6. Сильные генераторы. Размерность Рукье.

6.1. Сильные генераторы: мотивация

Этот курс посвящён производным категориям когерентных пучков. Они являются триангулированными категориями, но не какими попало: они обладают многими замечательными свойствами. Например, в прошлый раз мы доказали, что в $D(X)$ всегда есть классический генератор — а у произвольной триангулированной категории его может и не быть. С точки зрения теории триангулированных категорий естественно задаться вопросом: а чем вообще производные категории когерентных пучков «лучше», чем произвольные триангулированные категории?

Про этот нечётко сформулированный вопрос можно думать по-разному: можно пытаться научиться отличать, какие именно триангулированные категории приходят из алгебраической геометрии, а можно вместо этого пытаться как-то аксиоматизировать набор получаемых в геометрической ситуации свойств, чтобы дальше изучать триангулированные категории, которые, условно говоря, «ничем не хуже», чем приходящие из геометрии. Второй подход вообще нередко возникает в математике: если в какой-то математической теории ряд примеров ведёт себя лучше, чем произвольные объекты, то, как правило, люди стараются аксиоматизировать полезные свойства этих примеров и обобщать доказанные для них теоремы на более широкие классы изучаемых объектов.

На столь философский вопрос невозможно дать полный и конкретный ответ. Условно я бы отметил такие аспекты триангулированных категорий вида $D(X)$:
- Между этими категориями есть много понятных функторов: например, для любого подмногообразия $Z \subset X$ есть функтор ограничения $D(X) \to D(Z)$, и т.п. При этом у всех таких функторов есть сопряжённые и с левой, и с правой стороны (благодаря двойственности Гротендика).
- Из гладкости и проективности X следует, что алгебраические объекты, возникающие при вычислениях в $D(X)$, довольно удобны. Например, все векторные пространства, как правило, конечномерны.
- Из более абстрактного и более «современного»: у таких категорий есть хорошие dg-оснащения, причём единственные. Поскольку мы dg-категории не обсуждали, про этот пункт сложно что-то сказать. (Если интересно, хорошим введением в dg-категории является курс Саши Кузнецова [1].)

В плане второго пункта можно дать такое определение:

Определение 6.1.1: Триангулированная категория T называется Ext-*конечной*, если для любых двух объектов $A, B \in T$ размерность пространства $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^i_T(A, B)$ конечна. Иными словами, каждое пространство $\mathrm{Ext}^i_T(A, B)$ конечномерно, и лишь для конечного числа индексов $i \in \mathbb{Z}$ это пространство не равно нулю.

Для гладкого собственного многообразия X категория $D(X)$ является Ext-конечной: собственность влечёт, что все пространства $\mathrm{Ext}^i(-,-)$ конечномерны, а гладкость — что лишь конечное число из них ненулевые.

С первым пунктом сложнее. Откуда, например, брать сопряжённые функторы? В геометрической ситуации мы использовали двойственность Гротендика и тот факт, что более-менее все интересующие нас функторы являются преобразованием Фурье–Мукаи. Бондал и ван ден Берг в статье [2] показали, что на самом деле эти геометрические аргументы, в общем-то, не обязательны, и существование сопряжённых функторов для функторов между категориями вида $D(X)$ следует уже из того, что в этих триангулированных категориях существует не просто классический генератор, а так называемый *сильный генератор*. Строгое определение мы дадим чуть позже (определение 6.2.5), а пока сформулируем данную в статье [2] теорему. Для формулировки нам понадобится следующее техническое условие, которое выполняется для всех встречающихся в нашем курсе категорий:

Определение 6.1.2: Триангулированная категория T называется *карубиевой*, если для любого объекта $E \in T$ любой идемпотент, то есть эндоморфизм $e \in \operatorname{Hom}_T(E, E)$, для которого $e^2 = e$, является проекцией на прямое слагаемое в каком-то разложении $E \simeq E_1 \oplus E_2$.

Теорема 6.1.3 ([2, Th. 1.3]): Пусть T — Ext-конечная карубиева триангулированная категория, в которой существует сильный генератор. Тогда:
- в категории T существует функтор Серра;
- для любой Ext-конечной категории T' любой точный функтор $F : T \to T'$ имеет правый сопряжённый функтор. Если в T' существует функтор Серра, то F имеет и левый сопряжённый функтор.

Из нерассказанного на лекции: В статье [2] доказывается более точное утверждение. Функтор $F : T \to \mathrm{Vect}$ в (абелеву) категорию векторных пространств называется *когомологическим*, если он переводит выделенные треугольники в точные последовательности векторных пространств, и называется функтором *конечного типа*, если для любого объекта $E \in T$ векторное пространство $F(E)$ конечномерно, и лишь для конечного множества целых чисел $i \in \mathbb{Z}$ пространство $F(E[i])$ ненулевое. Бондал и ван ден Берг доказали, что для Ext-конечной карубиевой триангулированной категории с сильным генератором любой когомологический функтор конечного типа является представимым. Из этого легко выводится и существование функтора Серра, и существование сопряжённых.

Следствие 6.1.4: Для двух гладких проективных многообразий X и Y любой точный функтор $F : D(X) \to D(Y)$ имеет и левый, и правый сопряжённые функторы.

Доказательство: Ниже мы докажем (теорема 6.3.1), что для гладкого проективного многообразия X категория $D(X)$ имеет сильный генератор. Мы уже знаем, что эта категория Ext-конечна, и она является карубиевой. Поэтому к любому точному функтору $D(X) \to D(Y)$ применима теорема 6.1.3. $\square$

6.2. Определение сильного генератора

Для определения нам понадобится два вспомогательных обозначения.

Определение 6.2.1: Пусть T — триангулированная категория, и пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset T$ — два подмножества объектов. Тогда обозначим через $\mathcal{E}_1 \star \mathcal{E}_2 \subset T$ множество таких объектов $E \in T$, для которых существует выделенный треугольник

$$E_1 \to E \to E_2 \to E_1[1],$$

где $E_1 \in \mathcal{E}_1$ и $E_2 \in \mathcal{E}_2$, а так же все прямые слагаемые таких объектов.

Упражнение 6.2.2: Покажите, что $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_1 \star \mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1 \star \mathcal{E}_2$. Покажите, что прямая сумма $E_1 \oplus E_2$ произвольных двух объектов $E_1 \in \mathcal{E}_1$ и $E_2 \in \mathcal{E}_2$ лежит в $\mathcal{E}_1 \star \mathcal{E}_2$.

Определение 6.2.3: Пусть $E \in T$ — какой-нибудь объект. Для каждого $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим подмножество $\langle E \rangle_i$ объектов в T индуктивно:
- $\langle E \rangle_0$ — множество (конечных) прямых сумм сдвигов E, а так же прямые слагаемые таких прямых сумм. Иными словами, те объекты, которые можно построить из E, используя операции сдвигов, прямых сумм, и перехода к прямым слагаемым.
- $\langle E \rangle_{i+1} \coloneqq \langle E \rangle_0 \star \langle E \rangle_i$, где $\star$ — это операция из определения 6.2.1.

Про это определение полезно думать так: $\langle E \rangle_i$ — это те объекты, которые можно соорудить из E, используя сколько угодно прямых сумм и сдвигов, но не более, чем i раз применив операцию конуса. С такой точки зрения утверждение ниже кажется вполне естественным. Напомним, что ранее мы ввели обозначение $\langle E \rangle$ для наименьшей триангулированной подкатегории в T, содержащей E и замкнутой относительно взятия прямых слагаемых.

Утверждение 6.2.4: $\langle E \rangle = \cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$.

Доказательство: Поскольку $\langle E \rangle$ — триангулированная подкатегория, содержащая E и замкнутая относительно взятия прямых слагаемых, то из определения 6.2.3 легко видеть, что в $\langle E \rangle$ содержатся все объекты из множества $\cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$. Поскольку $\langle E \rangle$ по определению является наименьшей триангулированной подкатегорией с такими свойствами, для доказательства утверждения достаточно показать, что множество объектов $\cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$ тоже задаёт триангулированную подкатегорию. Иными словами, это подмножество должно быть замкнуто относительно взятия конусов.

Пусть $E_i \in \langle E \rangle_i$ и $E_j \in \langle E \rangle_j$ — два объекта из объединения $\cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$. Рассмотрим выделенный треугольник

$$E_i \to F \to E_j \to E_i[1].$$

Покажем, что любой такой объект F лежит в $\langle E \rangle_{i+j+1}$. Мы доказываем это по индукции по сумме $i + j$; случай $i = j = 0$ очевиден из определения. Поскольку $E_i \in \langle E \rangle_i$, то в T существует выделенный треугольник

$$E_0 \to E_i \oplus R \to E_{i-1} \to E_0[1],$$

где $E_0 \in \langle E \rangle_0$, $E_{i-1} \in \langle E \rangle_{i-1}$, а R — некоторый объект. Рассмотрим коммутативный квадрат:

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & E_0 \arrow[d] \\
E_i \oplus R \arrow[r] & F \oplus R
\end{tikzcd}$$

где нижняя горизонтальная стрелка это прямая сумма отображения $E_i \to F$ и тождественного отображения $R \to R$. По аксиоме **TR4** этот квадрат можно продолжить до коммутативной диаграммы из выделенных треугольников, где C — некоторый объект из T:

$$
\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & E_0[1] \arrow[d] \\
E_i \oplus R \arrow[r] \arrow[d] & F \oplus R \arrow[r] \arrow[d] & E_j \arrow[r] \arrow[d] & (E_i \oplus R)[1] \arrow[d] \\
E_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & E_j \arrow[r] \arrow[d] & E_{i-1}[1] \arrow[d] \\
E_0[1] \arrow[r] & E_0[1] \arrow[r] & 0 \arrow[r] & E_0[2]
\end{tikzcd}
$$

Рассмотрим третью строку этой диаграммы. Объект C является является «расширением» объектов E_{i-1} и E_j. По предположению индукции мы знаем, что тогда C лежит в $\langle E \rangle_{i+j}$. Но тогда второй столбец диаграммы по определению показывает, что объект $F \oplus R$, а, следовательно, и сам объект F, лежат в подкатегории E_{i+j+1}. Значит, конус морфизма между двумя любыми объектами из $\cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$ лежит в $\cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$ и утверждение доказано. $\square$

Теперь мы, наконец, можем дать определение сильного генератора.

Определение 6.2.5: Объект $G \in T$ называется *сильным генератором*, если существует некоторое $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, для которого $\langle G \rangle_n = T$.

Сравните с определением классического генератора: по утверждению 6.2.4 объект G является классическим генератором, если $\cup_{i \geq 0} \langle G \rangle_i = T$. Этот генератор является сильным, если любой объект из T можно построить за глобально ограниченное количество конусов.

Отметим, что при построении классического генератора в категориях вида $D(X)$ в прошлой лекции никакой общей оценки на количество необходимых конусов мы не получили: например, в последнем шаге доказательства мы пользовались тем, что любой объект производной категории можно получить из когерентных пучков, склеивая их по очереди с помощью треугольников обрезания. Но это значит, что для построение объекта с тысячей ненулевых пучков когомологий мы использовали как минимум тысячу конусов. Поскольку тысяча тут — произвольно выбранное число, доказательство из прошлой лекции не гарантирует, что генератор сильный.

Упражнение 6.2.6: Пусть X — гладкое многообразие размерности $n > 1$. Покажите, для любого числа $N > 0$ в $D(X)$ существует неразложимый в прямую сумму объект E, у которого N ненулевых пучков когомологий. (*Указание*: пусть $\mathcal{O}_x$ — пучок-небоскрёб в точке $x \in X$. Тогда $\dim \operatorname{Ext}^n(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) = 1$. Склейте объект E последовательным применением этого нетривиального Ext'а. Проверьте, что получится неразложимый объект!).

Ниже мы докажем, что в категории $D(X)$ существует сильный генератор. Из этого следует, что построенный нами в прошлый раз классический генератор — тоже сильный.

Утверждение 6.2.7: Пусть T — триангулированная категория с сильным генератором. Тогда любой классический генератор в T является сильным.

Доказательство: Пусть G — сильный генератор для T. Если E является классическим генератором T, то по утверждению 6.2.4 любой объект T лежит в объединении $\cup_{i \geq 0} \langle E \rangle_i$. В частности, для некоторого $i \in \mathbb{Z}$ верно $G \in \langle E \rangle_i$. Легко проверить, что для любого $N \in \mathbb{Z}$ тогда верно, что $\langle G \rangle_N \subset \langle E \rangle_{Ni+N-1}$ (см. доказательство утверждения 6.2.4). Значит, если G — сильный генератор и $\langle G \rangle_N = T$, то E — тоже сильный генератор и $\langle E \rangle_{Ni+N-1} = T$. $\square$

6.3. Существование сильного генератора

Теорема 6.3.1: Пусть X — гладкое многообразие. Тогда в категории $D(X)$ существует сильный генератор.

Доказательство: Мы докажем это утверждение в предположении, что X (квази)проективно, хотя это и не является необходимым. Идея доказательства заключается в том, что тождественный функтор $D(X) \to D(X)$ надо интерпретировать как преобразование Фурье–Мукаи относительно структурного пучка диагонали и использовать триангулированную структуру в $D(X \times X)$.

Шаг 1. Пусть $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ — вложение X в проективное пространство. Рассмотрим тогда композицию

$$g : X \times X \xrightarrow{f \times f} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{n^2+2n},$$

где вторая стрелка — вложение Сегре. Тогда это тоже вложение подмногообразия. При этом $g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n^2+2n}}(1)$ изоморфно, в терминах вложения $f \times f$, линейному расслоению $\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{O}(1)$. Значит, по теореме из прошлой лекции расслоение

$$G := \bigoplus_{i=0}^{n^2+2n} \mathcal{O}(i) \boxtimes \mathcal{O}(i)$$

на $X \times X$ является классическим генератором.

Шаг 2. Обсудим, как устроено преобразование Фурье–Мукаи относительно объекта G, который является прямой суммой внешних тензорных произведений $\mathcal{O}(i) \boxtimes \mathcal{O}(i) \in D(X \times X)$.

Лемма 6.3.2: Пусть $E, E' \in D(X)$ — два объекта. Тогда преобразование Фурье–Мукаи Φ с ядром $E \boxtimes E' \in D(X \times X)$ задаётся формулой $\Phi(F) := R\Gamma(F \otimes E) \otimes E'$.

Доказательство: Пусть π_1, π_2 — две проекции из $X \times X$ на X. Тогда по определению $E \boxtimes E'$ это $\pi_1^* E \otimes \pi_2^* E'$. По определению преобразования Фурье–Мукаи и формуле проекции получаем, что

$$\Phi(F) \cong \pi_{2*}(\pi_1^*(F \otimes E) \otimes \pi_2^* E') \cong \pi_{2*}(\pi_1^*(F \otimes E)) \otimes E'.$$

По теореме о плоской замене базы композиция $\pi_{2*}(\pi_1^*(-))$ равна прямому образу при отображении $X \to \{*\}$ в точку, то есть вычислению гиперкогомологий, а затем обратному образу с точки на X. □

Следствие 6.3.3: Пусть $E, E' \in D(X)$ — два объекта. Тогда преобразование Фурье–Мукаи Φ с ядром $E \boxtimes E' \in D(X \times X)$ отображает любой объект $F \in D(X)$ в подмножество $\langle E' \rangle_0 \subset D(X)$.

Доказательство: Согласно лемме 6.3.2 $\Phi(F) \cong R\Gamma(E \otimes F) \otimes E'$, где $R\Gamma(E \otimes F)$ — градуированное векторное пространство, то есть прямая сумма сдвигов поля $\mathbb{C}$. Значит, $\Phi(F)$ это прямая сумма сдвигов копий E'. Следовательно, $\Phi(F)$ лежит в $\langle E' \rangle_0$. □

В нашем случае получается, что преобразование Фурье–Мукаи $\Phi_{\mathcal{O}(i) \boxtimes \mathcal{O}(i)}(-) : D(X) \to D(X)$ переводит любой объект в подмножество $\langle \mathcal{O}(i) \rangle_0 \subset D(X)$, а преобразование Φ_G относительно генератора $G \in D(X \times X)$ переводит любой объект в подмножество $\langle \oplus_{i=0}^{n^2+2n} \mathcal{O}(i) \rangle_0$.

Шаг 3. Пусть $G_X := \oplus_{i=0}^{n^2+2n} \mathcal{O}(i) \in D(X)$. В прошлом шаге мы доказали, что для любого объекта $F \in D(X)$ выполняется $\Phi_G(F) \in \langle G_X \rangle_0$. Из этого следует ограничение на образы преобразований Фурье–Мукаи, чьи ядра можно соорудить, используя G:

Лемма 6.3.4: Пусть $K \in D(X \times X)$ — какой-нибудь объект. Если K лежит в подмножестве $\langle G \rangle_i \subset D(X)$, то для преобразования Фурье–Мукаи Φ_K верно, что для всех $F \in D(X)$ объект $\Phi_K(F) \in D(X)$ лежит в подмножестве $\langle G_X \rangle_i$.

Доказательство: Докажем это утверждение по индукции по i. Начнём со случая $i = 0$. Если $V^\bullet$ — градуированное векторное пространство, то легко видеть, что $\Phi_{V^\bullet \otimes G}(F) \cong V^\bullet \otimes \Phi_G(F)$. Напомним, что «тензорное произведение» на градуированное векторное пространство — просто прямая сумма сдвигов объекта. Кроме того, несложно видеть, что если K' — прямое слагаемое K, то $\Phi_{K'}(F)$ — прямое слагаемое $\Phi_K(F)$ для любого объекта F. Значит, преобразование Фурье–Мукаи относительно любого объекта из $\langle G \rangle_0$ переводит все объекты в подмножество $\langle G_X \rangle_0$. Это доказывает случай $i = 0$ в лемме.

Пусть теперь $K \in \langle G \rangle_i$. Тогда по определению в $D(X \times X)$ существует выделенный треугольник

$$K_0 \to K \oplus K' \to K_{i-1} \to K_0[1],$$

где $K_0 \in \langle G \rangle_0$, а $K_{i-1} \in \langle G \rangle_{i-1}$. По определению преобразования Фурье–Мукаи для любого объекта $F \in D(X)$ в результате применения преобразований Фурье–Мукаи получается выделенный треугольник (упражнение!)

$$\Phi_{K_0}(F) \to \Phi_K(F) \oplus \Phi_{K'}(F) \to \Phi_{K_{i-1}} \to \Phi_{K_0}(F)[1].$$

По предположению индукции $\Phi_{K_0}(F)$ лежит в $\langle G_X \rangle_0$ и $\Phi_{K_{i-1}}(F)$ лежит в $\langle G_X \rangle_{i-1}$. Значит, $\Phi_K(F)$ лежит в $\langle G_X \rangle_i$, что мы и хотели доказать. □

Шаг 4. Поскольку $G \in D(X \times X)$ является классическим генератором, подкатегория $\langle G \rangle$ совпадает с $D(X \times X)$. По утверждению 6.2.4 это означает, что для какого-то $N \in \mathbb{Z}$ верно, что структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_\Delta \in D(X \times X)$ лежит в подмножестве $\langle G \rangle_N$. Тогда по лемме из предыдущего шага преобразование Фурье–Мукаи $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}$ относительно $\mathcal{O}_\Delta$ переводит любой объект $D(X)$ в объект из подмножества $\langle G_X \rangle_N$. Но это преобразование — тождественный функтор, $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}(F) \cong F$ для всех $F \in D(X)$. Следовательно, подмножество $\langle G_X \rangle_N$ совпадает со всей категорией $D(X)$. По определению это значит, что G_X является сильным генератором категории $D(X)$. □

6.4. Размерность Рукье

Мы доказали существование сильного генератора в категориях вида $D(X)$ для гладкого многообразия X. Сильный генератор порождает всю триангулированную категорию, используя лишь глобально ограниченное количество конусов. Если подробно изучить, скажем, сильные генераторы в $D(\mathbb{P}^1)$, то можно увидеть, что некоторые сильные генераторы порождают всю категорию «быстрее», чем прочие — достаточно меньшего количества конусов. Это отражается и в утверждении 6.2.7: там мы показали, что если в категории существует сильный генератор, то любой классический генератор является сильным, но при этом число конусов, необходимых для построения всех объектов категории, может сильно увеличиться.

Изучать свойства конкретных отдельных генераторов сложно и не то что бы очень полезно. Более осмысленен оказывается общий взгляд: Рафаэль Рукье в статье [3] определил инвариант триангулированных категорий, который впоследствии стал известен под названием «размерность Рукье».

Определение 6.4.1 ([3]): Пусть T — триангулированная категория. Тогда *размерностью Рукье* категории T называется наименьшее такое число N, для которого в T существует сильный генератор $G \in T$, удовлетворяющий $\langle G \rangle_N = T$. Размерность Рукье мы будем обозначать $\mathrm{rdim}(T)$. Если в T нет сильных генераторов, то считаем $\mathrm{rdim}(T) = \infty$.

Если X — гладкое проективное многообразие, мы для краткости будем писать $\mathrm{rdim}(X)$, имея в виду размерность Рукье категории $D(X)$.

Замечание: Рукье ввёл этот инвариант, изучая триангулированные категории, связанные с представлениями конечномерных алгебр (в частности, над конечными полями), а не геометрический случай производных категорий когерентных пучков на многообразиях. С помощью этого понятия размерности ему удалось доказать некоторые гипотезы из теории представлений [4].

Размерность Рукье у категории вычислить очень сложно: формально говоря, надо изучить все возможные сильные генераторы и для каждого понять, за сколько конусов удаётся построить произвольный объект. Даже для одного генератора это является сложной задачей. Рукье доказал такую общую оценку:

Утверждение 6.4.2 *([3])*: Пусть X — гладкое квазипроективное многообразие. Тогда выполняется неравенство $\dim(X) \le \mathrm{rdim}(X) \le 2\dim(X)$.

Доказательство мы за недостатком времени пропускаем. Вместо этого рассмотрим отдельно случай проективного пространства.

Утверждение 6.4.3: $\mathrm{rdim}(\mathbb{P}^n) = n$.

Доказательство: Согласно утверждению 6.4.2 размерность Рукье категории $D(\mathbb{P}^n)$ не может быть строго меньше, чем n. Поэтому достаточно предъявить сильный генератор в $D(\mathbb{P}^n)$, который порождает всю категорию за n конусов. Для построения сильного генератора мы будем использовать такой же метод, как в доказательстве теоремы 6.3.1: там ключевую роль играл структурный пучок диагонали, а у проективного пространства как раз существует очень хорошая резольвента диагонали.

Будем думать про проективное пространство $\mathbb{P}^n$ как про грассманниан $\mathrm{Gr}(1, V)$ одномерных подпространств в $(n+1)$-мерном векторном пространстве V. Тогда $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ — это тавтологическое одномерное подрасслоение в тривиальном расслоении $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \otimes V$ со слоем V. Рассмотрим на произведении $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ отображение расслоений

$$\pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \otimes V / \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)), \tag{1}$$

которое над точкой $([v_1], [v_2]) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ отображает вектор в прямой $\langle v_2 \rangle \subset V$ в класс этого же вектора в факторпространстве $V / \langle v_1 \rangle$. При этом над точкой $([v_1], [v_2])$ отображение слоёв нулевое тогда и только вектора v_1 и v_2 пропорциональны, то есть только в точках диагонали $\Delta_{\mathbb{P}^n} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. Заметим, что фактор-расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \otimes V / \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ изоморфно подкрутке $T_{\mathbb{P}^n}(-1)$ касательного расслоения к $\mathbb{P}^n$ согласно точной последовательности Эйлера. Отображение (1) после подкрутки на $\pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ даёт глобальное сечение s расслоения $T_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ на произведении $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. При этом s обращается в ноль только в точках диагонали. Следующая лемма позволяет построить с помощью этого s резольвенту диагонали:

Лемма 6.4.4: Пусть X — гладкое многообразие, $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на X, а $s \in \Gamma(X, \mathcal{E})$ — *регулярное* сечение, то есть коразмерность множества нулей s равна рангу расслоения $\mathcal{E}$. Тогда последовательность когерентных пучков на X

$$0 \to \Lambda^{\mathrm{rk}(\mathcal{E})} \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s} \Lambda^{\mathrm{rk}(\mathcal{E})-1} \mathcal{E}^\vee \to \ldots \to \Lambda^2 \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s} \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{\{s=0\}} \to 0$$

точна, где $\mathcal{O}_{\{s=0\}}$ — структурный пучок схемы нулей сечения s. Эта точная последовательность называется *резольвентой Кошуля* для сечения s.

Доказательство леммы сводится к коммутативной алгебре и мы его пропускаем. В общих чертах — поскольку точность последовательности можно проверять в локальных кольцах точек, достаточно проверить случай, когда X — локальное кольцо, $\mathcal{E}$ — тривиальное расслоение на нём, и тогда s — набор из нескольких элементов максимального идеала, классы которых в замкнутой точке линейно независимы. Гладкость X требовать не обязательно, достаточно коэн–маколеевости, если вы знаете, что это такое.

Легко проверить, что если $\mathcal{E} \coloneqq T_{\mathbb{P}^n}(-1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, то $\Lambda^k \mathcal{E}^\vee \cong \Omega^k_{\mathbb{P}^n}(k) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)$. Построенное нами сечение $s \in \Gamma(\mathcal{E})$ является регулярным, потому что оно обращается в ноль на диагонали, то есть подмногообразии коразмерности $n = \mathrm{rk}(\mathcal{E})$. Значит, по лемме 6.4.4 в категории $D(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$ существует квазиизоморфизм

$$[\Omega^n_{\mathbb{P}^n}(n) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n) \to \dots \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}] \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathcal{O}_\Delta. \tag{2}$$

Дальше мы следуем доказательству теоремы 6.3.1. Во-первых, согласно следствию 6.3.3 преобразование Фурье–Мукаи с ядром $\Omega^k_{\mathbb{P}^n}(k) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)$ переводит любой объект категории $D(\mathbb{P}^n)$ в подмножество $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k) \rangle_0 \subset D(\mathbb{P}^n)$. Обозначим через $G \in D(\mathbb{P}^n)$ прямую сумму $\oplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i)$. Поскольку квазиизоморфизм (2) означает, что структурный пучок диагонали $\mathcal{O}_\Delta \in D(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$ лежит в подкатегории $\langle \oplus_{i=0}^n \Omega^i(i) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-i) \rangle_n$, то по лемме 6.3.4 тождественный функтор, как преобразование Фурье–Мукаи относительно объекта $\mathcal{O}_\Delta \in D(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$, отправляет любой объект $D(\mathbb{P}^n)$ в подмножество $\langle G \rangle_n$, то есть G является сильным генератором $D(\mathbb{P}^n)$, порождающим всё за n шагов. Тогда $\mathrm{rdim}(\mathbb{P}^n) \leq n$. Однако размерность Рукье не может быть строго меньше, чем n, по утверждению 6.4.2. □

Из нерассказанного на лекции: Для произвольного многообразия похожим образом можно доказать оценку сверху из утверждения 6.4.2. В самом деле, пусть X — гладкое проективное многообразие. Тогда линейное расслоение $\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{O}(1)$ на $X \times X$ является обильным. Как мы обсуждали при построении классического генератора на $X \times X$ для когерентного пучка $\mathcal{O}_\Delta$ существует бесконечная резольвента вида

$$\dots \to (\mathcal{O}(-N_2) \boxtimes \mathcal{O}(-N_2))^{\oplus m_2} \to (\mathcal{O}(-N_1) \boxtimes \mathcal{O}(-N_1))^{\oplus m_1} \to \mathcal{O}_{X\times X} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_\Delta \to 0,$$

где N_i и m_i некоторые целые числа. Если обрезать эту резольвенту на $2n$-том шаге, то получится комплекс

$$P_\Delta \coloneqq [\mathcal{O}(-N_{2n}) \boxtimes \mathcal{O}(-N_{2n}))^{\oplus m_{2n}} \to \dots \to (\mathcal{O}(-N_1) \boxtimes \mathcal{O}(-N_1))^{\oplus m_1} \to \mathcal{O}_{X\times X}],$$

у которого только два ненулевых пучка когомологий, нулевые и $2n$-тые. Поскольку $X \times X$ — гладкое многообразие размерности $2n$, то, как мы обсуждали в прошлый раз, из соображений гомологической размерности комплекс P_Δ квазиизоморфен прямой сумме своих когомологий, то есть $\mathcal{O}_\Delta$ является прямым слагаемым P_Δ в производной категории. Значит, для любого объекта $F \in D(X)$ результат преобразования Фурье–Мукаи $\Phi_{P_\Delta}(F)$ это прямая сумма F и некоторого дополнительного объекта. С другой стороны, рассуждая как в доказательстве теоремы 6.3.1 или утверждения 6.4.3, мы получаем, что функтор Φ_{P_Δ} переводит любой объект из $D(X)$ в подмножество $\langle \oplus_{i=0}^{2n} \mathcal{O}(-N_i) \rangle_{2n}$. Поскольку это подмножество замкнуто относительно взятия прямых слагаемых и любой объект $F \in D(X)$ является прямым слагаемым в $\Phi_{P_\Delta}(F)$, мы получаем, что $\oplus_{i=0}^{2n} \mathcal{O}(-N_i)$ является сильным генератором $D(X)$, порождающим все объекты с помощью не более, чем $2n$ операций конуса.

Оценка снизу в утверждении 6.4.2 требует совершенно других методов (см. [3, Prop. 7.16]).

Почти ни для каких многообразий размерность Рукье явно посчитать не удаётся. В тех не очень многочисленных случаях, когда получилось, размерность Рукье оказывается равна обычной геометрической размерности многообразия. Есть общая гипотеза:

Гипотеза 6.4.5 *([5])*: Пусть X — гладкое проективное многообразие. Тогда $\mathrm{rdim}(X) = \dim(X)$.

Чтобы доказать эту гипотезу, ввиду нижней оценки из утверждения 6.4.2 достаточно для произвольного многообразии X предъявить оптимально быстрый сильный генератор. Но откуда его брать — непонятно. Известны такие случаи, где гипотеза 6.4.5 выполняется, то есть удалось построить подходящий сильный генератор:

- многообразия, у которых существует удобная резольвента диагонали: проективные пространства, квадрики, грассманианы, поверхности дель Пеццо, некоторые многообразия Фано и т.п.
- Орлов доказал эту гипотезу для всех кривых [5]. Напомним, что для гладкой кривой любой объект в производной категории распадается в прямую сумму своих пучков когомологий, поэтому достаточно предъявить генератор, который с помощью не более, чем одного конуса, позволит построить любой когерентный пучок на кривой. Но даже это совсем непросто! Это доказательство не использует резольвенту диагонали, а отдельно строит «резольвенты» для всех когерентных пучков.
- некоторые конечные накрытия многообразий из первого пункта ([6, Th. 1.6]) — например, K3-поверхность Ферма, то есть квартика $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ в $\mathbb{P}^3$. Грубо говоря, эта поверхность похожа на гиперплоскость $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$ с точностью до действия конечной группы.

Больше ничего существенного про вычисление размерности Рукье для многообразий неизвестно. Опровергнуть гипотезу кажется очень сложным: нужно будет доказать, что у некоторого многообразия никакой сильный генератор не будет достаточно быстрым. Оценка снизу на размерность Рукье в утверждении 6.4.2 получается сравнением с гомологической размерностью локального кольца какой-нибудь точки многообразия, то есть глобальная геометрия многообразия в этой оценке никакой роли не играет, а существенно других методов строить оценки снизу пока никто не придумал.

Библиография

[1] А. Кузнецов, «Записки лекций о DG-категориях». [Онлайн]. Доступно на: https://homepage.mi-ras.ru/~akuznet/dgcat/index-dgcat.htm

[2] A. Bondal и M. van den Bergh, «Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry», *Mosc. Math. J.*, т. 3, вып. 1, сс. 1–36, 258, 2003.

[3] R. Rouquier, «Dimensions of triangulated categories», *J. K-Theory*, т. 1, вып. 2, сс. 193–256, 2008.

[4] R. Rouquier, «Representation dimension of exterior algebras», *Invent. Math.*, т. 165, вып. 2, сс. 357–367, 2006.

[5] D. Orlov, «Remarks on generators and dimensions of triangulated categories», *Mosc. Math. J.*, т. 9, вып. 1, с. 153–159, back matter, 2009.

[6] M. Ballard, D. Favero, и L. Katzarkov, «A category of kernels for equivariant factorizations, II: further implications», *J. Math. Pures Appl. (9)*, т. 102, вып. 4, сс. 702–757, 2014.