7. Полуортогональные разложения.

При изучении сложных математических объектов часто бывает полезно понимать, как их можно построить с помощью более маленьких объектов, которые устроены проще. Например, у классических алгебраических объектов — группы, модули, представления — есть обычное понятие фильтрации подобъектами, позволяющее представить, скажем, произвольную конечную группу как последовательное расширение нескольких простых конечных групп. Для триангулированных категорий наиболее практичным аналогом понятия фильтрации является понятие *полуортогонального разложения*, которое мы обсудим в этой лекции. Столь хороших структурных теорем, как, например, теорема Жордана–Гёльдера для конечных групп, для триангулированных категорий и полуортогональных разложений не существует, но всё равно понятие очень важное и полезное. Его ввели Бондал и Капранов в статье [1].

7.1. Допустимые подкатегории

Перед определением полуортогонального разложения удобно ввести понятие допустимой подкатегории. Напомним, что подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ называется *строго полной*, если, во-первых, для любых двух объектов $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ выполняется равенство $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2)$, и, во-вторых, если объект $E \in \mathcal{C}$ изоморфен некоторому объекту $A \in \mathcal{A}$, то E лежит в $\mathcal{A}$.

Определение 7.1.1: Пусть T — триангулированная категория. Тогда строго полная триангулированная подкатегория $\mathcal{A} \subset T$ называется *допустимой слева* (соответственно, *справа*), если у функтора вложения $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow T$ существует левый (соответственно, правый) сопряжённый функтор. Подкатегория $\mathcal{A}$ называется *допустимой*, если она допустима и слева, и справа, то есть у ι существуют оба сопряжённых функтора.

Обсудим сначала некоторые следствия существования хотя бы одного сопряжённого функтора к вложению. Для конкретности я сформулирую все утверждения для допустимых слева подкатегорий, но их аналоги верны и для допустимых справа.

Лемма 7.1.2: Пусть $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow T$ — вложение левой допустимой подкатегори, а $L : T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к ι. Тогда композиция $L \circ \iota : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ изоморфна тождественному функтору на $\mathcal{A}$, то есть L является проектором из T на подкатегорию $\mathcal{A}$.

Доказательство: Это общее свойство сопряжённых функторов к строго полным функторам: для любых $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ верен изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(\iota(A_1)), A_2) \cong \mathrm{Hom}_T(\iota(A_1), \iota(A_2)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2).$$

Здесь первый изоморфизм следует из сопряжённости функторов, а второй — из того, что ι — строго полный функтор. Поскольку при фиксированном A_1 этот изоморфизм выполняется для любого A_2, по лемме Йонеды канонический морфизм коединицы сопряжения $L(\iota(A_1)) \to A_1$ является изоморфизмом. □

Следствие 7.1.3: Пусть $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow T$ — вложение левой допустимой подкатегори, а $L : T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к ι. Тогда $\mathcal{A}$ замкнута относительно взятия прямых слагаемых в T.

Доказательство: В самом деле, предположим, что для объекта $A \in \mathcal{A}$ существует изоморфизм $f : \iota(A) \simeq E \oplus F$ в категории T. Мы хотим доказать, что E и F лежат в $\mathcal{A} \subset T$. Пусть $\Phi : \mathrm{id}_T \Rightarrow \iota \circ L$ — естественное преобразование из сопряжённости L и ι (единица сопряжённости). Применив его к морфизму f, получим коммутативный квадрат:

$$
\begin{tikzcd}
\iota(A) \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\Phi(\iota(A)) = \mathrm{id}_{\iota(A)}"'] & & E \oplus F \arrow[d, "\Phi(E) \oplus \Phi(F)"] \\
\iota(L(\iota(A))) \arrow[rr, "\iota(L(f))"] & & \iota(L(E)) \oplus \iota(L(F))
\end{tikzcd}
$$

Поскольку f является изоморфизмом, то и $\iota(L(f))$ тоже изоморфизм. Отображение $\Phi(\iota(A))$ — изоморфизм, так как $L(\iota(A)) \cong A$. Значит, правая вертикальная стрелка, отображение $\Phi(E) \oplus \Phi(F)$, тоже изоморфизм. Из этого следует, что и $\Phi(E)$, и $\Phi(F)$ по отдельности тоже являются изоморфизмами. В частности, E изоморфно $\iota(L(E))$, объекту из образа вложения $\iota : \mathcal{A} \to T$. Поскольку $\mathcal{A}$ — строго полная подкатегория, это значит, что E тоже лежит в $\mathcal{A}$. □

Определение 7.1.4: Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — строго полная подкатегория. Тогда *левым ортогоналом* к $\mathcal{A}$ называется (строго) полная подкатегория ${}^{\perp}\mathcal{A} \subset T$, состоящая из объектов, не имеющих ненулевых отображений ни в какие объекты $\mathcal{A}$, то есть

$$
{}^{\perp}\mathcal{A} \coloneqq \{E \in T \mid \forall A \in \mathcal{A} \quad R\mathrm{Hom}_T(E, \iota(A)) = 0\}.
$$

Лемма 7.1.5: Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория, а $L : T \to \mathcal{A}$ – левый сопряжённый функтор к вложению $\iota : \mathcal{A} \to T$. Тогда объект $E \in T$ лежит в подкатегории ${}^{\perp}\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $L(E) = 0$.

Доказательство: Пусть $A \in \mathcal{A}$ — произвольный объект. Тогда по сопряжённости существует изоморфизм

$$
\mathrm{Hom}_T(E, \iota(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(E), A).
$$

Если $L(E) = 0$, то оба этих пространства равны нулю для любого A, что по определению означает, что $E \in {}^{\perp}\mathcal{A}$. И наоборот, если $L(E) \neq 0$, то можно в качестве A взять $L(E)$, и тогда в векторном пространстве с правой стороны содержится ненулевой элемент $\mathrm{id}_{L(E)} : L(E) \to L(E)$, то есть E не будет лежать в ${}^{\perp}\mathcal{A}$. □

Главным свойством допустимых (с какой-нибудь из сторон) подкатегорий является существование *треугольника проекции* для произвольного объекта объемлющей категории T:

Определение 7.1.6: Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда (левым) *треугольником проекции* для объекта $E \in T$ относительно подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ называется выделенный треугольник

$$
B \to E \to A \to B[1],
$$

где объект A лежит в $\mathcal{A}$, а объект B в ${}^{\perp}\mathcal{A}$.

Утверждение 7.1.7: Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда для каждого объекта $E \in T$ треугольник проекции

$$
B \to E \to A \to B[1]
$$

существует и единственен с точностью до единственного изоморфизма. Для любого морфизма $f : E' \to E$ в T существует единственный с точностью до изоморфизма морфизм треугольников проекции

$$\begin{array}{ccccccc}
B' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B'[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B[1]
\end{array}$$

в котором среднее отображение равно f. При этом с помощью этих отображений между треугольниками проекции каждый выделенный треугольник $E' \to E \to E'' \to E'[1]$ в категории T вписывается в 3×3-диаграмму из треугольников проекции:

$$\begin{array}{ccccccc}
B' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B'[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B'' & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B''[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B'[1] & \longrightarrow & E'[1] & \longrightarrow & A'[1] & \longrightarrow & B'[2]
\end{array}$$

где объекты A, A', A'' лежат в $\mathcal{A}$, а объекты B, B' и B'' — в ${}^{\perp}\mathcal{A}$.

Замечание: Напомним, что в 3×3-диаграмме по определению все квадраты коммутируют, кроме правого нижнего, который антикоммутирует.

Доказательство: Начнём с доказательства существования треугольника проекции. Пусть $L : T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к вложению $\iota : \mathcal{A} \to T$. Пусть $\Phi : \mathrm{id}_T \to \iota \circ L$ — естественное преобразование из сопряжённости L и ι. Тогда $\Phi(E)$ это морфизм $E \to \iota(L(E))$. По построению объект $\iota(L(E))$ лежит в $\mathcal{A} \subset T$. Пусть $B[1]$ это конус морфизма $\Phi(E)$:

$$B \to E \overset{\Phi(E)}{\to} \iota(L(E)) \to B[1]. \tag{1}$$

Докажем, что тогда объект B лежит в левом ортогонале к $\mathcal{A}$. Применим к треугольнику (1) функтор L. Поскольку L — триангулированный функтор, получим выделенный треугольник в $\mathcal{A}$:

$$L(E) \to L(E) \overset{L(\Phi(E))}{\to} L(\iota(L(E))) \to L(B)[1].$$

Так как $L(\iota(-))$ это тождественный функтор на $\mathcal{A}$ (лемма 7.1.2), объект $L(\iota(L(E)))$ в $\mathcal{A}$ изоморфен $L(E)$, причём из свойств сопряжённых функторов легко вывести, что $L(\Phi(E))$ это и есть изоморфизм. Конус изоморфизма — это всегда нулевой объект, то есть $L(B) = 0$. По лемме 7.1.5 это как раз означает, что $B \in {}^{\perp}\mathcal{A}$. Следовательно, для каждого $E \in T$ существует как минимум один треугольник проекции.

Перед тем, как доказывать единственность треугольников проекции, докажем функториальность: пусть $f : E' \to E$ — морфизм в категории T. Пусть $B \to E \to A \to B[1]$ — какой-нибудь (пока что мы ещё не доказали, что он единственный) треугольник проекции для E, а $B' \to E' \to A' \to B'[1]$ — для E'. Применив функтор $\mathrm{Hom}_T(-, A)$ к треугольнику проекции для E', получим точную последовательность

$$0 = \mathrm{Hom}(B'[1], A) \to \mathrm{Hom}(A', A) \to \mathrm{Hom}(E', A) \to \mathrm{Hom}(B', A) = 0.$$

Тут мы воспользовались тем, что $B' \in {}^{\perp}\mathcal{A}$ по определению. Значит, композиция отображений $E' \xrightarrow{f} E \to A$ единственным образом представляется в виде композиции $E' \to A' \xrightarrow{f_{\mathcal{A}}} A$ для некоторого отображения $f_{\mathcal{A}} : A' \to A$.

Аналогично показывается, что существует единственный морфизм $B' \to B$, делающий коммутативным квадрат из B', E', B и E. Аксиома **TR3** утверждает, что для некоторых выборов стрелок $A' \to A$ и $B' \to B$ получится морфизм выделенных треугольников, но если выбор однозначно определён, то построенные нами отображения годятся.

Из функториальности легко следует единственность треугольника проекции. Пусть даны два треугольника проекции для одного и того же объекта $E \in T$:

$$B \to E \to A \to B[1], \qquad B' \to E \to A' \to B'[1].$$

Тогда по доказанному выше тождественное отображение $E \xrightarrow{\mathrm{id}} E$ единственным образом продолжается до отображений между этими выделенными треугольниками в обе стороны, причём по всё той же единственности эти отображения будут взаимно обратными изоморфизмами.

Доказательство существования 3×3-диаграммы полностью аналогично доказательству существования морфизма треугольников проекции: по 3×3-лемме такая диаграмма существует для некоторого выбора морфизмов между компонентами из $\mathcal{A}$ и ${}^{\perp}\mathcal{A}$, но поскольку выбор этих морфизмов однозначно определён треугольником $E' \to E \to E'' \to E'[1]$, то построенные выше морфизмы между выделенными треугольниками подходят. ☐

Замечание: Отметим, что наличие сопряжённого функтора к вложению $\mathcal{A} \subset T$ мы использовали только для доказательства существования треугольника проекции, а для единственности и функториальности (для морфизмов между теми объектами, для которых треугольник проекции существует) достаточно было использовать определение подкатегории ${}^{\perp}\mathcal{A}$ и свойства триангулированных категорий.

Следствие 7.1.8: Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда наименьшая триангулированная подкатегория в T, содержащая и $\mathcal{A}$, и ${}^{\perp}\mathcal{A}$, это вся T.

Доказательство: По утверждению 7.1.7 любой объект $E \in T$ вписывается в треугольник проекции. Поэтому триангулированная подкатегория T, содержащая $\mathcal{A}$ и ${}^{\perp}\mathcal{A}$, обязательно содержит все объекты. ☐

Замечание: Иными словами, $\mathcal{A}$ и ${}^{\perp}\mathcal{A}$ вместе порождают всю категорию T, и даже необязательно добавлять прямые слагаемые, достаточно просто конусов.

Упражнение 7.1.9: Пусть X — гладкое проективное многообразие положительной размерности, и пусть $x \in X$ — какая-нибудь точка. Пусть $\mathcal{A}$ — строго полная подкатегория объектов в $D(X)$, чей носитель содержится в $\{x\}$ (то есть равен $\{x\}$ или пуст). Докажите, что $\mathcal{A}$ — триангулированная подкатегория, не являющаяся допустимой слева. (*Подсказка*: докажите, что ортогонал к $\mathcal{A}$ — это подкатегория объектов, чей носитель не содержит точку x.)

Пара $\mathcal{A}$ и ${}^{\perp}\mathcal{A}$ не просто порождает вместе всю категорию, но ещё и делает это в некотором смысле минимальным возможным образом. Например, верно следующее утверждение.

Утверждение 7.1.10: Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория, и пусть $\mathcal{B} \subset {}^{\perp}\mathcal{A}$ — триангулированная подкатегория. Предположим, что наименьшая триангулированная подкатегория в T, содержащая $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, равна T. Тогда $\mathcal{B} = {}^{\perp}\mathcal{A}$.

Доказательство: Обозначим через $T' \subset T$ подмножество объектов $E \in T$, которые могут быть вписаны в выделенный треугольник

$$B \to E \to A \to B[1],$$

где $A \in \mathcal{A}$, а $B \in \mathcal{B}$. Поскольку $\mathcal{B} \subset {}^\perp\mathcal{A}$, по единственности треугольника проекции из утверждения 7.1.7 это условие эквивалентно тому, что в треугольнике проекции для объекта $E \in T$ компонента из ${}^\perp\mathcal{A}$ — это объект подкатегории $\mathcal{B} \subset {}^\perp\mathcal{A}$.

Предположим, что $\mathcal{B}$ строго меньше, чем ${}^\perp\mathcal{A}$, и пусть $E \in {}^\perp\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ какой-нибудь объект. Треугольник проекции для E — это выделенный треугольник

$$E \to E \to 0 \to E[1].$$

По замечанию выше это означает, что E не лежит в подмножестве T'. Чтобы получить противоречие, достаточно доказать, что $T' = T$. Поскольку по определению подкатегории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ лежат в T', по условию задачи достаточно доказать, что T' является триангулированной подкатегорией.[1]

Подкатегория T', очевидно, замкнуто операции сдвига в производной категории. Для того, чтобы эта подкатегория была триангулированной, осталось показать, что если $f : E \to F$ — морфизм двух объектов из T', то конус f тоже лежит в T'. По утверждению 7.1.7 существует морфизм треугольников проекции

$$\begin{array}{ccccccc} B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B[1] \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B'[1] \end{array}$$

где A и A' лежат в $\mathcal{A}$, а B и B' в $\mathcal{B} \subset {}^\perp\mathcal{A}$, причём этот морфизм вписывается в 3×3-диаграмму, из чего следует, что существует выделенный треугольник из конусов

$$\mathrm{Cone}(B \to B') \to \mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{Cone}(A \to A') \to \mathrm{Cone}(B \to B')[1].$$

Поскольку $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — триангулированные подкатегории, то первый объект лежит в $\mathcal{B}$, а третий — в $\mathcal{A}$. Значит, объект $\mathrm{Cone}(f)$ по определению лежит в подмножестве T'.

Мы получили противоречие: T', будучи триангулированной подкатегорией, содержащей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, должно совпадать со всей категорией T, но никакой объект $E \in {}^\perp\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ не лежит в T'. Значит, множество ${}^\perp\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ пусто, то есть $\mathcal{B} = {}^\perp\mathcal{A}$. $\square$

Упражнение 7.1.11: Пусть, как в утверждении 7.1.10, $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория и $\mathcal{B} \subset {}^\perp\mathcal{A}$ — строго полная триангулированная подкатегория. Предположим теперь, что наименьшая триангулированная подкатегория в T, которая содержит $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и является замкнутой относительно перехода к прямым слагаемым, равна T. Докажите, что наименьшей триангулированной подкатегорией, содержащей $\mathcal{B}$ и замкнутой относительно взятия прямых слагаемых, является ${}^\perp\mathcal{A}$. (Это упражнение на понимание доказательства выше.)

Следствие 7.1.12: Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда ${}^\perp\mathcal{A} \subset T$ — допустимая справа подкатегория.

Доказательство: В утверждении 7.1.7 мы доказали, что треугольник проекции функториален. В частности, отображение, переводящее объект $E \in T$ в конус морфизма $E \to \iota(L(E))$, является функтором $T \to {}^\perp\mathcal{A}$. Нетрудно проверить по определению, что этот функтор будет сопряжённым справа к вложению ${}^\perp\mathcal{A} \to T$. $\square$

Замечание: Как мы обсуждали раньше, из-за того, что в аксиоме **TR3** мы не можем требовать единственности для морфизма конусов, операция конуса в триангулированных категориях

[1] Более строго было бы сказать, что T' — это подлежащее множество объектов строго полной подкатегории с такими свойствами. Мы используем стандартное упрощение терминологии.

не функториальна, и у произвольного естественного преобразования $\Phi : F \Rightarrow G$ между двумя точными функторами нельзя взять «конус» и получить третий функтор. В случае с допустимыми подкатегориями чудесным образом оказалось, что для строго полного функтора ι единица сопряжённости $\mathrm{id}_T \Rightarrow \iota \circ L$ вписывается в «треугольник» из функторов.

Мы обсудили много свойств допустимых слева подкатегорий. Для допустимых справа подкатегорий все аналогичные утверждения тоже верны. Для подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ можно аналогичным образом определить *правый ортогонал* $\mathcal{A}^{\perp} \subset T$ как подкатегорию объектов $E \in T$, для которых $R\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, E) = 0$. Тогда можно аналогично доказать, что для любого $E \in T$ существует функториальный (правый) треугольник проекции $A \to E \to C \to A[1]$, где $A \in \mathcal{A}$ и $C \in \mathcal{A}^{\perp}$, и что подкатегория $\mathcal{A}^{\perp}$ будет допустимой слева. Все эти утверждения оставляю в качестве упражнения. Они доказываются совершенно так же, как и в разобранном нами случае допустимой слева подкатегории.

Докажем только некоторую совместимость утверждений о допустимых слева и справа подкатегориях.

Лемма 7.1.13: Пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория. Тогда двойной ортогонал $\left({}^{\perp}\mathcal{A}\right)^{\perp} \subset T$ равен $\mathcal{A}$.

Доказательство: Рассмотрим допустимую справа подкатегорию ${}^{\perp}\mathcal{A} \subset T$, и пусть $R : T \to {}^{\perp}\mathcal{A}$ это сопряжённый справа к вложению функтор. Аналог леммы 7.1.5 для допустимых справа подкатегорий утверждает, что объект $E \in T$ лежит в $\left({}^{\perp}\mathcal{A}\right)^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $R(E) = 0$. С другой стороны, по построению функтора R в следствии 7.1.12, это случается тогда и только когда, когда в треугольнике проекции для E относительно допустимой слева подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ компонента из ${}^{\perp}\mathcal{A}$ равна нулю. Но это означает, что $L(E) \simeq E$, то есть E лежит в $\mathcal{A}$, как мы и хотели. □

7.2. Допустимость как внутреннее свойство

В геометрическом случае у многих функторов сопряжённые имеются с обеих сторон: например, для производного прямого образа мы построили правый сопряжённый функтор с помощью двойственности Серра. С допустимыми подкатегориями тоже возникает такой феномен: часто из допустимости с одной стороны следует допустимость и с другой тоже. Это объясняется теоремой Бондала и ван ден Берга [2], которую мы обсуждали в прошлый раз.

Утверждение 7.2.1: Пусть T — Ext-конечная карубиева триангулированная категория, в которой существует сильный генератор. Для строго полной подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ следующие условия эквивалентны:
- $\mathcal{A} \subset T$ допустима хотя бы с одной стороны;
- в $\mathcal{A}$ существует сильный генератор и она замкнута относительно перехода к прямым слагаемым в T;
- $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая подкатегория.

Доказательство: Покажем, что из первого условия следует второе. Предположим, что $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая слева подкатегория, а $L : T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к вложению. Если $G \in T$ — какой-нибудь объект, то легко видеть, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ образ подмножества $\langle G \rangle_k \subset T$ под действием L содержится в подмножестве $\langle L(G) \rangle_k$ (упражнение). По лемме 7.1.2 мы знаем, что L сюръективен на объектах. Значит, если $G \in T$ — сильный генератор, то $L(G)$ — сильный генератор в $\mathcal{A}$. Кроме того, по следствию 7.1.3 подкатегория $\mathcal{A}$ замкнута относительно перехода к прямым слагаемым в T. Поэтому такая подкатегория $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям из второго пункта. Аналогичный аргумент работает и для допустимых справа подкатегорий.

Предположим теперь, что для $\mathcal{A}$ выполнено второе условие. Тогда $\mathcal{A}$ и T — две Ext-конечные карубиевы триангулированные категории с сильным генератором. По теореме Бондала и ван ден Берга из прошлой лекции у любого точного функтора $\mathcal{A} \to T$ есть и левый, и правый сопряжённый функторы. В частности, это верно для функтора вложения $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow T$. Значит, $\mathcal{A}$ — допустимая подкатегория, и из второго условия следует третье. А из третьего первое следует очевидным образом. $\square$

Следствие 7.2.2: Пусть X — гладкое проективное многообразие. Если строго полная подкатегория $\mathcal{A} \subset D(X)$ допустима хотя бы с одной стороны, то она допустима. Тогда подкатегории ${}^{\perp}\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{\perp}$, то есть левый и правый ортогоналы к $\mathcal{A}$, тоже являются допустимыми.

Доказательство: В прошлой лекции мы доказали, что в $D(X)$ существует сильный генератор. При этом X гладкое и проективное, поэтому категория $D(X)$ будет Ext-конечна, и, как мы упоминали без доказательства, карубиева. Поэтому к подкатегории $\mathcal{A} \subset D(X)$ применимо утверждение 7.2.1. По следствию 7.1.12 подкатегория ${}^{\perp}\mathcal{A}$ является допустимой справа подкатегорией, но тогда опять-таки по утверждению 7.2.1 она допустима с двух сторон. $\square$

Важным следствием утверждения 7.2.1 является тот факт, что допустимость подкатегории $\mathcal{A}$ удалось характеризовать в терминах триангулированной структуры самой этой подкатегории.

Следствие 7.2.3: Пусть $\mathcal{A}$ — Ext-конечная карубиева триангулированная категория с сильным генератором. Тогда при любом строго полном вложении $\mathcal{A} \hookrightarrow T$ в Ext-конечную карубиеву триангулированную категорию T с сильным генератором образ этого вложения будет допустимой подкатегорией в T.

Доказательство: Очевидное следствие из второго пункта утверждения 7.2.1. $\square$

Например, любое строго полное вложение $D(Y) \hookrightarrow D(X)$ для гладких проективных многообразий X и Y будет задавать допустимую подкатегорию в $D(X)$.

Если работать не только с гладкими проективными многообразиями, а, например, просто с гладкими, но не собственными, то аналог следствия 7.2.2 уже неверен, и надо аккуратно следить, какие подкатегории с какой стороны допустимы, или в каждом случае отдельно доказывать существование сопряжённых функторов с двух сторон.

7.3. Полуортогональные разложения

В утверждении 7.1.7 мы показали, что как только у нас появляется допустимая слева подкатегория, то любой объект объемлющей категории раскладывается в выделенный треугольник на объект из этой подкатегории и из её ортогонала. Обобщением этой ситуации является понятие полуортогонального разложения.

Определение 7.3.1: Пусть T — триангулированная категория. *Полуортогональным разложением* T называется последовательность $\langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ строго полных подкатегорий, удовлетворяющих условиям:
- все $\mathcal{A}_i \subset T$ — допустимые подкатегории в T;
- для любых $j > i$ выполняется *полуортогональность*: $R\mathrm{Hom}_T(\mathcal{A}_j, \mathcal{A}_i) = 0$.
- эти подкатегории вместе порождают T.

Уточню, что второе условие — сокращённая запись того, что для любых двух объектов $A_j \in \mathcal{A}_j$ и $A_i \in \mathcal{A}_i$ верно равенство $R\mathrm{Hom}_T(A_j, A_i) = 0$, а третье означает, что наименьшая триангулированная подкатегория в T, содержащая все $\mathcal{A}_i$, совпадает с T. (Эта подкатегория в любом случае будет замкнута относительно перехода к прямым слагаемым, как мы увидим ниже.)

Замечание: В более технически продвинутых источниках, чем наш курс, такое полуортогональное разложение обычно называют *сильным*: мы требуем допустимости всех компонент, а можно накладывать менее сильные условия. Например, полуортогональным разложением с двумя компонентами обычно называется ситуация, когда левая компонента допустима слева, а правая — допустима справа. Но в виду следствия 7.2.2 при изучении гладких проективных многообразий любое полуортогональное разложение будет сильным.

Упражнение 7.3.2: Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ — полуортогональное разложение, а $\Phi : T \to T$ — автоэквивалентность категории T. Покажите, что $T = \langle \Phi(\mathcal{A}_1), ..., \Phi(\mathcal{A}_n) \rangle$ — тоже полуортогональное разложение.

Изучать полуортогональные разложения — это примерно то же самое, что изучать допустимые подкатегории. В частности, полуортогональное разложение с двумя компонентами однозначно задаётся одной из своих компонент.

Лемма 7.3.3: Пусть X — гладкое проективное многообразие. Тогда существует биекция между:
- полуортогональными разложениями $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ на две компоненты; и
- допустимыми подкатегориями $\mathcal{A} \subset D(X)$.

Доказательство: Надо показать, что любая допустимая подкатегория $\mathcal{A} \subset D(X)$ единственным образом дополняется до полуортогонального разложения $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. В одну сторону мы это уже доказали: по следствию 7.1.8 пара подкатегорий $\mathcal{A}$ и ${}^{\perp}\mathcal{A}$ порождают $D(X)$, а по следствию 7.2.2 они обе допустимы. Значит, по определению $D(X) = \langle \mathcal{A}, {}^{\perp}\mathcal{A} \rangle$ является полуортогональным разложением.

Осталось доказать единственность. Предположим, что $\mathcal{B} \subset D(X)$ — другая допустимая подкатегория, дополняющая $\mathcal{A}$ до полуортогонального разложения $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. По условие полуортогональности получаем, что $\mathcal{B} \subset {}^{\perp}\mathcal{A}$. Если эти две категории не равны, то по утверждению 7.1.10 получаем, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не порождают всю категорию $D(X)$, противоречие. □

Для полуортогональных разложений существует аналог треугольников проекции:

Утверждение 7.3.4: Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ — полуортогональное разложение. Тогда для каждого объекта $E \in T$ существует и единственна с точностью до единственного изоморфизма цепочка морфизмов

$$0 = E_n \to E_{n-1} \to ... \to E_1 \to E_0 = E,$$

где для каждого i конус морфизма $E_i \to E_{i-1}$ лежит в подкатегории $\mathcal{A}_i$.

Доказательство мы опустим, оно аналогично случаю полуортогонального разложения с двумя компонентами, то есть утверждению 7.1.7. Достаточно знать следующую лемму, позволяющую применить индукцию по числу компонент:

Лемма 7.3.5: Пусть T — Ext-конечная карубиева триангулированная подкатегория с сильным генератором. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset T$ — пара допустимых подкатегорий. Предположим, что они полуортогональны: $\mathcal{B} \subset {}^{\perp}\mathcal{A}$. Тогда триангулированная подкатегория $\mathcal{C} \subset T$, порождённая $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, является допустимой, а $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — её полуортогональное разложение.

Замечание: При работе с производными категориям когерентных пучков на многообразиях, которые не обязаны быть гладкими проективными, такой удобной леммы уже нет, но довольно часто в таких случаях допустимость $\mathcal{C} \subset T$ с какой-нибудь из сторон удаётся доказать, явно построив сопряжённый к вложению функтор в терминах сопряжённых функторов для допустимых (с разных сторон) вложений $\mathcal{A} \subset T$, ${}^{\perp}\mathcal{A} \subset T$, $\mathcal{B} \subset T$ и ${}^{\perp}\mathcal{B} \subset T$.

Доказательство: Рассмотрим подмножество $\mathcal{C}'$ тех объектов $E \in T$, которые могут быть вписаны в выделенный треугольник вида

$$B \to E \to A \to B[1],$$

где $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$. В утверждении 7.1.10 мы доказали, что $\mathcal{C}'$ — триангулированная подкатегория. Тогда $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, то есть любой объект из $\mathcal{C}$ допускает выделенный треугольник такого вида.

Рассуждая в духе утверждения 7.1.10, можно показать, что из того, что $\mathcal{B}$ замкнуто относительно перехода к прямым слагаемым следует, что $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ тоже замкнута относительно перехода к прямым слагаемым (это, по сути, упражнение 7.1.11). В терминах операции $*$ из определения сильных генераторов это, в частности, означает, что $\mathcal{C} = \mathcal{B} * \mathcal{A}$.

Поскольку $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — допустимые подкатегории в T, по утверждению 7.2.1 в них существуют сильные генераторы $G_{\mathcal{A}}$ и $G_{\mathcal{B}}$. Пусть тогда $G \coloneqq G_{\mathcal{A}} \oplus G_{\mathcal{B}}$ — объект $\mathcal{C}$. Если $\mathcal{A} = \langle G_{\mathcal{A}} \rangle_N$ и $\mathcal{B} = \langle G_{\mathcal{B}} \rangle_M$, то, используя операцию $*$ из определения сильных генераторов, получаем

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}' = \mathcal{B} * \mathcal{A} = \langle G_{\mathcal{B}} \rangle_M * \langle G_{\mathcal{A}} \rangle_N \subset \langle G \rangle_{N+M+1}.$$

Значит, G является сильным генератором в $\mathcal{C}$. Следовательно, категория $\mathcal{C}$ удовлетворяет всем условиям второго пункта утверждения 7.2.1, и, значит, является допустимой подкатегорией в T.

Чтобы доказать, что $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение категории $\mathcal{C}$, по определению достаточно только объяснить, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ — допустимые подкатегории в $\mathcal{C}$. Это заведомо так, например, по следствию 7.2.3, но легко доказывается и по определению: например, если $L : T \to \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к вложению $\mathcal{A} \hookrightarrow T$, то композиция $\mathcal{C} \hookrightarrow T \xrightarrow{L} \mathcal{A}$ — левый сопряжённый функтор к вложению $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$. $\square$

Замечание: Заметим, что если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не были бы полуортогональны, то совершенно непонятно, будет ли в порождённой ими триангулированной подкатегории сильный генератор. Благодаря описанию $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ из леммы мы знаем, что переход от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ к $\mathcal{C}$ в полуортогональном случае требует лишь одной дополнительной операции конуса, а вообще могли бы быть и сколь угодно длинные цепочки.

7.4. Исключительные объекты и исключительные наборы

Исторически первые примеры допустимых подкатегорий (и, соответственно, полуортогональных разложений) имели скорее алгебраическую природу: как мы упоминали при изучении понятия классического генератора, для объекта $E \in T$ структура порождённой им категории во многом зависит от алгебры $\mathrm{Ext}^\bullet_T(E, E)$. Поэтому можно пытаться выяснять, когда категория $\langle E \rangle$ будет удовлетворять условиям второго пункта из утверждения 7.2.1 и тогда, в частности, будет допустимой подкатегорией. Например, для E, у которых эта алгебра Ext'ов будет максимально простой, это так. Перед тем, как этого доказывать, введём определение.

Определение 7.4.1: Объект $E \in T$ называется *исключительным объектом*, если $\mathrm{Hom}_T(E, E) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_E$, а при $i \neq 0$ верно $\mathrm{Ext}^i_T(E, E) = 0$.

Из общей теории следует, что триангулированная подкатегория, порождённая исключительным объектом E, будет эквивалентна производной категории модулей над алгеброй $\mathrm{Hom}_T(E, E) \simeq \mathbb{C}$, то есть производной категории векторных пространств. Для конкретности мы не будем ссылаться на этот результат, а докажем его явно.

Напомним обозначение: если $V^\bullet \in \text{gr-vect}$ — конечномерное градуированное векторное пространство (то есть лишь в конечном числе градуировок соответствующая компонента не равна нулю, и все они конечномерны), а $E \in T$ — объект в триангулированной категории, то $V^\bullet \otimes E$ — это прямая сумма сдвигов объекта E:

$$V^\bullet \otimes E \coloneqq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^{\oplus \dim V^i}[-i].$$

Любой морфизм $f : V^\bullet \to W^\bullet$ индуцирует отображение $V^\bullet \otimes E \to W^\bullet \otimes E$.

Замечание: Более функториально можно сказать, что объект $V^\bullet \otimes E$ — это объект в T, представляющий функтор $F \mapsto R\mathrm{Hom}_T(F, E) \otimes V^\bullet$. Более геометрически можно сказать, что если $T = D(X)$ для какого-то многообразия X, то $V^\bullet \otimes E$ это тензорное произведение E и пулбэка объекта $V^\bullet \in \text{gr-vect} \cong D^b(\text{vect}) = D(*)$ при отображении $X \to *$ в точку.

Лемма 7.4.2: Пусть $E \in T$ — некоторый объект. Если $V^\bullet$ и $W^\bullet$ — два конечномерных градуированных пространства, то для любого $i \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$\mathrm{Ext}^i_T(V^\bullet \otimes E, W^\bullet \otimes E) \cong \left(R\mathrm{Hom}_{\text{gr-vect}}(V^\bullet, W^\bullet) \otimes R\mathrm{Hom}_T(E, E)\right)^{\deg = i},$$

где имеется в виду градуированная компонента степени i в тензорном произведении двух градуированных векторных пространств.

Доказательство: Поскольку объект $V^\bullet \otimes E$ — это (конечная) прямая сумма сдвигов объекта E, формула получается подстановкой определения объектов $V^\bullet \otimes E$ и $W^\bullet \otimes E$. □

Лемма 7.4.3: Пусть $E \in T$ — исключительный объект. Тогда для любых $V^\bullet, W^\bullet \in \text{gr-vect}$ существует изоморфизм

$$R\mathrm{Hom}_T(V^\bullet \otimes E, W^\bullet \otimes E) \cong R\mathrm{Hom}_{\text{gr-vect}}(V^\bullet, W^\bullet).$$

Доказательство: Очевидное следствие из предыдущей леммы. □

Лемма 7.4.4: Пусть $E \in T$ — исключительный объект. Тогда подкатегория $\langle E \rangle \subset T$ эквивалентна ограниченной производной категории конечномерных векторных пространств. Любой объект в подкатегории $\langle E \rangle \subset T$ представляется в виде $V^\bullet \otimes E$, где $V^\bullet \in \text{gr-vect}$.

Доказательство: Напомним, что ограниченная производная категория конечномерных векторных пространств эквивалентна категории gr-vect конечномерных градуированных пространств. Рассмотрим функтор

$$\Phi : V^\bullet \in \text{gr-vect} \mapsto V^\bullet \otimes E \in T.$$

Поскольку любой объект в образе Φ это прямая сумма сдвигов E, получаем, что Φ отображает $\text{gr-vect} \cong D^b(\text{vect})$ в подкатегорию $\langle E \rangle$. По лемме 7.4.3 функтор Φ строго полный, то есть образ эквивалентен $D^b(\text{vect})$. В частности, образ Φ является триангулированной подкатегорией в $\langle E \rangle$. Поскольку E лежит в образе Φ, это значит, что Φ индуцирует эквивалентность $\text{gr-vect} \xrightarrow{\sim} \langle E \rangle \subset T$. □

Утверждение 7.4.5: Пусть $E \in T$ — исключительный объект, а T — Ext-конечная карубиева триангулированная категория с сильным генератором. Тогда $\langle E \rangle \subset T$ — допустимая подкатегория.

Доказательство: По лемме 7.4.4 категория $\langle E \rangle$ эквивалентна ограниченной производной категории конечномерных векторных пространств. Эта категория Ext-конечна, карубиева и имеет сильный генератор (это объект E, причём по определению он порождает всю $\langle E \rangle$ за ноль конусов). Значит, по второму пункту утверждения 7.2.1 подкатегория $\langle E \rangle \subset T$ допустима. □

Пример: Пусть X — многообразие Фано, то есть гладкое проективное многообразие с антиобильным каноническим классом (например, проективное пространство $\mathbb{P}^n$). Тогда структурный пучок $\mathcal{O}_X \in D(X)$ является исключительным объектом. В самом деле, $\mathrm{Ext}^\bullet_{D(X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \cong H^\bullet(\mathcal{O}_X)$ равны нулю по теореме Кодаиры об обращении в ноль (напомню, что у нас в курсе предполагается, что базовое поле характеристики ноль).

Для полуортогонального разложения, где все компоненты порождены исключительными объектами, существует отдельное название.

Определение 7.4.6: Пусть X — гладкое проективное многообразие. Тогда *исключительным набором* в X называется последовательность $\langle E_1, ..., E_n\rangle$ исключительных объектов, которые полуортогональны: для $j > i$ верно $R\mathrm{Hom}_T(E_j, E_i) = 0$. Исключительный набор называется *полным*, если наименьшая триангулированная подкатегория в T, содержащая все E_i, совпадает с T.

Так у нас получается первый интересный пример полуортогонального разложения:

Утверждение 7.4.7 *(исключительный набор Бейлинсона)*: В производной категории проективного пространства $\mathbb{P}^n$ существует исключительный набор

$$D(\mathbb{P}^n) = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), ..., \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n)\rangle.$$

Доказательство: Поскольку $H^\bullet(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \mathbb{C}[0]$, любое линейное расслоение на $\mathbb{P}^n$ является исключительным объектом. Полуортогональность следует из того факта, что для $k \in [1; n]$ линейное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)$ ациклично, то есть $R\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k)) = 0$. Наконец, то, что эти объекты в совокупности порождают всю категорию $D(\mathbb{P}^n)$, прямое следствие того, что $\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(i)$ является классическим генератором в этой категории. $\square$

Другие примеры исключительных наборов и менее тривиальных полуортогональных разложений мы обсудим позже.

7.5. Аддитивность инвариантов при полуортогональных разложениях

Одна из причин, почему полуортогональные разложения являются удобным способом изучать триангулированные категории, это контролируемое поведение многих инвариантов триангулированных категорий при переходе к компонентам полуортогонального разложения. Рассмотрим для примера такой важный инвариант:

Определение 7.5.1: Пусть T — триангулированная категория. Тогда *группой Гротендика* категории T, обозначаемой как $K_0(T)$, называется фактор свободной абелевой группы, порождённой всеми объектами $E \in T$, по соотношениям $[E] = [E'] + [E'']$ для всех выделенных треугольников $E' \to E \to E'' \to E'[1]$. Здесь квадратными скобками обозначается порождающий элемент группы K_0, соответствующий объекту T.

Замечание: Если вы знаете, что такое K-теория, то для $T = D(X)$ группа $K_0(T)$ это в самом деле нулевая K-теория многообразия X.

Упражнение 7.5.2: Покажите, что для двух объектов $E, E' \in T$ класс прямой суммы $[E \oplus E']$ в $K_0(T)$ равен сумме $[E] + [E']$. Покажите, что для любого объекта $E \in T$ в $K_0(T)$ верно $[E] + [E[1]] = 0$, где $[-]$ обозначает класс объекта.

Утверждение 7.5.3: Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n\rangle$ — полуортогональное разложение. Тогда существует канонический изоморфизм $K_0(T) = \bigoplus_{i=0}^n K_0(\mathcal{A}_i)$.

Доказательство: Легко проверить, что любой точный функтор между триангулированными категориями индуцирует гомоморфизм групп Гротендика. В частности, с помощью вложений $\mathcal{A}_i \hookrightarrow T$ получаем набор отображений $K_0(\mathcal{A}_i) \to T$. Рассмотрим их прямую сумму:

$$\bigoplus_{i=0}^n K_0(\mathcal{A}_i) \to T.$$

Покажем, что это изоморфизм. Определим обратное отображение таким образом: по утверждению 7.3.4 любой объект $E \in T$ единственным образом вписывается в последовательность стрелок

$$0 = E_n \to E_{n-1} \to \dots \to E_1 \to E_0 = E,$$

где для каждого i конус морфизма $E_i \to E_{i-1}$ лежит в подкатегории $\mathcal{A}_i$. Отобразим тогда класс $[E] \in K_0(T)$ в прямую сумму классов $\bigoplus_{i=0}^n [\mathrm{Cone}(E_i \to E_{i-1})]$. Надо проверить, что это корректно определяет отображение $K_0(T) \to \bigoplus_{i=0}^n K_0(\mathcal{A}_i)$. Мы докажем это в случае, когда в полуортогональном разложении две компоненты, $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$, а общий случай оставим в качестве упражнения (на применение леммы 7.3.5 и индукцию). По функториальности треугольников проекции любой выделенный треугольник

$$E' \to E \to E'' \to E'[1]$$

в категории T вписывается в 3×3-диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
B' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B'[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B'' & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B''[1] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B'[1] & \longrightarrow & E'[1] & \longrightarrow & A'[1] & \longrightarrow & B'[2]
\end{array}$$

Значит, $[E]$ отображается в $([A], [B])$, а сумма $[E'] + [E'']$ в $([A'] + [A''], [B'] + [B''])$. Из того, что, в этой диаграмме столбцы являются выделенными треугольниками, получаем, что отображение на K_0 корректно определено.

Проверку, что это отображение в самом деле обратное, оставляю читателю в качестве упражнения. $\square$

Получается, что группа Гротендика переводит полуортогональные разложения в прямые суммы. Есть немало других инвариантов с такими же свойствами. Например, это верно не только для K_0, но и для всей K-теории (тут нужна аккуратность: на уровне триангулированных категорий определить высшие K-группы невозможно, только при помощи dg-оснащений, но они, оказывается, автоматически согласованы со всеми полуортогональными разложениями). Ещё такая аддитивность выполняется для *гомологий Хохшильда* (опять-таки, лучше работать с dg-категориями).

Следствие 7.5.4: Пусть T — триангулированная категория. Если в T существует полный исключительный набор, то $K_0(T)$ — свободная абелева группа конечного ранга.

Доказательство: По утверждению 7.5.3 получается, что $K_0(T)$ — это конечная прямая сумма копий $K_0(D^b_{\mathrm{vect}})$. Легко проверить, что для категории градуированных векторных пространств K_0 изоморфно $\mathbb{Z}$. $\square$

Следствие 7.5.5: Пусть X — гладкое проективное многообразие, у которого $h^{1,0} \neq 0$ (например, кривая положительного рода). Тогда в $D(X)$ не существует полного исключительного набора.

Доказательство: Можно доказать, что у такого рода многообразий K_0 бесконечномерно. Значит, полный исключительный набор найти невозможно. $\square$

Библиография

[1] А. Бондал и М. Капранов, «Представимые функторы, функторы Серра и перестройки», *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, т. 53, вып. 6, сс. 1183–1205, 1989.

[2] A. Bondal и M. van den Bergh, «Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry», *Mosc. Math. J.*, т. 3, вып. 1, сс. 1–36, 258, 2003.