otimes \mathcal{O}_X[k] \cong F[k]$, а ядром Фурье–Мукаи для сдвига будет $\Delta_*(\mathcal{O}_X[k])$.

4.3. Свойства преобразований Фурье–Мукаи

Композиция преобразований Фурье–Мукаи тоже является преобразованием Фурье–Мукаи, и ядро для композиции можно выписать в терминах двух данных ядер.

Утверждение 4.3.1: Пусть X, Y, Z — три гладких проективных многообразия. Пусть $K_{XY} \in D(X \times Y)$ и $K_{YZ} \in D(Y \times Z)$ — два объекта. Тогда существует изоморфизм функторов между композицией $\Phi_{K_{YZ}} \circ \Phi_{K_{XY}}$ и преобразованием Фурье–Мукаи $\Phi_{K_{XZ}}$, где K_{XZ} определяется в терминах морфизмов из диаграммы

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \times Z \arrow[dl, "\pi_{XY}"'] \arrow[d, "\pi_{XZ}"] \arrow[dr, "\pi_{YZ}"] & \\ X \times Y & X \times Z & Y \times Z \end{tikzcd}$$

как объект $\pi_{XZ*}(\pi_{XY}^*(K_{XY}) \otimes \pi_{YZ}^*(K_{YZ}))$

Доказательство: Доказательство пропустим. Это утверждение на многократное применение формулы проекции и замену базы для плоских морфизмов. Подробное доказательство дано в книжке [1, Prop. 5.10]. Там, кстати, красивая диаграмма, на которой удалось изобразить все нужные морфизмы проекции. □

Из Утверждения 4.3.1 и примеров, данных в разделе 4.2, следует, что все функторы, которые можно определить, используя сочетания стандартных геометрических функторов между производными категориям когерентных пучков (прямые образы, обратные образы, тензорные произведения, сдвиги), являются преобразованиями Фурье–Мукаи, к тому же с явно построенными ядрами. Какие ещё функторы являются преобразованиями Фурье–Мукаи и что про этот вопрос известно, мы обсудим в разделе 4.4.

Другое важное свойство преобразований Фурье–Мукаи связано с сопряжёнными функторами. У каждого преобразования Фурье–Мукаи существуют и левый, и правый сопряжённый функтор, и к тому же они являются преобразованиями Фурье–Мукаи с явно выписываемыми ядрами. (Тут мы используем, что для нас все многообразия гладкие и проективные! Иначе сопряжённые функторы есть только между «большими» категориями, а не для D^b_{coh}.)

Утверждение 4.3.2: Пусть $K \in D(X \times Y)$ — какой-нибудь объект. Обозначим через $\tau(K)$ его пулбэк при перемене мест множителей $X \times Y \to Y \times X$. Рассмотрим объекты

$$K_L := \tau(K)^{\vee} \otimes \pi_Y^* \omega_Y[\dim Y]$$
$$K_R := \tau(K)^{\vee} \otimes \pi_X^* \omega_X[\dim X]$$

в категории $D(Y \times X)$, где π_X и π_Y — две проекции из $Y \times X$ на X и Y, соответственно, а двойственный объект, как всегда, имеется в виду в производном смысле. Тогда функтор Φ_{K_L} — левый сопряжённый к функтору Φ_K, а функтор Φ_{K_R} — правый сопряжённый к Φ_K.

Доказательство: Это следует из двойственности Гротендика (теоремы 4.1.3). Вычислим, например, правый сопряжённый к функтору Φ_K. Пусть $E \in D(X)$, $F \in D(Y)$ — два объекта. Тогда, используя определение Φ_K и сопряжённость между функторами π_{Y*} и $\pi_Y^!$, получаем:

$$R\mathrm{Hom}_Y(\Phi_K(E), F) \cong R\mathrm{Hom}_Y(\pi_{Y*}(\pi_X^*(E) \otimes K), F) \cong R\mathrm{Hom}_X\big(\pi_X^*(E) \otimes K, \pi_Y^!(F)\big). \quad (1)$$

По теореме 4.1.3 функтор $\pi_Y^!$ отличается от обычного функтора обратного образа π_Y^* подкруткой на сдвиг линейного расслоения

$$\omega_{X\times Y} \otimes \pi_Y^*(\omega_Y^{\vee})[\dim X \times Y - \dim Y] \cong \pi_X^*(\omega_X)[\dim X],$$

где мы использовали, что $\omega_{X\times Y} \cong \pi_X^*(\omega_X) \otimes \pi_Y^*(\omega_Y)$ (упражнение).

Вернёмся к вычислению сопряжённого функтора. Подставив в формулу (1) определение функтора $\pi_Y^!$, получаем

$$R\mathrm{Hom}_Y(\Phi_K(E), F) \cong R\mathrm{Hom}_X(\pi_X^*(E), K^{\vee} \otimes \pi_Y^*(F) \otimes \pi_X^*(\omega_X)[\dim X]) \cong$$
$$\cong R\mathrm{Hom}_X(E, \pi_{X*}(K^{\vee} \otimes \pi_Y^*(F) \otimes \pi_X^*(\omega_X)[\dim X])).$$

Поскольку все изоморфизмы были функториальны по паре объектов E и F, это вычисление доказывает, что преобразование Фурье–Мукаи относительно K_R является правым сопряжённым функтором к Φ_K, что мы и хотели проверить. □

Из нерассказанного на лекции: Пусть $K_1, K_2 \in D(X \times Y)$ — два объекта, а $f : K_1 \to K_2$ — отображение между ними в производной категории $X \times Y$. Тогда f индуцирует естественное преобразование $\Phi_f : \Phi_{K_1} \to \Phi_{K_2}$ между функторами $D(X) \to D(Y)$. Более того, если вписать морфизм f в выделенный треугольник

$$K_1 \xrightarrow{f} K_2 \to \mathrm{Cone}(f) \to K_1[1],$$

то получится «выделенный треугольник» из функторов:

$$\Phi_{K_1} \to \Phi_{K_2} \to \Phi_{\mathrm{Cone}(f)} \to \Phi_{K_1}[1],$$

в том смысле, что при применении этих функторов к какому-нибудь объекту $E \in D(X)$ получится функториальный выделенный треугольник в $D(Y)$. Убрать кавычки в фразе про выделенный треугольник из функторов сложно: категория (триангулированных) функторов из $D(X)$ в $D(Y)$ триангулированной совсем не является. Что-то осмысленное можно сказать, только перейдя к более сложным объектам, чем триангулированные категории (dg-категории, стабильные ∞-категории и т.п.). Или же нужно последовательно говорить исключительно про ядра Фурье–Мукаи вместо функторов.

4.4. Фурье–Мукаи и не Фурье–Мукаи: теорема Орлова

Понятие преобразования Фурье–Мукаи позволяет по любому объекту из производной категории $D(X \times Y)$ строить функтор между триангулированными категориями $D(X)$ и $D(Y)$. Но какие свойства у этой конструкции? Например, любой ли функтор $D(X) \to D(Y)$ является преобразованием Фурье–Мукаи? Или: если про функтор известно, что он является преобразованием Фурье–Мукаи, то однозначно ли определёно его ядро $K \in D(X \times Y)$, или может быть несколько вариантов?

Из нерассказанного на лекции: По морфизмам в $D(X \times Y)$ строятся естественные преобразования между функторами. Иными словами, конструкция из определения 4.2.1 — это функтор из производной категории $D(X \times Y)$ в категорию триангулированных функторов $\mathrm{Fun}_{\mathrm{triang}}(D(X), D(Y))$. И тогда возникает ещё ряд вопросов, связанных не только с функторами, но и с естественными преобразованиями между ними. Верно ли, что любое естественное преобразование между функторами Фурье–Мукаи получается морфизмом ядер? И прочие.

Неформально ответ такой: категория $D(X \times Y)$ во всех смыслах лучше, правильнее и удобнее, чем категория точных функторов $D(X) \to D(Y)$ между триангулированными категориями, а у самой этой категории функторов никаких хороших свойств нет. Но есть и хорошие новости. Орлов доказал в 1997 году, что если функтор $D(X) \to D(Y)$ строго полный, т.е. является вложением полной подкатегории, то такой функтор всегда допускает ядро Фурье–Мукаи.

Теорема 4.4.1 ([6]): Пусть X и Y — гладкие проективные многообразия, и пусть $\Psi : D(X) \to D(Y)$ — точный функтор между производными категориями когерентных пучков на X и Y, имеющий сопряжённый функтор хотя бы с одной стороны. Тогда существует единственный с точностью до единственного изоморфизма объект $K \in D(X \times Y)$, для которого преобразование Фурье–Мукаи Φ_K изоморфно функтору Ψ.

Замечание: Как мы увидим в дальнейших лекциях, наличие сопряжённых функторов к Ψ получается автоматически из гладкости и собственности X и Y.

Поскольку эквивалентность категорий по определению является строго полным функтором, а обратный функтор к эквивалентности является к ней заодно и сопряжённым, получаем такое важное следствие:

Следствие 4.4.2: Любая эквивалентность производных категорий когерентных пучков $D(X) \xrightarrow{\sim} D(Y)$ является преобразованием Фурье–Мукаи.

Доказательство теоремы Орлова довольно сложное, поэтому мы её доказывать не будем. В принципе, могли бы, но для этого нужна была бы целая отдельная лекция. Ограничусь двумя замечаниями:

- искомое ядро $K \in D(X \times Y)$ строится в доказательстве явно. Пишется некоторый комплекс на $D(X \times Y)$, преобразование Фурье–Мукаи для которого по построению ведёт себя «так же», как данный функтор Ψ, при вычислении на линейных расслоениях $\mathcal{O}_X(n) \in D(X)$ для некоторого конечного числа подкруток n, а дальше показывается, что из этой совместимости следует изоморфизм функторов Ψ и Φ_K.
- существенно отличающихся доказательств теоремы Орлова не появилось, но с годами люди придумали некоторые упрощения отдельных шагов. Если хочется понять доказательство, рекомендую читать не оригинальную статью, а, например, [7]. Там, заодно, утверждение доказано для любых собственных многообразий, а не только для проективных.

В качестве замены доказательству обсудим такой **вопрос**: пусть мы заранее откуда-то знаем, что функтор Ψ является преобразованием Фурье–Мукаи относительно *когерентного пучка* $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X \times Y) \subset D(X \times Y)$. Как нам тогда по функтору Ψ понять, что это был за пучок?

Ответ: сначала введём обозначения. Пусть $\mathcal{O}(H)$ — обильное линейное расслоение на X, а $\mathcal{O}(h)$ — на Y. Тогда линейное расслоение $\mathcal{O}(H + h)$ будет обильным на $X \times Y$. Здесь мы используем стандартное соглашение, что пулбэк линейного расслоения обозначается той же буквой, что и снизу, то есть строго говоря под $\mathcal{O}(H + h)$ мы имеем в виду расслоение $\pi_X^*(\mathcal{O}_X(H)) \otimes \pi_Y^*(\mathcal{O}_Y(h))$.

Напомним важную теорему Серра о когерентных пучках на проективных многообразиях: пучок $\mathcal{F}$ однозначно восстанавливается по градуированному модулю

$$\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n \cdot (H + h)))$$

над градуированной алгеброй

$$\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X \times Y, \mathcal{O}(n \cdot (H + h))),$$

причём достаточно знать градуированный модуль не целиком, а только в градуировках при $n \gg 0$. Поскольку глобальные сечение — это (не-производный) прямой образ при отображении в точку, то для вычисления градуированного модуля можно сначала взять прямой образ подкрутки пучка $\mathcal{F}$ при проекции $X \times Y \to Y$, и посчитать глобальные сечения на Y. Это уже начинает напоминать определение преобразования Фурье–Мукаи. И в самом деле, используя формулу проекции, легко увидеть, что

$$\Phi_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_X(nH)) \otimes \mathcal{O}_Y(nh) \cong \pi_{Y*}(\mathcal{F} \otimes \pi_X^*\mathcal{O}_X(nH) \otimes \pi_Y^*\mathcal{O}_Y(nh)).$$

Значит, при $n \gg 0$ (гипер)когомологии $R\Gamma_Y(\Phi_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_X(nH)) \otimes \mathcal{O}_Y(nh))$ — это как раз прямая сумма когомологий подкрутки пучка $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n \cdot (H + h))$. Наконец, вспомним, что раз $\mathcal{O}(H + h)$ обильно, то при $n \gg 0$ у этой подкрутки останутся только нулевые когомологии. Получается, что как только мы знаем значения функтора $\Phi_{\mathcal{F}}$ на линейных расслоениях $\mathcal{O}_X(nH)$ и на морфизмах между ними (это нужно для структуры модуля, иначе мы получили бы только градуированное векторное пространство), то пучок $\mathcal{F}$ однозначно определён по теореме Серра.

Замечание: Вариация этого аргумента показывает, что для любого объекта $K \in D(X \times Y)$ по функтору Φ_K довольно легко восстановить все *пучки когомологий* объекта K (см., например, [8, Prop. 4.3]). Однако извлечь из этого наблюдения полное доказательство теоремы Орлова, по-видимому, невозможно: как мы обсуждали ранее, объект в производной категории это не просто набор пучков когомологий, а ещё и хитрые «высшие» данные склейки между ними, которые даже чётко выписать сложно, не то что построить явно таким грубым методом с вычислением когомологий больших подкруток.

4.5. Фурье–Мукаи и не Фурье–Мукаи: контрпримеры

Теорема Орлова обрадовала многих математиков, даже была гипотеза, что любой триангулированный функтор является преобразованием Фурье–Мукаи. Но, увы, это совсем не так. В 2014 году, через семнадцать лет после статьи Орлова, появились убедительные контрпримеры (опубликован этот результат был ещё чуть позже).

Теорема 4.5.1 ([9]): Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ — трёхмерная гладкая квадрика. Тогда существует точный функтор $F : D(Q) \to D(\mathbb{P}^4)$ между триангулированными категориями, имеющий оба сопряжённых, и не являющийся преобразованием Фурье–Мукаи.

Главная сложность в том, что все «естественные», геометрические функторы по построению допускают ядра Фурье–Мукаи, и надо как-то соорудить «искусственный» функтор, скорее алгебраического характера, а как это делать — непонятно. Простого ответа не нашлось. Если для полного доказательства теоремы Орлова нам потребовалась бы целая отдельная лекция, то доказательство теоремы 4.5.1 это уже скорее тема для спецкурса на семестр. Сейчас есть существенные обобщения этого результата, и в целом между более-менее любой парой производных категорий построены функторы, не приходящие из ядер в $D(X \times Y)$, но доказательства остаются сложными.

Вскоре после этого Вологодский заметил [10], что если интересоваться не только комплексными числами, но и полями конечной характеристики (напомню, что у нас-то в курсе всё подразумевается над $\mathbb{C}$! Многие утверждения остаются верными над любым полем, но не все), то функторы, не являющиеся преобразованиями Фурье–Мукаи, легко найти и среди естественно встречающихся в жизни геометрических операций. А именно, если X — схема над $\mathbb{F}_p$, которая поднимается до гладкой проективной схемы $\mathcal{X}$ над кольцом целых p-адических чисел, то композиция прямого образа при вложении $X \hookrightarrow \mathcal{X}$ и ограничения обратно на X может быть функтором Фурье–Мукаи только для многообразий X с очень серьёзными ограничениями. В частности, для пространств флагов, кроме $\mathbb{P}^1$, эта композиция функторов, как отображение $\mathbb{F}_p$ -линейных триангулированных категорий $D(X) \to D(X)$, не будет преобразованием Фурье–Мукаи.

Эти печальные известия можно до некоторой степени уравновесить следующей обнадёживающей теоремой Тоэна 2007 года. Она подтверждает расхожую мудрость, что триангулированные категории — это не самый удачный математический объект, и как только начинаешь рассматривать функторы между триангулированными категориями, так всё сразу идёт наперекосяк, а надо вместо триангулированных категорий с самого начала изучать «оснащённые» варианты (стабильные ∞-категории, dg-категории, …), и тогда проблем не будет. Поскольку мы о dg-категориях ничего не говорили, формулировку теоремы ниже понять нельзя, но предлагаю поверить, что это осмысленные слова.

Теорема 4.5.2 ([11]): Точный функтор $F : D(X) \to D(Y)$ между триангулированными категориями изоморфен некоторому преобразованию Фурье–Мукаи тогда и только тогда, когда F поднимается до dg-функтора $F_{\mathrm{dg}} : D_{\mathrm{dg}}(X) \to D_{\mathrm{dg}}(Y)$ между dg-оснащениями производных категорий. Более того, категория dg-функторов из $D_{\mathrm{dg}}(X)$ в $D_{\mathrm{dg}}(Y)$, рассмотренная как dg-категория, квазиэквивалентна dg-оснащению $D_{\mathrm{dg}}(X \times Y)$ производной категории $D(X \times Y)$.

Иными словами, если работать в dg-мире, то конструкция Фурье–Мукаи это прямо-таки (квази)эквивалентность категорий: задать функтор между производными категориями X и Y на dg-уровне это *в точности* то же самое, что выбрать ядро преобразования Фурье–Мукаи на их произведении, и даже естественные преобразования между dg-функторами это в точности морфизмы между их ядрами.

4.6. Теорема Мукаи

На первой лекции я упоминал, что Мукаи доказал, что производные категории когерентных пучков для абелева многообразия и для двойственного к нему абелева многообразия эквивалентны, хоть сами многообразия могут быть и не изоморфны. Эту теорему мы докажем. Поскольку в формулировке встречаются абелевы многообразия, нам придётся поверить в довольно много фактов о них. Подробнее об абелевых многообразиях можно почитать, например, в книге Мамфорда «Абелевы многообразия».

Сначала напомню, что такое абелевы многообразия. Абелево многообразие — это гладкое проективное алгебраическое многообразие A, на котором задана структура группы так, что умножение $A \times A \to A$ и взятие обратного элемента $A \to A$ являются морфизмами алгебраических многообразий. Группа автоматически будет коммутативна. Более того, абелево многообразие — это всегда комплексный тор, то есть фактор векторного пространства $\mathbb{C}^g$ по решётке $\mathbb{Z}^{2g} \simeq \Lambda \subset \mathbb{C}^g$.

Пусть A — абелево многообразие размерности g (это стандартный выбор обозначения в теории абелевых многообразий). Обозначим отображение сложения в A символом $m : A \times A \to A$. *Двойственным абелевым многообразием* $\hat{A}$ называется многообразие $\mathrm{Pic}^0(A)$ топологически тривиальных линейных расслоений на A. Это тоже абелево многообразие, той же размерности, что и A, но обычно не изоморфное ему. Это в самом деле двойственность: существует естественный изоморфизм $\left(\hat{A}\right)\hat{} \xrightarrow{\sim} A$. Для формулировки и доказательства теоремы Мукаи очень важно следующее понятие:

Определение 4.6.1: *(Нормализованным) расслоением Пуанкаре* называется линейное расслоение $\mathcal{P}$ на $A \times \hat{A}$ со следующими свойствами:
- Для любого $L \in \mathrm{Pic}^0(A)$ ограничение $\mathcal{P}|_{A \times \{L\}}$ как линейное расслоение на A изоморфно L.
- Для любой точки $a \in A$, ограничение $\mathcal{P}|_{\{a\} \times \hat{A}}$ как линейное расслоение на $\hat{A} \simeq \mathrm{Pic}^0(A)$ изоморфно расслоению, соответствующему точке a при изоморфизме $A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0(\mathrm{Pic}^0(A))$.

Расслоение Пуанкаре существует. Про него полезно думать, как про универсальное семейство расслоений из $\mathrm{Pic}^0(A)$. Именно расслоение Пуанкаре $\mathcal{P} \in \mathrm{Coh}\left(A \times \hat{A}\right)$ мы будем использовать в качестве ядра для преобразования Фурье–Мукаи. Сложная часть доказательства состоит в вычислении прямого образа этого расслоения относительно проекции на A. Нам нужно следующее утверждение.

Утверждение 4.6.2: Производный прямой образ $\pi_{A*}(\mathcal{P}) \in D(A)$ при проекции $\pi_A : A \times \hat{A} \to A$ изоморфен $\mathcal{O}_{\{0\}}[-g]$, где $\mathcal{O}_{\{0\}}$ — пучок-небоскрёб в групповой единице $0 \in A$.

Я более-менее следую доказательству из записок лекций [12, Lec. 25], которое по сути совпадает с доказательством из главы 13 в книге Мамфорда «Абелевы многообразия». У Шнелла это доказательство начинается фразой «the proof takes longer than you expect, but it is very clever», и, в целом, так всё и есть. Вообще, на правах рекламы, очень рекомендую записки [12] — там очень понятно изложены много важных тем: кэлерова геометрия, теория Ходжа, теория абелевых многообразий и комплексных торов, производные категории когерентных пучков и, наконец, сама теорема об обращении в ноль в общей точке, которой был посвящён этот курс Шнелла, тоже интересная и полезная.

Доказательство: Сначала изучим, как объект $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ ограничивается на разные точки многообразия A. Пусть $a \in A$ — какая-то точка. Рассмотрим расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} \{a\} \times \hat{A} & \hookrightarrow & A \times \hat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_A \\ \{a\} & \hookrightarrow & A \end{array}$$

Поскольку морфизм π_A плоский, по теореме 4.1.4 производный пулбэк объекта $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ на точку a изоморфен производному прямому образу линейного расслоения $\mathcal{P}|_{\{a\}\times\hat{A}}$ при отображении в точку. Поскольку производный прямой образ при отображении в точку это, по определению, вычисление когомологий $R\Gamma\left(\{a\} \times \hat{A}, -\right)$, нужно знать, как устроены когомологии линейных расслоений степени ноль на абелевых многообразиях. Это стандартный факт, который мы используем без доказательства. Ответ такой: для абелева многообразия B и для линейного расслоения $L \in \mathrm{Pic}^0(B)$ когомологии $R\Gamma(B, L)$ равны:

- нулю, если L — нетривиальное расслоение;
- внешней алгебре $\Lambda^\bullet\left(\check{T}_{\{0\}}(B)\right)$ на кокасательном пространстве к групповой единице на B, если $L \simeq \mathcal{O}_B$ — тривиальное линейное расслоение.

По второй части определения 4.6.1 мы знаем, что над любой точкой $a \neq 0 \in A$ ограничение линейного расслоения $\mathcal{P}$ на срез $\{a\} \times \hat{A}$ — это нетривиальное линейное расслоение из $\mathrm{Pic}^0\left(\hat{A}\right)$. Значит, у прямого образа $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ ограничение на любую точку $a \neq 0$ равно нулю, а на точку $0 \in A$ — внешней алгебре на g-мерном векторном пространстве (помещённой в градуировки от 0 до g, как обычная внешняя алгебра).

Упражнение 4.6.3: Пусть X — какое-нибудь гладкое проективное многообразие, $x \in X$ — точка на нём, а $P \in D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ — объект производной категории. Докажите, что $x \in \mathrm{supp}(P)$ тогда и только тогда, когда (производное) ограничение $P|_{\{x\}}$ в категории $D^b_{\mathrm{coh}}(\{x\}) \simeq D(\mathrm{Vect})$ не равно нулю. (*Указание*: пусть $i : \{x\} \hookrightarrow X$ — вложение. Тогда по сопряжённости прямого и обратного образа $i^*(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}^\bullet\left(P, \mathcal{O}_{\{x\}}\right) = 0$, где $\mathcal{O}_{\{x\}}$ — пучок-небоскрёб в точке $x \in X$.)

По упражнению выше мы теперь знаем, что теоретико-множественный носитель объекта $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ — это только одна точка $\{0\} \in A$. Кроме того, производное ограничение на эту точку изоморфно внешней алгебре на g-мерном векторном пространстве в степенях $[0, g]$. У объекта $\mathcal{O}_{\{0\}}[-g]$, упоминаемого в формулировке утверждения, тоже выполняются эти свойства. На лекции я хотел на этом месте остановиться, сказав, что других объектов с такими свойствами нет, но меня справедливо поймали на попытке всех обмануть: это неправда! Как мы увидим ниже, эти свойства гарантируют, что объект $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ является сдвигом в степень g структурного пучка некоторой подсхемы в A, но без дополнительного изучения расслоения Пуанкаре вывести, что эта подсхема — просто приведённая точка, не получится. Например, в двумерном случае в аффинном пространстве $\mathbb{A}^2 \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ у пучка, соответствующего модулю $\mathbb{C}[x, y]/(x^2, y)$, производное ограничение на начало координат не отличается от производного ограничения пучка-небоскрёба.

В связи с этим я решил вернуться к этому утверждению на следующей лекции и дать полное подробное доказательство. Итак,

ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ…

□

В конце лекции я начал с помощью утверждения 4.6.2 доказывать теорему Мукаи, и рассказал несколько шагов доказательства, но поскольку я всё равно в следующий раз буду всё повторять, в записках лекций эти шаги появятся только в следующий раз.

Библиография

[1] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. в Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, с. viii+307.

[2] A. Neeman, «The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability», *J. Amer. Math. Soc.*, т. 9, вып. 1, сс. 205–236, 1996.

[3] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*. Мир, 1981.

[4] T. Stacks project authors, «The Stacks project». 2024 г.

[5] S. Mukai, «Duality between $D(X)$ and $D(h@X)$ with its application to Picard sheaves», *Nagoya Math. J.*, т. 81, сс. 153–175, 1981.

[6] D. O. Orlov, «Equivalences of derived categories and K3 surfaces», т. 84, вып. 5. сс. 1361–1381, 1997 г.

[7] N. Olander, «Orlov's Theorem in the smooth proper case», *J. Algebra*, т. 643, сс. 284–293, 2024.

[8] A. Canonaco и P. Stellari, «Non-uniqueness of Fourier-Mukai kernels», *Math. Z.*, т. 272, вып. 1–2, сс. 577–588, 2012.

[9] A. Rizzardo, M. Van den Bergh, и A. Neeman, «An example of a non-Fourier-Mukai functor between derived categories of coherent sheaves», *Invent. Math.*, т. 216, вып. 3, сс. 927–1004, 2019.

[10] V. Vologodsky, «Triangulated endofunctors of the derived category of coherent sheaves which do not admit DG liftings», *Arnold Math. J.*, т. 5, вып. 2–3, сс. 387–391, 2019.

[11] B. Toën, «The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory», *Invent. Math.*, т. 167, вып. 3, сс. 615–667, 2007.

[12] C. Schnell, «A graduate course on the Generic vanishing theorem». [Онлайн]. Доступно на: https://www.math.stonybrook.edu/~cschnell/pdf/notes/generic-vanishing.pdf