5. Теорема Мукаи (продолжение). Генераторы.

5.1. Теорема Мукаи

В прошлый раз мы начали, но не закончили, рассказ о производных категориях абелевых многообразий и теореме Мукаи. Напомним обозначения:

- A — абелево многообразие, т.е., комплексный тор с алгебраической структурой;
- $m : A \times A \to A$ — групповая операция для A;
- $\widehat{A}$ — двойственное абелево многообразие, оно же $\operatorname{Pic}^0(A)$;
- $\mathcal{P}$ — расслоение Пуанкаре, то есть линейное расслоение на $A \times \widehat{A}$, являющееся универсальным семейством линейных расслоений степени ноль на A (параметризованное $\widehat{A} \cong \operatorname{Pic}^0(A)$), и одновременно универсальным семейством линейных расслоений степени ноль на $\widehat{A}$ (параметризованное $A \cong \operatorname{Pic}^0(\operatorname{Pic}^0(A))$).

Продолжим прерванное доказательство следующего важного утверждения о свойствах расслоения Пуанкаре:

Утверждение 5.1.1: Производный прямой образ $\pi_{A*}(\mathcal{P}) \in D(A)$ при проекции $\pi_A : A \times \widehat{A} \to A$ изоморфен $\mathcal{O}_{\{0\}}[-g]$, где $\mathcal{O}_{\{0\}}$ — пучок-небоскрёб в групповой единице $0 \in A$.

В прошлый раз мы доказали, что теоретико-множественный носитель объекта $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ — это только одна точка $\{0\} \in A$. Кроме того, производное ограничение на эту точку изоморфно внешней алгебре на g-мерном векторном пространстве в степенях $[0, g]$. Этот факт очень много говорит об объекте $\pi_{A*}(\mathcal{P})$, но чтобы понять, что именно, нам понадобится несколько лемм.

Лемма 5.1.2: Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на гладком многообразии X размерности g с носителем в одной точке $x \in X$. Пусть $i : \{x\} \hookrightarrow X$ — вложение точки. Тогда производное ограничение $i^*(\mathcal{F}) \in D(\{x\})$, как объект в производной категории векторных пространств, имеет когомологии в степенях от $-g$ до 0, причём если $\mathcal{F}$ ненулевой, то пучки когомологий $\mathcal{H}^0(i^*(\mathcal{F}))$ и $\mathcal{H}^{-g}(i^*(\mathcal{F}))$ тоже не равны нулю.

Доказательство: Рассмотрим производный прямой образ производного ограничения $i^*\mathcal{F}$ при вложении обратно в X. По формуле проекции $i_*(i^*(\mathcal{F}))$ изоморфно тензорному произведению $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\{x\}}$ пучка $\mathcal{F}$ с пучком-небоскрёбом в точке x. Отметим, что функтор прямого образа i_* при замкнутом вложении, во-первых, точен, то есть пучки когомологий производного прямого образа $i_*i^*(\mathcal{F})$ изоморфны прямым образам пучков когомологий объекта $i^*(\mathcal{F})$, а, во-вторых, *консервативен*, в том смысле, что прямой образ ненулевого пучка при вложении не может быть стать нулевым. Значит, утверждения про пучки когомологий из формулировки леммы можно доказывать не для пулбэка $i^*(\mathcal{F})$, а для тензорного произведения $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\{x\}}$.

Поскольку всё происходит в окрестности точки x, можно перейти к локальному кольцу $R := \mathcal{O}_{X,\{x\}}$ этой точки. Тогда $\mathcal{F}$ соответствует некоторому конечномерному модулю F над R, а пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_{\{x\}}$ — модулю $R/\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал локального кольца R. Многообразие X по предположению было гладким размерности g, то есть R — регулярное локальное кольцо, и идеал $\mathfrak{m} \subset R$ порождается элементами $m_1, ..., m_g$. Более того, регулярность влечёт, что у модуля $R/\mathfrak{m}$ есть резольвента Кошуля:

$$0 \to R \to R^{\oplus g} \to R^{\oplus \binom{g}{2}} \to ... \to R^{\oplus g} \to R \to 0,$$

где члены резольвенты — свободные модули на подмножествах порождающих $m_1, ..., m_g$ максимального идеала, а дифференциалы — знакочередующиеся «вычёркивания» элементов из этих подмножеств.

По определению производное тензорное произведение пучков $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\{x\}}$, то есть, в терминах модулей над кольцом R, производное тензорное произведение $F \otimes R/\mathfrak{m}$, можно вычислять, как почленное тензорное произведение F и свободной резольвенты для $R/\mathfrak{m}$. Значит, в производной категории объект $F \otimes R/\mathfrak{m}$ представляется комплексом

$$0 \to F \xrightarrow{\begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_g \end{pmatrix}} F^{\oplus g} \to \dots \to F^{\oplus g} \xrightarrow{(m_1 \; \dots \; m_g)} F \to 0.$$

Видно, что этот комплекс не ноль только в степенях от $-g$ до 0, причём его нулевые когомологии изоморфны $F/\mathfrak{m}F$. Это векторное пространство над $R/\mathfrak{m}R$, чья размерность по лемме Накаямы равна минимальному числу порождающих для F, то есть, в частности, не ноль, если сам модуль F ненулевой. Кроме того, $(-g)$-тый модуль когомологий это *цоколь* модуля F, то есть подпространство элементов, аннулирующихся всем максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Поскольку носитель F равен максимальному идеалу и конечно порождён, это подпространство тоже ненулевое (упражнение по коммутативной алгебре). $\square$

Следствие 5.1.3: Пусть X — гладкое многообразие размерности g, $x \in X$ — точка, а $i : \{x\} \hookrightarrow X$ — вложение точки. Пусть $E \in D(X)$ — объект, у которого $\operatorname{supp}(E) = \{x\}$, и пусть m и n — наименьшее (соответственно, наибольшее) число, для которого пучок когомологий $\mathcal{H}^m(E)$ ненулевой. Тогда у производного ограничения $i^*E \in D(\{x\})$ пучки когомологий $\mathcal{H}^{m-g}(i^*E)$ и $\mathcal{H}^n(i^*E)$ не равны нулю.

Доказательство: Из того, что m — номер самого левого ненулевого пучка когомологий E, мы выведем, что пучок $\mathcal{H}^{m-g}(i^*(E))$ изоморфен $\mathcal{H}^{-g}(i^*(\mathcal{H}^m(E)))$, а это не ноль по лемме 5.1.2, потому что $\mathcal{H}^m(E)$ — ненулевой когерентный пучок с носителем в точке $\{x\}$. Аналогично с самым правым ненулевым пучком когомологий. Выводить это можно разными способами: например, можно это доказывать по индукции, используя треугольники обрезания для E. Но на этот раз мы для разнообразия докажем по-другому, с помощью спектральной последовательности.

На объекте E есть то, что называется *канонической фильтрацией*: это та фильтрация, которую мы использовали для определения треугольников обрезания, и у неё присоединённые градуированные факторы квазиизоморфны просто пучкам когомологий E. Когда что-то гомологически интересное делается с фильтрованным объектом, часто возникает спектральная последовательность, позволяющая оценить, что же происходит с объектом в терминах того, что происходит с присоединёнными градуированными факторам. Как обычно, в этом курсе мы не углубляемся в детали гомологической алгебры, поэтому просто поверим, что для пучков когомологий объекта $i^*(E)$ существует спектральная последовательность:

$$E_2^{p,q} := \mathcal{H}^q(i^*\mathcal{H}^p(E)) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(i^*E), \text{дифференциал } d_k^{p,q} : E_k^{p,q} \to E_k^{p-k+1,q+k}.$$

Если разобраться, какой индекс что означает, становится видно, что по лемме 5.1.2, применённой к каждому пучку когомологий E, на втором листе спектральной последовательности ненулевые объекты лежат в прямоугольнике, чей нижний левый угол это $(m, -g)$, а верхний правый — $(n, 0)$. Направления стрелок дифференциалов показывают, что объекты, находящиеся в этих углах, останутся неповреждёнными во всех листах спектральной последовательности, а поскольку все остальные элементы на диагоналях $p + q = m - g$ и $p + q = n$, кроме них, равны нулю, то в пределе получим

$$\mathcal{H}^{m-g}(i^*E) \cong \mathcal{H}^{-g}(i^*\mathcal{H}^m(E)), \quad \mathcal{H}^n(i^*E) \cong \mathcal{H}^0(i^*\mathcal{H}^n(E)),$$

а оба этих объекта ненулевые по лемме 5.1.2, что мы и хотели доказать. $\square$

Доказательство (утверждения): Теперь мы можем вернуться к доказательству утверждения 5.1.1. Мы в прошлый раз показали, что производное ограничение объекта $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ на точку $0 \in A$ изоморфно внешней алгебре на g-мерном векторном пространстве, сидящей в степенях от 0 до g, и носитель равен этой точке. По следствию 5.1.3 это означает, что самый правый ненулевой пучок когомологий $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ располагается в степени g, и самый левый тоже в степени g, то есть $\pi_{A*}(\mathcal{P})$ имеет лишь один пучок когомологий, и тогда этот объект квазиизоморфен сдвигу некоторого когерентного пучка $\mathcal{F}$ в степень g. Кроме того, из доказательства леммы 5.1.2 мы дополнительно знаем, что размерность $\mathcal{H}^0(i^*\mathcal{F})$, то есть размерность $\mathcal{H}^g(i^*\pi_{A*}(\mathcal{P}))$, равна минимальной длине набора порождающих для $\mathcal{F}$ как модуля над локальным кольцом. У нас это пространство — старшая компонента внешней алгебры, и она одномерна. Значит, $\mathcal{F}$ можно локально породить одним элементом, а это означает, что $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_A/I$, где $I \subset \mathcal{O}_A$ — некоторый пучок идеалов некоторой подсхемы в A, сосредоточенной в точке $0 \in A$. Обозначим эту подсхему через $A_I \subset A$. Осталось доказать, что I равен пучку идеалов замкнутой точки $\{0\}$. Мы выведем это из описания $\mathcal{P}$ как универсального семейства линейных расслоений степени 0.

Воспользуемся сначала двойственностью Гротендика: если $\pi_{A*}(\mathcal{P}) \simeq \mathcal{O}_A/I[-g]$, то векторное пространство

$$0 \neq \mathrm{Hom}_A(\pi_{A*}(\mathcal{P}), \mathcal{O}_A/I[-g]) \cong \mathrm{Hom}_{A\times\hat{A}}\big(\mathcal{P}, \pi_A^!(\mathcal{O}_A/I[-g])\big)$$

ненулевое. Из описания функтора исключительного обратного образа, данного в прошлой лекции, мы знаем, что поскольку канонические классы A и $A \times \hat{A}$ тривиальны (это два абелевых многообразия), то $\pi_A^!(-) \cong \pi_A^*(-)[g]$. Кроме того, поскольку морфизм проекции $\pi_A : A \times \hat{A} \to A$ плоский, то производный пулбэк $\pi_A^*(\mathcal{O}_A/I)$ изоморфен обычному, а он, в свою очередь, является структурным пучком подсхемы $\pi_A^{-1}(A_I) = A_I \times \hat{A}$. Следовательно, ненулевым векторным пространством является

$$\mathrm{Hom}_{A\times\hat{A}}\left(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{A_I\times\hat{A}}\right) \cong \mathrm{Hom}_{A_I\times\hat{A}}\left(\mathcal{P}|_{A_I\times\hat{A}}, \mathcal{O}\right) \cong H^0\left(A_I \times \hat{A}, \mathcal{P}^{\vee}|_{A_I\times\hat{A}}\right).$$

Поскольку $A_I \times \hat{A}$ — это инфинитезимальное утолщение схемы $\{0\} \times \hat{A}$, на которой линейное расслоение $\mathcal{P}$ тривиально, нетрудно убедиться, что если у $\mathcal{P}^{\vee}$ на $A_I \times \hat{A}$ есть сечение, то ограничение $\mathcal{P}|_{A_I\times\hat{A}}$ — тривиальное линейное расслоение (упражнение! *Указание*: ненулевое сечение не может обращаться в ноль ни в одной замкнутой точке по лемме Накаямы, поэтому оно задаёт изоморфизм между $\mathcal{O}_{A_I\times\hat{A}}$ и ограничением $\mathcal{P}^{\vee}$).

Вспомним, что A изоморфно $\mathrm{Pic}^0\left(\hat{A}\right)$, то есть является пространством модулей линейных расслоений степени ноль на $\hat{A}$, а $\mathcal{P}$ — универсальное семейство этих расслоений. Будем думать про ограничение $\mathcal{P}$ на $A_I \times \hat{A}$ как про семейство линейных расслоений на $\hat{A}$, параметризованное схемой A_I. По определению пространства модулей и универсальному свойству $\mathcal{P}$ любое такое семейство должно единственным образом получаться пулбэком от $\mathcal{P}$ относительно некоторого отображению $f : A_I \to A$. По построению мы знаем, что тавтологическое вложение подсхемы $A_I \hookrightarrow A$ годится. Но если семейство $\mathcal{P}|_{A_I\times\hat{A}}$ тривиально, то можно с тем же успехом использовать и отображение $A_I \twoheadrightarrow \{0\} \hookrightarrow A$, пропускающееся через замкнутую точку $0 \in A$. Следовательно, противоречия с универсальным свойством $\mathcal{P}$ можно избежать, только если эти два отображения равны, то есть A_I — это и есть подсхема $\{0\} \subset A$. А мы именно это и хотели доказать. □

Вот, наконец, мы и завершили доказательство этого утверждения. С помощью него мы получим теорему Мукаи об эквивалентности производных категорий абелева многообразия и его двойственного. Это доказательство уже будет гораздо проще.

Теорема 5.1.4 ([1]): Пусть A — абелево многообразие, $\hat{A}$ — его двойственное, а $\mathcal{P}$ — расслоение Пуанкаре на $A \times \hat{A}$. Пусть $\iota_A : A \to A$ и $\iota_{\hat{A}} : \hat{A} \to \hat{A}$ — отображения перехода к групповому обратному элементу в группах A и $\hat{A}$. Рассмотрим преобразования Фурье–

Мукаи $\Phi_{\mathcal{P}} : D(A) \to D\left(\hat{A}\right)$ и $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} : D\left(\hat{A}\right) \to D(A)$ относительно $\mathcal{P}$, где $\tau : A \times \hat{A} \to \hat{A} \times A$ — перемена мест множителей. Тогда существуют изоморфизмы функторов

$$\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}} \cong \iota_A^*[-g], \qquad \Phi_{\mathcal{P}} \circ \Phi_{\tau(\mathcal{P})} \cong \iota_{\hat{A}}^*[-g].$$

Следствие 5.1.5: Функтор $\Phi_{\mathcal{P}} : D(A) \to D\left(\hat{A}\right)$ — это эквивалентность категорий.

Доказательство: Чтобы функтор был эквивалентностью категорий, достаточно, чтобы у него нашёлся обратный слева и обратный справа функтор (упражнение). Поскольку взятие обратного элемента в группе — это автоморфизм многообразия A, по теореме Мукаи получаем

$$\left(\iota_A^*[g] \circ \Phi_{\tau(\mathcal{P})}\right) \circ \Phi_{\mathcal{P}} \cong \mathrm{Id}_{D(A)}, \qquad \Phi_{\mathcal{P}} \circ \left(\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \iota_{\hat{A}}^*[g]\right) \cong \mathrm{Id}_{D\left(\hat{A}\right)}.$$

Значит, $\Phi_{\mathcal{P}}$ — эквивалентность категорий. А ещё из этого доказательства получается, что, раз существует обратный функтор к $\Phi_{\mathcal{P}}$, то обратные слева и справа к нему изоморфны:

$$\iota_A^*[g] \circ \Phi_{\tau(\mathcal{P})} \cong \Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \iota_{\hat{A}}^*[g].$$

□

Доказательство (теоремы 5.1.4): Чтобы доказать изоморфизм двух функторов, достаточно показать, что они оба являются преобразованиями Фурье–Мукаи, а их ядра изоморфны. Мы будем рассматривать только композицию функторов $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$, композиция в другом порядке полностью аналогична (а ещё следует напрямую из первой при рассмотрениии абелева многообразия $\hat{A}$). Доказательство идёт по шагам.

<u>Шаг 1</u>: по утверждению из прошлой лекции композиция преобразований Фурье–Мукаи $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ тоже является преобразованием Фурье–Мукаи, относительно объекта, который в терминах морфизмов

$$\begin{tikzcd}
 & A \times \hat{A} \times A \arrow[dl, "\pi_{12}"'] \arrow[d, "\pi_{13}"] \arrow[dr, "\pi_{23}"] & \\
A \times \hat{A} & A \times A & \hat{A} \times A
\end{tikzcd}$$

равен $\pi_{13*}(\pi_{12}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{23}^*\tau(\mathcal{P}))$.

<u>Шаг 2</u>: Отметим, что поскольку $\mathcal{P}$ — линейное расслоение, объект $\pi_{12}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{23}^*\tau(\mathcal{P})$, от которого мы берём прямой образ, тоже является линейным расслоением. Для вычисления производного обратного и производного тензорного расслоения надо заменять объект на резольвенты из расслоений, а тут $\mathcal{P}$ и так является расслоением. Покажем, что у этого линейного расслоения на $A \times \hat{A} \times A$ есть другое описание: $\pi_{12}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{23}^*\tau(\mathcal{P}) \cong m_{13}^*\mathcal{P}$, где $m_{13} : A \times \hat{A} \times A \to A \times \hat{A}$ это сложение первой и третьей координаты, т.е., $m_{13}(x, y, z) = (x + z, y)$.

Для проверки, что на произведении трёх алгебраических многообразий два линейных расслоения изоморфны, можно использовать *теорему о кубе*:

Теорема 5.1.6 ([2, Thm. II.10] или [3, Tag 0BF4]): Пусть X, Y, Z — три связных многообразия над полем, из которых хотя бы два — собственные. Пусть L_1 и L_2 — два линейных расслоения на $X \times Y \times Z$. Если существуют такие точки $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, что ограничения расслоений L_1 и L_2 на каждую из трёх «граней» куба

$$\{x\} \times Y \times Z, \quad X \times \{y\} \times Z, \quad X \times Y \times \{z\},$$

изоморфны, то L_1 и L_2 изоморфны на всём $X \times Y \times Z$.

У нас как раз такая ситуация: мы имеем два линейных расслоения на тройном произведении $A \times \hat{A} \times A$: $\pi_{12}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{23}^*\tau(\mathcal{P})$ и $m_{13}^*\mathcal{P}$. Возьмём в качестве точек из теоремы о кубе групповые единицы в A и $\hat{A}$. Рассмотрим ограничения:

- ограничение на $\{0\} \times \hat{A} \times A$: поскольку $\mathcal{P}$ ограничивается на $\{0\} \times \hat{A}$ тривиально, на этом подмногообразии $\pi_{12}^*\mathcal{P}$ — тривиальное расслоение. Значит, $\pi_{12}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{23}^*\tau(\mathcal{P}) \mid_{\{0\} \times \hat{A} \times A}$ изоморфно $\tau(\mathcal{P})$. По определению отображение m_{13} отображает $\{0\} \times \hat{A} \times A$ в $A \times \hat{A}$ просто с помощью τ. Значит, ограничения двух линейных расслоений на $\{0\} \times \hat{A} \times A$ изоморфны.
- ограничение на $A \times \{0\} \times A$: аналогично предыдущему пункту мы видим, что и $\pi_{12}^*\mathcal{P}$, и $\pi_{23}^*\tau(\mathcal{P})$, и $m_{13}^*\mathcal{P}$ ограничиваются на это подмногообразие тривиально.
- ограничение на $A \times \hat{A} \times \{0\}$: здесь всё так же, как в первом пункте, только первая и третья координата поменялись местами.

Следовательно, по теореме о кубе $\pi_{12}^*\mathcal{P} \otimes \pi_{23}^*\tau(\mathcal{P}) \cong m_{13}^*\mathcal{P}$.

<u>Шаг 3</u>: Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
A \times \hat{A} \times A \arrow[r, "m_{13}"] \arrow[d, "\pi_{13}"'] & A \times \hat{A} \arrow[d, "\pi_A"] \\
A \times A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

В двух предыдущих шагах доказательства мы показали, что ядро Фурье–Мукаи для композиции $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ изоморфно $\pi_{13*}m_{13}^*\mathcal{P}$. Квадрат выше — декартов, причём морфизмы π_A и m оба плоские.

Из нерассказанного на лекции: Почему $m : A \times A \to A$ плоский? Рассмотрим автоморфизм $A \times A$, заданный формулой $(x, y) \mapsto (x, x + y)$. Тогда отображение m это композиция этого автоморфизма и проекции на вторую координату. Композиция плоских морфизмов всегда плоская. Но на самом деле для теоремы о замене базы достаточно плоскости одного из морфизмов, поэтому это несущественно.

В этой ситуации мы можем применить теорему о замене базы из прошлой лекции. Она утверждает, что объект $\pi_{13*}m_{13}^*\mathcal{P} \in D(A \times A)$ изоморфен объекту $m^*\pi_{A*}\mathcal{P}$. По утверждению 5.1.1 объект $\pi_{A*}\mathcal{P}$ изоморфен $\mathcal{O}_{\{0\}}[-g]$. Следовательно, ядро Фурье–Мукаи для композиции $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ изоморфно объекту $m^*\mathcal{O}_{\{0\}}[-g] \in D(A \times A)$.

<u>Шаг 4</u>: Поскольку $m : A \times A \to A$ — плоский морфизм, производный обратный образ относительно m совпадает с непроизводным. Обратный образ пучка-небоскрёба $\mathcal{O}_{\{0\}}$, то есть структурного пучка замкнутой подсхемы $\{0\} \subset A$, это структурный пучок прообраза $m^{-1}(0) \subset A \times A$ нулевой точки относительно сложения. Иными словами, $m^*\mathcal{O}_{\{0\}}$ это структурный пучок антидиагональной подсхемы

$$A \hookrightarrow A \times A, \quad x \mapsto (x, -x),$$

а это не что иное, как график Γ_ι морфизма ι_A. Значит, композиция $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ это преобразование Фурье–Мукаи с ядром, изоморфным $\Gamma_\iota[-g]$.

В прошлый раз мы видели, что преобразование Фурье–Мукаи относительно ядра, которое является графиком морфизма, это производный прямой образ вдоль этого морфизма (в данном случае совпадающий с обратным, так как ι_A это инволюция). Следовательно, функторы $\Phi_{\tau(\mathcal{P})} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ и $\iota_A^*[-g]$ оба являются преобразованиями Фурье–Мукаи, а их ядра изоморфны в $D(A \times A)$. Поэтому эти два функтора изоморфны, и теорема Мукаи доказана. □

5.2. Генераторы в триангулированных категориях

В теореме Мукаи мы видели, что одна и та же триангулированная категория может иметь несколько разных геометрических описаний. Сейчас мы поговорим о более алгебраическом способе описывать триангулированные категории. В алгебре объекты часто задаются с помощью набора образующих и соотношений. Для триангулированных категорий есть вполне удовлетворительный способ сказать, что значит, что категория порождается объектом или набором объектов. Это мы сейчас и обсудим.

Из нерассказанного на лекции: Если аналог «порождающих элементов» для триангулированных категорий получается вполне естественным, то что такое в этой аналогии «соотношения» — сложный вопрос, и не факт, что вообще осмысленный. Что-то непонятное.

Определение 5.2.1: Пусть T — триангулированная категория, $E \in T$ — какой-нибудь объект. Тогда через $\langle E \rangle \subset T$ обозначим наименьшую триангулированную подкатегорию в T, которая содержит E и замкнута относительно взятия прямых слагаемых.

Определение 5.2.2: Объект $G \in T$ называется *классическим генератором*, если $\langle G \rangle = T$. Иначе говоря, любой объект из T можно соорудить из G, применяя операции прямых сумм, сдвигов, конусов морфизмов, а так же переходя к прямым слагаемым.

Замечание: Зачем в определении нужны прямые слагаемые, мы немного обсудим позже. Легко сказать неправильный ответ: для удобства. Как правило, при построении классического генератора доказывается, что есть набор объектов $G_1, \ldots, G_k$ такой, что с помощью этих объектов можно соорудить любой объект из T, и тогда можно в качестве классического генератора взять их прямую сумму $\bigoplus_{i=1}^k G_i$. При определении, где разрешается переходить к прямым слагаемым, этот переход от конечного множества порождающих к одному объекту, являющемуся их прямой сумме, ничего не меняет. Это, в целом, удобно, но возможность писать «пусть G — классический генератор» вместо чего-то в духе «пусть $G_1, \ldots, G_k$ — классическое порождающее множество» — недостаточно серьёзная причина для того, чтобы добавлять это подозрительное условие в определение 5.2.1. Есть и более серьёзные.

Из нерассказанного на лекции: Другой естественный вопрос — что в этом термине означает слово «классический». Просто *генератором* в триангулированной категории T называют такой объект $G \in T$, что для любого ненулевого объекта $E \in T$ градуированные пространства $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, E)$ и $\mathrm{Ext}^\bullet_T(E, G)$ оба не равны нулю. Любой классический генератор является генератором (упражнение!), но не наоборот. Оба вида генераторов бывают полезны, но для нас, поскольку мы работает с «маленькими» категориями вроде $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ для гладкого проективного X, оказываются важнее классические генераторы.

Пусть $G \in T$ — какой-нибудь объект. Прямые суммы и сдвиги — это простые операции. Но в подкатегории $\langle G\rangle$ содержатся, например, конусы всяких морфизмов вроде

$$G \oplus G[-1] \to G[11] \oplus G[3].$$

Как мы знаем, любые подобные морфизмы между прямыми суммами сдвигов объекта G задаются матрицей из элементов $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, G)$ разных степеней. Поэтому в первом приближении можно сказать, что информация о том, какие объекты лежат в подкатегории $\langle G\rangle$ и как вообще эта подкатегория устроена, зависит от структуры градуированной алгебры $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, G)$. Если же $G \in T$ — классический генератор, то тогда получилось бы, что эта градуированная алгебра что-то нам сообщает обо всей категории T. Эта интуитивная картинка в самом деле может быть доведена до на удивление мощного результата.

Теорема 5.2.3: Пусть T — достаточно хорошая триангулированная категория (например, $D(X)$ для гладкого проективного многообразия X), а $G \in T$ — классический генератор. Тогда:

- Если $\mathrm{Ext}^i_T(G, G) = 0$ при $i \neq 0$, а $\mathrm{Hom}_T(G, G)$ это алгебра A, то T эквивалентна категории $\mathrm{Perf}(A - \mathrm{mod})$, то есть подкатегории в производной категории конечно-порождённых A-модулей, состоящей из комплексов, квазиизоморфных конечным комплексам из свободных модулей (это называется категорией *совершенных комплексов*).
- ([4, (4.3)][1]) Без ограничений на $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, G)$ всегда существует некоторая dg-алгебра $\mathcal{A}$, чьи когомологии изоморфны $\mathrm{Ext}^\bullet_T(G, G)$, и эквивалентность категорий $T \simeq \mathrm{Perf}(\mathcal{A} - \mathrm{dgmod})$ с категорией совершенных dg-модулей над $\mathcal{A}$.

Иными словами, классический генератор и его алгебра отображений в себя (по крайней мере в dg-смысле) полностью описывают категорию.

5.3. Существование классических генераторов

В этом разделе мы докажем, что для любого гладкого (квази)проективного многообразия X в категории $D(X)$ существует классический генератор. Мы, как всегда, формулируем только нужный нам случай, а вообще это верно в очень большой общности (по крайней мере если рассматривать не всю ограниченную производную когерентных пучков $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$, а подкатегорию совершенных комплексов). Общее утверждение доказано в [5].

[1] В статье Келлера речь о стабильных категориях фробениусовых категорий (что бы это ни значило); производная категория от абелевой категории, в которой достаточно много инъективных объектов, является таковой. А именно, надо рассмотреть категорию комплексов объектов в абелевой категории, задать на ней точную структуру, где точными тройками будут почленно расщепимые короткие точные последовательности комплексов, и взять стабильную категорию от получившейся фробениусовой категории.

Из нерассказанного на лекции: Легко видеть, что если X — аффинное гладкое многообразие, то структурный пучок $\mathcal{O}_X$ является классическим генератором в $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. В самом деле, если $X \cong \mathrm{Spec}(R)$ для кольца R, то $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ это ограниченная производная категория конечно-порождённых модулей над кольцом R. Любой ограниченный комплекс свободных модулей заведомо лежит в категории $\langle R \rangle \subset D^b(R - \mathrm{mod})$. Поскольку X гладкое, кольцо R имеет конечную гомологическую размерность, и у любого ограниченного комплекса модулей есть свободная резольвента конечной длины. Значит, $\langle R \rangle$ совпадает со всей категорией $D^b(R - \mathrm{mod}) \cong D^b_{\mathrm{coh}}(X)$. И тут даже не нужно брать прямые слагаемые для того, чтобы породить всю категорию.

Чтобы доказывать, что объект, который мы укажем ниже, в самом деле будет классическим генератором, нам понадобятся две леммы. Первая из них — более-менее про линейную алгебру.

Лемма 5.3.1: Пусть X — многообразие, а

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

— короткая точная последовательность из векторных расслоений на X. Тогда для любого целого числа $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существует длинная точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Sym}^k \mathcal{E} \to \ldots \to \mathrm{Sym}^2 \mathcal{E} \otimes \Lambda^{k-2} \mathcal{F} \to \mathcal{E} \otimes \Lambda^{k-1} \mathcal{F} \to \Lambda^k \mathcal{F} \to \Lambda^k \mathcal{G} \to 0,$$

где дифференциалы получаются при помощи коумножения $\mathrm{Sym}^i \mathcal{E} \to \mathrm{Sym}^{i-1} \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ симметрических степеней, вложения $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{F}$ и умножения $\mathcal{F} \otimes \Lambda^j \mathcal{F} \to \Lambda^{j+1} \mathcal{F}$ внешних степеней.

Доказательство: Поскольку дифференциалы заданы универсальным образом, достаточно проверить, что последовательность точна в слое над каждой точкой, то есть достаточно проверить случай, где $X = \{*\}$, а вместо векторных расслоений просто векторные пространства. Этот случай оставляю в качестве упражнения по мультилинейной алгебре (проще всего проверять точность, выбрав базис; все ядра и коядра порождены разложимыми тензорами). $\square$

Замечание: Этот комплекс полезно воспринимать как резольвенту для $\Lambda^k \mathcal{G}$ в терминах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$. Конечно же, есть аналогичная резольвента для $\mathrm{Sym}^k \mathcal{G}$, и, с другого конца, резольвенты для внешних и симметрических степеней $\mathcal{E}$ в терминах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Лемма 5.3.2: Рассмотрим в $D(\mathbb{P}^n)$ объект $G := \oplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i)$. Тогда в подкатегории $\langle G \rangle \subset D(\mathbb{P}^n)$ содержатся линейные расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)$ для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство: Пусть $\mathbb{P}^n$ это проективизация векторного пространства V, где размерность V равна $n+1$. Рассмотрим последовательность Эйлера для проективного пространства:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes V \to T_{\mathbb{P}(V)}(-1) \to 0.$$

Рассмотрим старшую, то есть n-тую, внешнюю степень $T_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ и напишем для неё резольвенту из леммы 5.3.1:

$$\begin{gathered} 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-n) \to \ldots \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-2) \otimes \Lambda^{n-2} V \to \\ \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \otimes \Lambda^{n-1} V \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \otimes \Lambda^n V \to \Lambda^n \Big(T_{\mathbb{P}(V)}(-1) \Big) \to 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Поскольку старшая внешняя степень $T_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ это $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ (упражнение; несложно выводится из последовательности Эйлера), то мы получили описание для $\mathcal{O}(1)$, использующее только прямые суммы линейных расслоений от $\mathcal{O}(-n)$ до $\mathcal{O}$. Эту же точную последовательность можно рассматривать, как описание $\mathcal{O}(-n)$ в терминах линейных расслоений от $\mathcal{O}(-n+1)$ до $\mathcal{O}(1)$.

Осталось объяснить, почему же из этого следует утверждение леммы. Рассмотрим набор «тупых» (stupid) обрезаний комплекса (1):

$$Q_n := [\mathcal{O}(-n)], \quad Q_{n-1} := [\mathcal{O}(-n) \to \mathcal{O}(-n+1) \otimes V], \quad \dots, \quad Q_0 := [\mathcal{O}(-n) \to \dots \to \mathcal{O} \otimes \Lambda^n V].$$

Точность последовательности (1) означает, что комплекс Q_0 имеет когомологии только в самом правом члене, и поэтому в производной категории $D(\mathbb{P}^n)$ комплекс Q_0 квазиизоморфен $\mathcal{O}(1)$. С другой стороны, покажем по индукции, что каждый комплекс Q_i лежит в подкатегории $\langle G \rangle \subset D(\mathbb{P}^n)$. Для комплекса Q_n это очевидно: $\mathcal{O}(-n)$ является прямым слагаемым G. Для комплекса Q_i при $i < n$ естественное отображение комплексов $Q_i \to Q_{i+1}$ вписывается в выделенный треугольник

$$\mathcal{O}(-i) \otimes \Lambda^{n-i} V[n-i] \to Q_i \to Q_{i+1} \to \mathcal{O}(-i) \otimes \Lambda^{n-i} V[n-i+1].$$

По предположению индукциии Q_{i+1} лежит в $\langle G \rangle$. Кроме того, поскольку $\mathcal{O}(-i)$ для $i \in [0; n]$ является прямым слагаемым G, то объект $\mathcal{O}(-i) \otimes \Lambda^{n-i} V[n-i]$, как сдвиг прямой суммы нескольких копий $\mathcal{O}(-i)$, тоже лежит в $\langle G \rangle$. По определению категория $\langle G \rangle$ — это триангулированная подкатегория в $D(\mathbb{P}^n)$, то есть конус любого морфизма между двуми объектами из этой подкатегории тоже лежит в ней. Значит, $Q_i \in \langle G \rangle$ для всех $i \in [0; n]$; в частности, мы доказали, что $\mathcal{O}(1) \in \langle G \rangle$.

Если рассмотреть подкрутку последовательности (1) на $\mathcal{O}(1)$, то получается описание того, как соорудить $\mathcal{O}(2)$, используя только линейные расслоения $\mathcal{O}(-n+1)$, ..., $\mathcal{O}(1)$, все из которых, как мы теперь знаем, лежат в $\langle G \rangle$. Поэтому $\mathcal{O}(2)$ лежит в этой подкатегории. Итерируя это рассуждение, получаем, что для любого $i \geq 0$ верно, что $\mathcal{O}(i) \in \langle G \rangle$.

Аналогичным образом, если рассмотреть подкрутку последовательности (1) на $\mathcal{O}(-1)$ и обрезать комплекс не с правого края, а с левого, то получится, что линейное расслоение $\mathcal{O}(-n-1)$ лежит в $\langle G \rangle$. Итерируя аргумент с более отрицательными подкрутками последовательности (1), получим, что для всех отрицательных i расслоения $\mathcal{O}(i)$ тоже содержатся в $\langle G \rangle$. Это завершает доказательство. $\square$

Теперь мы можем доказать, что в производных категориях когерентных пучков существуют классические генераторы.

Теорема 5.3.3: Пусть X — гладкое проективное многообразие. Тогда в $D(X)$ существует классический генератор.

Замечание: Доказательство работает и для квазипроективных многообразий. В статье [5] существование классического генератора (в категории совершенных комплексов) доказывается для любых квазикомпактных квазиотделимых схем интересным образом: классический генератор в производной категории всей схемы X «склеивается» из классических генераторов для производных категорий открытых подсхем для выбора какого-то покрытия X.

Доказательство: Поскольку X проективно, оно допускает вложение $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ в проективное пространство. Обозначим через $G \in D(X)$ прямую сумму $\bigoplus_{i=0}^n f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i)$. Мы покажем, что G является классическим генератором в $D(X)$.

Шаг 1: В лемме 5.3.2 мы явным образом показали, что для любого $i \in \mathbb{Z}$ линейное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)$ содержится в подкатегории $\langle \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i) \rangle \subset D(\mathbb{P}^n)$. Если в доказательстве рассматривать не комплексы векторных расслоений на $\mathbb{P}^n$, а их ограничения на X (отметим, что точная последовательность векторных расслоений остаётся точной после ограничения), то из доказательства следует, что для любого $i \in \mathbb{Z}$ объект $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i) \in D(X)$ лежит в подкатегории $\langle G \rangle \subset D(X)$.

Из нерассказанного на лекции: Это не очень элегантное рассуждение является частным случаем следующего факта: если $F : T_1 \to T_2$ это точный функтор между триангулированными категориями, то для любого $E \in T_1$ образ подкатегории $\langle E \rangle$ (т.е., множество объектов в T_2, являющихся образами каких-то объектов из $\langle E \rangle \subset T_1$) под действием F содержится в подкатегории $\langle F(E) \rangle \subset T_2$. Достаточно в качестве F взять функтор $f^* : D(\mathbb{P}^n) \to D(X)$. Доказательство пока оставлю в качестве упражнения, но в следующей лекции мы скорее всего это докажем.

Шаг 2: Пусть $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ — когерентный пучок на X. Поскольку пучок $f^*\mathcal{O}(1)$ на X обильный, для некоторого числа $N_0 \gg 0$ подкрутка $\mathcal{F}(N_0)$ будет глобально порождена, то есть существует сюръективное отображение $\mathcal{O}_X^{\oplus m_0} \twoheadrightarrow \mathcal{F}(N_0)$, где m_0 — размерность пространства глобальных сечений $H^0(\mathcal{F}(N_0))$. Назовём φ_0 подкрутку этой сюръекции на $-N_0$, то есть отображение $\mathcal{O}_X(-N_0)^{\oplus m_0} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$. Рассмотреть теперь когерентный пучок $\mathcal{F}_1 := \ker \varphi_0$. Для него тоже существуют некоторые $N_1, m_1 \gg 0$ и сюръекция $\mathcal{O}_X(-N_1)^{\oplus m_1} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_1$. Продолжая в том же духе, построим бесконечную резольвенту для пучка $\mathcal{F}$:

$$... \to \mathcal{O}_X(-N_2)^{\oplus m_2} \to \mathcal{O}_X(-N_1)^{\oplus m_1} \to \mathcal{O}_X(-N_0)^{\oplus m_0} \to \mathcal{F} \to 0. \qquad (2)$$

Шаг 3: Пусть $d = \dim(X)$. Рассмотрим фрагмент построенного в предыдущем шаге комплекса:

$$Q := \left[\mathcal{O}_X(-N_d)^{\oplus m_d} \to ... \to \mathcal{O}_X(-N_0)^{\oplus m_0}\right].$$

Заметим, что Q лежит в подкатегории $\langle G \rangle \subset D(X)$: в Шаге 1 мы доказали, что все линейные расслоения $\mathcal{O}_X(-N_i)$ лежат в $\langle G \rangle$, а комплекс Q состоит из таких расслоений (сравните с доказательством леммы 5.3.2).

Из точности резольвенты (2) следует, что у комплекса Q есть только два ненулевых пучка когомологий: пучок $\mathcal{H}^0(Q)$ изоморфен $\mathcal{F}$ по построению, а пучок $\mathcal{H}^{-d}(Q)$ обозначим для краткости $\mathcal{H}$. Тогда треугольник обрезания для Q имеет вид

$$\mathcal{H}[d] \to Q \to \mathcal{F} \xrightarrow{\xi} \mathcal{H}[d+1].$$

Стрелка ξ является морфизмом в $D(X)$ между сдвигами двух когерентных пучков. Как мы знаем из второй лекции, ξ является элементом группы $\mathrm{Ext}^{d+1}_{\mathrm{Coh}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$. Однако X — гладкое многообразие размерности d. Поэтому его категория когерентных пучков имеет гомологическую размерность d, то есть Ext^{d+1}_X между любыми когерентными пучками равен нулю. Значит, $\xi = 0$.

Упражнение 5.3.4: Пусть T — триангулированная категория, а A и B — два объекта в T. Докажите, что конус нулевого морфизма $\mathrm{Cone}\left(A \xrightarrow{0} B\right)$ изоморфен прямой сумме $B \oplus A[1]$. (*Указание*: постройте расщепляющий морфизм $\mathrm{Cone}\left(A \xrightarrow{0} B\right) \to B$.)

Поскольку $\xi = 0$, по упражнению выше конус ξ изоморфен прямой сумме $\mathcal{H}[d+1] \oplus \mathcal{F}[1]$. С другой стороны, из треугольника обрезания мы знаем, что этот конус изоморфен $Q[1]$. Значит, объект Q изоморфен прямой сумме своих пучков когомологий, $Q \simeq \mathcal{H}[d] \oplus \mathcal{F}$. Поскольку объект Q лежит в $\langle G \rangle$, согласно определению 5.2.1 пучок $\mathcal{F}$, являющийся прямым слагаемым в Q, тоже лежит в подкатегории $\langle G \rangle \subset D(X)$. Таким образом, подкатегория $\langle G \rangle$ содержит любой когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X.

Шаг 4: Покажем, что любой объект $E \in D(X) = D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ лежит в $\langle G\rangle$. У каждого E конечное число ненулевых пучков когомологий. Если только один пучок когомологий ненулевой, то E в производной категории изоморфно сдвигу когерентного пучка, и тогда $E \in \langle G\rangle$ по Шагу 3. Воспользуемся индукцией по числу ненулевых пучков когомологий в E. Если i — наибольший индекс, для которого $\mathcal{H}^i(E) \neq 0$, то рассмотрим треугольник обрезания

$$\tau_{<i}(E) \to E \to \mathcal{H}^i(E)[-i] \to \tau_{<i}(E)[1].$$

По предположению индукции объекты $\tau_{<i}(E)$ и $\mathcal{H}^i(E)[-i]$ лежат в $\langle G\rangle$. Поскольку это триангулированная подкатегория, то конус морфизма между объектами из подкатегории тоже в ней лежит. Значит, E лежит в $\langle G\rangle$. Следовательно, $\langle G\rangle = D(X)$, то есть G является классическим генератором в $D(X)$. □

Замечание: Для многообразия $X = \mathbb{P}^n$ мы доказали, что объект $G \coloneqq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i)$ из леммы 5.3.2 является классическим генератором. Нетрудно убедиться, что градуированное пространство $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathbb{P}^n}(G, G)$ сосредоточено в степени ноль: в самом деле, это пространство изоморфно прямой сумме $\bigoplus_{i,j\in[0;n]} H^\bullet(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i-j))$. Если $i \geq j$, то у $\mathcal{O}(i-j)$ есть только нулевые когомологии, а если $i < j$ и оба этих числа лежат в интервале $[0;n]$, то у расслоений $\mathcal{O}(-n), \ldots, \mathcal{O}(-1)$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ нет вообще никаких когомологий. Значит, по теореме 5.2.3 категория $D(\mathbb{P}^n)$ эквивалентна производной категории конечно-порождённых модулей над алгеброй $\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^n}(G, G)$ (можно проверить, что эта алгебра имеет конечную гомологическую размерность и, следовательно, любой конечный комплекс конечно-порождённых модулей является совершенным комплексом). Это алгебраическое описание впервые появилось в статье Бейлинсона [6] и впоследствии оказалось очень полезно для изучения свойств векторных расслоений на проективных пространствах.

Библиография

[1] S. Mukai, «Duality between $D(X)$ and $D(h@X)$ with its application to Picard sheaves», *Nagoya Math. J.*, т. 81, сс. 153–175, 1981.

[2] Д. Мамфорд, *Абелевы многообразия.* Мир, 1971.

[3] T. Stacks project authors, «The Stacks project». 2024 г.

[4] B. Keller, «Deriving DG categories», *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, т. 27, вып. 1, сс. 63–102, 1994.

[5] A. Bondal и M. van den Bergh, «Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry», *Mosc. Math. J.*, т. 3, вып. 1, сс. 1–36, 258, 2003.

[6] А. Бейлинсон, «Когерентные лучки на $\mathbb{P}^n$ и проблемы линейной алгебры», *Функц. анализ и его прил.*, т. 12, вып. 3, сс. 68–69, 1978.