8. Перестройки. Теорема Каватани–Окавы о жёсткости.

Перед переходом к новой теме сначала вернёмся к вопросам из прошлой лекции, на которые не хватило времени.

Как и в прошлой лекции, мы по умолчанию считаем, что T — это Ext-конечная карубиева триангулированная категория с сильным генератором.

8.1. К прошлой лекции: ещё немного об исключительных объектах

В прошлый раз я сказал, что на многообразии Фано любое линейное расслоение является исключительным объектом. Есть и другие геометрические примеры. Например, структурный пучок исключительного дивизора при раздутии точки является исключительным объектом.

Лемма 8.1.1: Пусть $\pi : Y \to X$ — раздутие точки в гладком проективном многообразии, и пусть $j : E \hookrightarrow Y$ — вложение исключительного дивизора. Тогда $j_*\mathcal{O}_E$ — исключительный объект в $D(X)$.

Доказательство: Структурный пучок $j_*\mathcal{O}_E$ вписывается в короткую точную тройку когерентных пучков на Y:

$$0 \to \mathcal{O}_Y(-E) \to \mathcal{O}_Y \to j_*\mathcal{O}_E \to 0.$$

Точные тройки в абелевой категории задают выделенные треугольники в производной категории. В частности, градуированное векторное пространство $R\mathrm{Hom}_{D(Y)}(j_*\mathcal{O}_E, j_*\mathcal{O}_E)$ изоморфно сдвинутому конусу морфизма

$$R\mathrm{Hom}_{D(Y)}(\mathcal{O}_Y, j_*\mathcal{O}_E) \to R\mathrm{Hom}_{D(Y)}(\mathcal{O}_Y(-E), j_*\mathcal{O}_E).$$

По сопряжённости прямого и обратного образов, а так же используя изоморфизм $E \simeq \mathbb{P}^{\dim X - 1}$, имеем

$$R\mathrm{Hom}_{D(Y)}(\mathcal{O}_Y, j_*\mathcal{O}_E) \cong R\Gamma(E, \mathcal{O}_E) \simeq R\Gamma\big(\mathbb{P}^{\dim X-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\dim X-1}}\big) \cong \mathbb{C}[0],$$

а используя тот факт, что $\mathcal{O}_Y(E)$ ограничивается на E как $\mathcal{O}(-1)$, имеем

$$R\mathrm{Hom}_{D(Y)}(\mathcal{O}_Y(-E), j_*\mathcal{O}_E) \cong R\Gamma(E, \mathcal{O}_Y(E)|_E) \simeq R\Gamma\big(\mathbb{P}^{\dim X-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\dim X-1}}(-1)\big) = 0.$$

Следовательно, $R\mathrm{Hom}_{D(Y)}(j_*\mathcal{O}_E, j_*\mathcal{O}_E)$ одномерно в степени ноль и равно нулю в остальных степенях, то есть по определению $j_*\mathcal{O}_E$ является исключительным объектом. □

Из нерассказанного на лекции: Оба семейства примеров исключительных объектов, упомянутых выше, являются когерентными пучками, а не сложными объектами в производной категории. Про пучки исключительность обычно легче доказывать, но вообще исключительные объекты совершенно не обязаны быть просто пучками. Дам без доказательства пример: если $\pi : Y \to X$ — раздутие гладкой точки $x \in X$, то производный обратный образ $F := \pi^*\mathcal{O}_x \in D(Y)$ пучка-небоскрёба в раздуваемой точке — объект с ненулевыми пучками когомологий в степенях от $-(\dim X - 1)$ до 0. Сам он не является исключительным, но любое его обрезание $\tau_{\geq i}(F)$ для $i \in [-(\dim X - 2); 0]$ будет исключительным объектом в $D(Y)$. Если $\dim X \geq 3$, то можно взять, скажем, обрезание $\tau_{\geq -1}(F)$ и получить исключительный объект с двумя ненулевыми пучками когомологий.

Замечание: Несмотря на лемму 8.1.1, прилагательное «исключительный» в термине «исключительный объект» не связано напрямую с исключительными дивизорами, это до некоторой степени совпадение. Исторически этот термин происходит от понятия «исключительного векторного расслоения» на проективной плоскости, введённого Дрезе и Ле Потье в статье [1], а для них исключительность заключалась в том, что такие векторные расслоения являются изолированными точками в пространствах модулей расслоений.

Ещё мы в прошлый раз доказали, что если $E \in T$ — исключительный объект, то $\langle E \rangle \subset T$ — допустимая подкатегория. То доказательство использовало характеризацию допустимости через свойства самой подкатегории $\langle E \rangle \simeq D^b(\mathrm{vect})$, но вообще для этого случая допустимость можно доказать по определению, предъявив явно сопряжённые к вложению функторы.

Лемма 8.1.2: Пусть T — Ext-конечная триангулированная категория, а $E \in T$ — исключительный объект. Тогда функторы

$$F \mapsto R\mathrm{Hom}_T(F, E)^{\vee} \otimes E \quad \text{и} \quad F \mapsto R\mathrm{Hom}_T(E, F) \otimes E$$

являются левым и правым сопряжёнными функторами к вложению $\langle E \rangle \hookrightarrow T$, соответственно.

Доказательство сопряжённости очевидно следует из того, что любой объект в подкатегории $\langle E \rangle$ изоморфен прямой сумме сдвигов копий объекта E.

8.2. К прошлой лекции: ортогональные разложения

На прошлой лекции меня спросили, почему изучаются именно полуортогональные разложения, а не двусторонне ортогональные. Проблема в том, что, по крайней мере в геометрической ситуации, ортогональные разложения встречаются слишком редко. Собственно, для категорий вида $D(X)$ для связного многообразия X их не бывает, что мы сейчас докажем. Но сначала дадим определение.

Определение 8.2.1: Пусть T — триангулированная категория. Тогда *ортогональным разложением* для T называется пара допустимых подкатегорий $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset T$, которые:
- двусторонне ортогональны: для любых $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ выполняется $R\mathrm{Hom}_T(A, B) = 0$ и $R\mathrm{Hom}_T(B, A) = 0$;
- вместе порождают всю T, то есть наименьшая триангулированная подкатегория в T, содержащая $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, совпадает с T.

Ортогональные разложения часто обозначают как $T = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

Упражнение 8.2.2: На самом деле допустимость подкатегорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в определении 8.2.1 следует из прочих условий, достаточно потребовать, чтобы эти подкатегории были строго полными триангулированными подкатегориями. Докажите это, следуя такому плану:
- Если объект $E \in T$ можно представить как прямую сумму $E \simeq A \oplus B$ объектов $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{B}$, то такое представление единственно с точностью до единственного изоморфизма.
- Подкатегория объектов в T, допускающих такое разложение, является триангулированной (*Указание*: используя ортогональность, покажите, что любой морфизм $A \oplus B \to A' \oplus B'$ это прямая сумма морфизмов $A \to A'$ и $B \to B'$).
- Отображение, сопоставляющее объекту $A \oplus B$ его компоненту A, задаёт точный функтор $T \to \mathcal{A}$, являющийся одновременно и левым, и правым сопряжённым к вложению $\mathcal{A} \hookrightarrow T$.

Утверждение 8.2.3: Пусть X — связное гладкое проективное многообразие. Тогда у категории $D(X)$ не существует нетривиальных ортогональных разложений, то есть для любого ортогонального разложения $D(X)$ на подкатегории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одна из подкатегорий — нулевая.

Доказательство: Из определения 8.2.1 очевидно, что любое ортогональное разложение в частности задаёт полуортогональное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. Рассмотрим треугольник проекции для какого-нибудь объекта $E \in T$:

$$B \to E \to A \to B[1].$$

Поскольку отображение $A \to B[1]$ обязано быть нулевым в силу двусторонней ортогональности $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, получаем, что любой объект $E \in T$ изоморфен прямой сумме $A \oplus B$ объекта из $\mathcal{A}$ и объекта из $\mathcal{B}$. (Для ортогональных разложений этот вывод несложно доказать напрямую, без использования треугольников проекции, см. упражнение 8.2.2.)

Значит, любой объект $E \in T$, который нельзя нетривиальным образом разложить в прямую сумму, целиком попадает в одну из двух подкатегорий, $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$. Такими объектами, являются, например, структурный пучок $\mathcal{O}_X \in D(X)$ и пучки-небоскрёбы $\mathcal{O}_x$ в каждой точке $x \in D(X)$ (упражнение!).

Без потери общности можно считать, что подкатегория, в которой лежит неразложимый объект $\mathcal{O}_X$, это $\mathcal{A} \subset D(X)$. Поскольку для любой точки $x \in X$ существует ненулевое отображение $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_x$, из ортогональности следует, что все пучки-небоскрёбы тоже принадлежат подкатегории $\mathcal{A}$. Но тогда любой объект $B \in \mathcal{B}$ ортогонален всем небоскрёбам, из чего следует, что его носитель пуст. Значит, в $\mathcal{B}$ нет объектов, кроме нулевого. □

Упражнение 8.2.4: Если X — гладкое и проективное многообразие, которое не является связным, то любое ортогональное разложение $D(X)$ соответствуют разбиению множества компонент связности X на два непересекающихся подмножества.

Из нерассказанного на лекции: В других триангулированных категориях ортогональные разложения бывают: например, производная категория представлений конечной группы в характеристике ноль ортогонально раскладывается в прямую сумму подкатегорий, порождённых классами изоморфизма неприводимых представлений. Кроме того, ортогональные разложения часто встречаются и при изучении производных категорий когерентных пучков, потому что интересно изучать не только категорию $D(X)$ целиком, но и допустимые подкатегории в ней. Например, если $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то линейные расслоения $\mathcal{O}(0,-1)$ и $\mathcal{O}(-1,0)$ — два двусторонне ортогональных исключительных объекта, то есть у порождённой ими подкатегории в $D(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ есть ортогональное разложение.

8.3. Перестройки: случай двухкомпонентных разложений

В прошлой лекции мы видели, что по любой допустимой подкатегории $\mathcal{A} \subset T$ можно построить два полуортогональных разложения длины два:
- $T = \langle \mathcal{A}, {}^{\perp}\mathcal{A} \rangle$;
- $T = \langle \mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{A} \rangle$.

(Саша Кузнецов предлагает следующий способ запомнить порядок: значок $\perp$ всегда в середине.) Это подсказывает, что у одной и той же категории может быть очень много полуортогональных разложений. Сегодня мы обсудим некоторый способ строить новые полуортогональные разложения из старых, называемый перестройками.

Сперва сделаем следующее наблюдение про два ортогонала к допустимой подкатегории.

Лемма 8.3.1: Пусть T — триангулированная категория с функтором Серра, и пусть $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая подкатегория. Тогда функтор Серра S_T категории T задаёт эквивалентность $\mathcal{A}^{\perp} \xrightarrow{\sim} {}^{\perp}\mathcal{A}$ двух ортогоналов к $\mathcal{A}$.

Доказательство: По определению функтора Серра для любых двух объектов $A, B \in T$ выполняется

$$R\mathrm{Hom}_T(A, B) \cong R\mathrm{Hom}_T(S_T(B), A)^{\vee}.$$

По определению для фиксированного объекта B левое пространство обращается в ноль для всех $A \in \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathcal{A}^{\perp}$, а правое — тогда и только тогда, когда объект $S_T(B)$ лежит в ${}^{\perp}\mathcal{A}$. Значит, действие функтора Серра задаёт равенство подмножеств $S_T(\mathcal{A}^{\perp}) = {}^{\perp}\mathcal{A}$. Поскольку функтор Серра — это автоэквивалентность, он индуцирует эквивалентность подкатегорий $\mathcal{A}^{\perp} \xrightarrow{\sim} {}^{\perp}\mathcal{A}$. □

Замечание: Эквивалентность двух ортогоналов верна и в случае, если в T нет функтора Серра: используя треугольники проекции, можно показать, что и левый, и правый ортогонал к $\mathcal{A}$ эквивалентны *фактор-категории Вердье* $T/\mathcal{A}$, то есть универсальной триангулированной категории с точным функтором $T \to T/\mathcal{A}$, переводящим любой объект из $\mathcal{A}$ в нулевой объект.

Следствие 8.3.2: Пусть T — триангулированная категория с функтором Серра S_T, и пусть $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение. Тогда существуют ещё два полуортогональных разложения: $T = \langle S_T(\mathcal{B}), \mathcal{A} \rangle$ и $T = \langle \mathcal{B}, S_T^{-1}(\mathcal{A}) \rangle$.

Доказательство: По лемме из прошлой лекции полуортогональное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ означает, что $\mathcal{B} = {}^{\perp}\mathcal{A}$. Тогда по лемме 8.3.1 $T = \langle S_T(\mathcal{B}), \mathcal{A} \rangle$ тоже является полуортогональным разложением. Поскольку функтор Серра является автоэквивалентностью, применив функтор S_T^{-1} к обеим компонентам этого разложения, получаем, что $T = \langle \mathcal{B}, S_T^{-1}(\mathcal{A}) \rangle$ — тоже полуортогональное разложение. □

Мы видим, что любое полуортогональное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ с двумя компонентами на самом деле задаёт «спираль» из допустимых подкатегорий:

$$..., S_T^2(\mathcal{B}), S_T(\mathcal{A}), S_T(\mathcal{B}), \mathcal{A}, \mathcal{B}, S_T^{-1}(\mathcal{A}), S_T^{-1}(\mathcal{B}), S_T^{-2}(\mathcal{A}), ...$$

где каждые две подряд идущие допустимые подкатегории задают полуортогональное разложение категории T.

Упражнение 8.3.3: Пусть T — триангулированная категория с функтором Серра S_T, а $\mathcal{B} \subset T$ — допустимая подкатегория. Докажите, что если $S_T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, то $\mathcal{B} = T$ или $\mathcal{B} = 0$.(*Указание*: сведите к утверждению 8.2.3.)

8.4. Перестройки и действие группы кос

Пусть нам теперь дано полуортогональное разложение $T = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ с n компонентами. Для каждого $i < n$ рассмотрим подкатегорию $\mathcal{A}_{i,i+1} := \langle \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+1} \rangle$, то есть подкатегорию T, порождённую двумя соседними компонентами разложения $\mathcal{A}_*$. По лемме из прошлой лекции подкатегория $\mathcal{A}_{i,i+1}$ тоже допустима в T, и она по построению имеет полуортогональное разложение на две компоненты. Значит, можно построить в ней другое разложение, используя методы прошлого раздела.

Определение 8.4.1: Для полуортогонального разложения $T = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ *перестройкой компоненты $\mathcal{A}_{i+1}$ через $\mathcal{A}_i$* (или же *перестройкой компоненты $\mathcal{A}_{i+1}$ налево*) называется подкатегория $\sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*) := \mathcal{A}_i^{\perp} \cap \mathcal{A}_{i,i+1}$, то есть подкатегория в $\mathcal{A}_{i,i+1}$, являющаяся правым ортогоналом к $\mathcal{A}_i$.

Лемма 8.4.2: Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ — полуортогональное разложение. Тогда для числа $0 \leq i < n$ последовательность подкатегорий T

$$\Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*) := \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_{i-1}, \quad \sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*), \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{A}_{i+2}, ..., \mathcal{A}_n \rangle$$

тоже является полуортогональным разложением для T. Она называется *левой перестройкой разложения $\mathcal{A}_*$ в i-той компоненте.*

Доказательство: По лемме 8.3.1 и следствию 8.3.2 мы знаем, что

$$\mathcal{A}_{i,i+1} = \langle \sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*), \mathcal{A}_i \rangle$$

является полуортогональным разложением для $\mathcal{A}_{i,i+1}$. Из этого легко выводится, что последовательность $\Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ полуортогональна и порождает категорию T. Из случая двухкомпонентного разложения мы знаем, что подкатегория $\sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ допустима в подкатегории $\mathcal{A}_{i,i+1}$, которая в свою очередь допустима в T. Из этого следует, что $\sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ допустима и в T тоже (упражнение! А можно было вместо этого напрямую воспользоваться характеризацией допустимости через внутреннюю структуру категории). Значит, последовательность $\Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ — полуортогональное разложение для T. $\square$

Замечание: Напомню, что существуют более общие понятия полуортогональных разложений, где вместо допустимости всех компонент требуется нечто более слабое. Для таких слабых версий определённое выше понятие перестройки тоже работает.

Итого по полуортогональному разложению категории T с n компонентами мы научились строить $(n-1)$ новых разложений, соответствующих выборам индекса $0 \leq i < n$ в лемме 8.4.2. Эти операции можно повторять. Кроме того, легко аналогичным образом определить *перестройки направо*:

$$\tilde{\Sigma}_{i+1}: \quad \langle ..., \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+1}, ... \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle ..., \mathcal{A}_{i+1}, \tilde{\sigma}_{i+1}(\mathcal{A}_*), ... \rangle$$

которые будут обратными операциями к перестройкам $\Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$. Получается действие некоторой группы.

Утверждение 8.4.3: На множестве n-компонентных полуортогональных разложений триангулированной категории T операции $\Sigma_{i+1} : \mathcal{A}_* \mapsto \Sigma_{i+1}(\mathcal{A}_*)$ задают действие группы кос на $n-1$ нитях.

Доказательство: Напомним, что группа кос на $n-1$ нитях — это (бесконечная) группа, порождённая операциями s_{i+1} для $i \in [0; n-1]$ с соотношениями
- $s_i s_j = s_j s_i$, если $|i-j| \geq 2$, и
- $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$.

Для операций Σ_{i+1}, действующих перестройками на полуортогональных разложениях, первое соотношение очевидно: в самом деле, если $|i-j| \geq 2$, то подкатегории $\mathcal{A}_{i,i+1}$ и $\mathcal{A}_{j,j+1}$ не будут пересекаться, поэтому операции перестроек происходят независимо и, следовательно, коммутируют.

Поскольку второе соотношение использует только два соседних индекса, по определению перестроек в лемме 8.4.2 от полуортогонального разложения важен только фрагмент $\langle \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_{i+1}, \mathcal{A}_{i+2} \rangle$. Поэтому для проверки этого соотношения достаточно считать, что нам дано трёхкомпонентное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \rangle$. Мы хотим проверить, что два перестроенных полуортогональных разложения совпадают.

Рассмотрим сначала первую последовательность перестроек:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{B}', \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{B}', \mathcal{C}', \mathcal{A} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{C}'', \mathcal{B}', \mathcal{A} \rangle,$$

где $\mathcal{B}'$ — левая перестройка подкатегории $\mathcal{B}$ внутри пары $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, и аналогично прочие подкатегории. Вторая последовательность перестроек такова:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \rangle \rightsquigarrow \langle \mathcal{A}, \tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{B} \rangle \rightsquigarrow \langle \tilde{\tilde{\mathcal{C}}}, \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \rightsquigarrow \langle \tilde{\tilde{\mathcal{C}}}, \tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{A} \rangle.$$

Здесь появившаяся на последнем шаге подкатегория $\tilde{\mathcal{B}}$ — это перестройка подкатегории $\mathcal{B}$ внутри пары $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. В частности, получается, что $\mathcal{B}' = \tilde{\mathcal{B}}$. Но тогда мы получили два трёхкомпонентных полуортогональных разложения категории T, у которых совпадают самые правые компоненты (обе равны $\mathcal{A}$) и средние ($\mathcal{B}' = \tilde{\mathcal{B}}$). Но тогда эти полуортогональные разложения совпадают, так как их самые левые компоненты, то есть $\mathcal{C}''$ и $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$, равны правому ортогоналу к подкатегории $\langle \mathcal{B}', \mathcal{A} \rangle$ (равной, по определению перестройки, категории $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$). □

Вычислять явно последовательности перестроек, как правило, сложно. Есть несколько простых случаев.

Лемма 8.4.4: Пусть $T = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ — полуортогональное разложение триангулированной категории T с функтором Серра S_T. Тогда последовательность перестроек подкатегории $\mathcal{A}_n$ налево через компоненты $\mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-2}, ..., \mathcal{A}_1$ — это $S_T(\mathcal{A}_n)$.

Доказательство: Пусть $\mathcal{C} = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_{n-1} \rangle$. Тогда это допустимая подкатегория в T. По следствию 8.3.2 из существования полуортогонального разложения $T = \langle \mathcal{C}, \mathcal{A}_n \rangle$ следует, что $T = \langle S_T(\mathcal{A}_n), \mathcal{C} \rangle$ — тоже полуортогональное разложение. При этом последовательность перестроек $\mathcal{A}_n$ через каждую из подкатегорий $\mathcal{A}_{n-1}, \mathcal{A}_{n-2}, ..., \mathcal{A}_1$ — это некоторая подкатегория $\Sigma(\mathcal{A}_n)$, дающая полуортогональное разложение $T = \langle \Sigma(\mathcal{A}_n), \mathcal{C} \rangle$. Поскольку двухкомпонентные полуортогональные разложения однозначно определяются одной компонентой, это значит, что $\Sigma(\mathcal{A}_n) = S_T(\mathcal{A}_n)$, что мы и хотели доказать. □

Замечание: Эта лемма полезна в тех случаях, когда функтор Серра для категории T легко посчитать. Например, если $T = D(X)$ для гладкого проективного многообразия X, то мы знаем, что S_T это, с точностью до сдвига в производной категории, подкрутка на линейное расслоение ω_X. Будьте внимательны: если $T \subset D(X)$ допустимая подкатегория, то функтор Серра в T (он существует по теореме Бондала и ван ден Берга) не равен ограничению функтора Серра с $D(X)$!

Упражнение 8.4.5: Пусть T — триангулированная категория с функтором Серра, а $\mathcal{A} \subset T$ — допустимая подкатегория. Обозначим через L левый сопряжённый функтор к вложению $\iota : \mathcal{A} \hookrightarrow T$, а через R — правый. Докажите, что функтор Серра на $\mathcal{A}$ изоморфен композиции $L \circ S_T \circ \iota$, а обратный к нему — композиции $R \circ S_T^{-1} \circ \iota$.

Из нерассказанного на лекции: При вычислениях с полуортогональными разложениями нередко оказывается полезным понятие *левого (и правого) двойственного разложения*: для полуортогонального разложения $T = \langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n \rangle$ левым двойственным разложением называется полуортогональное разложение, полученное таким образом:
- каждую категорию $\mathcal{A}_i$ перестроить налево через подкатегорию $\langle \mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_{i-1} \rangle$;
- записать получившиеся подкатегории по убыванию i.

Получится некоторое разложение, которое начинается с полной перестройки $\mathcal{A}_n$ налево (то есть по лемме выше $S_T(\mathcal{A}_n)$), а заканчивается $\mathcal{A}_1$.

Лемма 8.4.6: Пусть $\langle E, F \rangle \subset T$ — исключительный набор. Тогда объект

$$F' := \mathrm{Cone}(R\mathrm{Hom}(E, F) \otimes E \to F)$$

тоже является исключительным, и $\langle F', E \rangle \subset T$ — тоже исключительный набор. Аналогично, объект

$$E' := \mathrm{Cone}\Big(E \to R\mathrm{Hom}(E, F)^{\vee} \otimes F\Big)$$

является исключительным и пара $\langle F, E' \rangle$ — исключительный набор.

Доказательство: Оба утверждения проверяются вычислением. Из общей теории мы знаем, что при перестройке подкатегории $\langle F \rangle$ через подкатегорию $\langle E \rangle$ должна получиться категория, эквивалентная $\langle F \rangle$, то есть производной категории векторных пространств. Это значит, что перестроенная категория тоже порождается исключительным объектом. Указанные выше формулы позволяют его вычислить. □

Выше мы обсудили, как по одному полуортогональному разложению построить много других. Мы построили действие бесконечной и довольно сложной группы на множестве полуортогональных разложений. Будет ли это действие транзитивно? В сформулированном виде ответ, конечно, нет: например, любое нетривиальное разложение $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ нельзя перевести действием группы кос в тривиальное разложение $T = \langle T, 0 \rangle$, потому что по лемме 8.3.1 при перестройках полуортогональных разложений сохраняется множество компонент с точностью до эквивалентности, меняется только способ вложить эти подкатегории в T и порядок, в котором мы их записываем.

Из нерассказанного на лекции: Но даже если обойти эту тривиальную проблему и интересоваться уточнённым вопросом — всегда ли два разложения на попарно эквивалентные подкатегории переводятся друг в друга действием группы кос, — ответ всё равно отрицательный. В недавнем препринте [2] в некоторой триангулированной категории, построенной с помощью симплектической геометрии, были построены два полных исключительных набора, которые не переводятся друг в друга действием группы кос. Для произвольных полуортогональных разложений положительного ответа никто и не ожидал (не знаю, существовали ли конкретные контрпримеры), но что транзитивность неверна даже для полных исключительных наборов — удивительно.

Впрочем, есть и другие проблемы: структура множества полуортогональных разложений на фиксированной категории науке совершенно неясна, даже для простейших многообразий вроде проективных пространств.

8.5. Теорема Каватани–Окавы о жёсткости

Мы обсудили, как из одного полуортогонального разложения строить много новых с помощью действия дискретной группы. Получилось счётное число вариантов. А вот никаких непрерывных семейств полуортогональных разложений существовать не может. Это следует из теоремы Каватани–Окавы о жёсткости допустимых подкатегорий, которую мы в этом разделе докажем. Она утверждает, что допустимая подкатегория в гладком проективном многообразии автоматически замкнута относительна «маленьких деформаций» объектов. Из этого следует, что допустимая подкатегория — это объект жёсткий, недеформируемый.

Замечание: Отметим, что простейший пример допустимой подкатегории, а именно — подкатегория, порождённая одним исключительным объектом E, — заведомо такая, потому что деформации объекта E контролируются пространством $\mathrm{Ext}^1(E, E)$, которое равно нулю по исключительности E.

Результат звучит несколько удивительно: допустимость определялась чисто категорно, и требует лишь существования двух сопряжённых функторов, а свойство получается геометрическое, про семейства объектов в категориях. При этом доказательство не очень сложное. В вопросах, связанных со свойствами произвольных допустимых подкатегорий (например, при обсуждении того, какие многообразия вообще допускают хоть какое-то нетривиальное полуортогональное разложение), теорема Каватани–Окавы — чрезвычайно полезный инструмент.

Теорема 8.5.1 ([3]): Пусть X — гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{A} \subset D(X)$ — допустимая подкатегория. Пусть U — связное гладкое многообразие, $\pi : X \times U \to U$ — морфизм проекции, а $\mathcal{E} \in D(X \times U)$ — некоторый объект в производной категории произведения. Тогда подмножество $U_{\mathcal{A}} \subset U$ тех замкнутых точек $u \in U$, что производное ограничение $\mathcal{E}$ на слой $\pi^{-1}(u) = X \times \{u\} \simeq X$ попало в подкатегорию $\mathcal{A} \subset D(X)$, является открытым (в множестве замкнутых точек U).

Стоит думать про $\mathcal{E}$ как про семейство объектов из $D(X)$, параметризованное U.

Из нерассказанного на лекции: Эта формулировка предполагает, что любая замкнутая точка — это спектр базового поля, то есть алгебраическую замкнутость. Более точное утверждение такое: существует наибольшая открытая подсхема $U_{\mathcal{A}} \subset U$, для которой ограничение $\mathcal{E}|_{X \times U_{\mathcal{A}}}$ попадает в допустимую подкатегорию $\mathcal{A} \boxtimes D(U_{\mathcal{A}}) \subset D(X \times U_{\mathcal{A}})$, причём любая замкнутая точка $u \in U$, для которой $\mathcal{E}|_{X \times \{u\}}$ попадает в подкатегорию $\mathcal{A} \boxtimes D(\{u\}) \subset D(X \times \{u\})$, лежит в $U_{\mathcal{A}}$. Здесь $\mathcal{A} \boxtimes D(U_{\mathcal{A}})$ — наименьшая триангулированная подкатегория в $D(X \times U_{\mathcal{A}})$, содержащая все объекты вида $A \boxtimes E$, где $A \in \mathcal{A} \subset D(X)$ и $E \in D(U_{\mathcal{A}})$, и замкнутая относительно взятия прямых слагаемых; эта подкатегория будет допустима (см. понятие относительного полуортогонального разложения в [4]).

Для доказательства нам понадобится следующий критерий принадлежности к допустимой подкатегории в терминах генератора ортогональной подкатегории.

Лемма 8.5.2: Пусть $T = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение, и пусть $G_{\mathcal{B}}$ — классический генератор подкатегории $\mathcal{B}$. Тогда объект $E \in T$ лежит в подкатегории $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $R\mathrm{Hom}_T(G_{\mathcal{B}}, E) = 0$.

Доказательство: Рассмотрим треугольник проекции для объекта $E \in T$:

$$B \to E \to A \to B[1]$$

Из полуортогональности мы знаем, что $R\mathrm{Hom}_T(G_{\mathcal{B}}, A) = 0$. Следовательно, $R\mathrm{Hom}_T(G_{\mathcal{B}}, E) \cong R\mathrm{Hom}_T(G_{\mathcal{B}}, B)$. Поэтому достаточно доказать, что для любого ненулевого объекта $B \in \mathcal{B}$ градуированное пространство $R\mathrm{Hom}_T(G_{\mathcal{B}}, B)$ не может быть нулевым. Это общий факт про классические генераторы в триангулированных категориях («любой классический генератор является генератором»). В этом содержание леммы 8.5.3 ниже. □

Лемма 8.5.3: Пусть T — триангулированная категория, и пусть $G \in T$ — классический генератор. Тогда для любого ненулевого объекта $E \in T$ верно, что $R\mathrm{Hom}_T(G, E) \neq 0$.

Доказательство: Предположим, что $E \in T$ — некоторый объект, для которого $R\mathrm{Hom}_T(G, E) = 0$. Поскольку G — классический генератор в T, объединение подмножеств $\cup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \langle G \rangle_i$ совпадает с T (мы это доказали в шестой лекции). Пусть i — наименьшее число, для которого $E \in \langle T \rangle_i$. Случай $i = 0$ оставим в качестве упражнения (не забудьте учесть переход к прямым слагаемым). Если же $i > 0$, то по определению это значит, что существует выделенный треугольник

$$G \otimes V^\bullet \to E \oplus E' \to E'' \to G \otimes V^\bullet[1], \tag{1}$$

где $V^\bullet$ — градуированное векторное пространство, E' — какой-то объект из T, а E'' — некоторый объект из $\langle G \rangle_{i-1}$. Поскольку $R\mathrm{Hom}_T(G, E) = 0$, морфизм

$$G \otimes V^\bullet \to E \oplus E'$$

пропускается через прямое слагаемое E'. Иными словами, первый морфизм в треугольнике (1) это прямая сумма отображений

$$(G \otimes V^\bullet \to E') \quad \oplus \quad (0 \to E),$$

но тогда его конус тоже распадается в прямую сумму:

$$E'' \simeq \mathrm{Cone}(G \otimes V^\bullet \to E') \oplus E.$$

Это противоречие: мы получили, что E является прямым слагаемым объекта $E'' \in \langle G \rangle_{i-1}$, из чего следует, что $E \in \langle G \rangle_{i-1}$, а так не может быть в силу выбора числа i. $\square$

Вернёмся теперь к теореме Каватани–Окавы о жёсткости.

Доказательство (теоремы 8.5.1): Пусть $G_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B} \subset D(X)$ — классический генератор подкатегории $\mathcal{B}$ (как мы обсуждали в прошлый раз, можно взять проекцию любого классического генератора $D(X)$ в $\mathcal{B}$). Согласно лемме 8.5.2 нам надо показать, что множество тех точек $u \in U$, для которых $R\mathrm{Hom}_X(G_{\mathcal{B}}, \mathcal{E}|_{X \times \{u\}} = 0$, является открытым. Мы докажем это, переформулировав условие с помощью функтора внутреннего Hom'а.

Обозначим через $G \in D(X \times U)$ обратный образ $G_{\mathcal{B}}$ при проекции $X \times U \to X$. Рассмотрим внутренний Hom-объект $\mathcal{H} := R\underline{\mathrm{Hom}}_{X \times U}(G, \mathcal{E}) \cong G^{\vee} \otimes \mathcal{E} \in D(X \times U)$. По теореме о плоской замене базы слой производного прямого образа $\pi_*(\mathcal{H})$ в точке $u \in U$ — это вычисление гиперкогомологий ограничения объекта $\mathcal{H}$ на слой $\pi^{-1}(u)$. Поскольку по определению ограничение объекта G на каждый слой проекции π изоморфно $G_{\mathcal{B}}$, получается, что

$$R\Gamma\Big(X \times \{u\}, \mathcal{H}|_{X \times \{u\}}\Big) \cong R\Gamma\Big(X \times \{u\}, G_{\mathcal{B}}^{\vee} \otimes \mathcal{E}|_{X \times \{u\}}\Big) \cong R\mathrm{Hom}_X\Big(G_{\mathcal{B}}, \mathcal{E}|_{X \times \{u\}}\Big).$$

Здесь мы использовали, что производное ограничение коммутирует с производным тензорным произведением и с переходом к двойственному объекту. Следовательно, по лемме 8.5.2 точка $u \in U$ лежит в $U_{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда производное ограничение объекта $\pi_*(\mathcal{H}) \in D(U)$ в эту точку нулевое. Иными словами, $U_{\mathcal{A}}$ — это дополнение до носителя объекта $\pi_*(\mathcal{H}) \in D(U)$. Поскольку носитель всегда замкнут, подмножество $U_{\mathcal{A}}$, являющееся дополнением до замкнутого множества — открытое. $\square$

Из нерассказанного на лекции: С помощью этой теоремы иногда легко показать, что какая-то подкатегория не является допустимой. Доказывать по определению несуществование сопряжённых функторов довольно сложно. Например, верно такое:

Следствие 8.5.4: Пусть E — гладкая проективная кривая рода один. Тогда подкатегория $\langle \mathcal{O}_E \rangle \subset D(E)$, порождённая структурным пучком, не является допустимой.

Доказательство: Рассмотрим семейство линейных расслоений на E, заданных дивизорами $[p] - [0]$, где $[0]$ — фиксированная точка на E, а p пробегает всю кривую. Для $p = 0$ это тривиальное расслоение. Если бы $\langle \mathcal{O}_E \rangle \subset D(E)$ было бы допустимой подкатегорией, то по теореме 8.5.1 для какой-то Зариски-открытой окрестности $U \subset E$ точки 0 все линейные расслоения $\mathcal{O}([u] - [0])$ для $u \in U$ лежали бы в $\langle \mathcal{O}_E \rangle$. Однако легко показать вычислением, что

$$R\mathrm{Hom}_{D(E)}(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}([u] - [0])) = 0$$

при любом $u \neq 0$, то есть $\mathcal{O}([u] - [0])$ лежит в ортогонале $\mathcal{O}_E^{\perp}$, и заведомо не может лежать в $\langle \mathcal{O}_E \rangle$ (лемма 8.5.3). $\square$

8.6. Инвариантность допустимых подкатегорий

Теорема 8.5.1 показывает, что допустимые подкатегории замкнуты относительно «малых деформаций» объектов. Из этого можно вывести, что в фиксированной категории не может быть нетривиального семейства допустимых подкатегорий, только надо придумать, как определить «семейство допустимых подкатегорий». Это можно сделать — например, в статье [5] для семейств многообразий строится пространство модулей послойных полуортогональных разложений и, в частности, доказывается, что у фиксированного многообразия это пространство модулей дискретно.

Тонкости определения мы обсуждать не будем, а вместо этого докажем полезный частный случай: если при подкрутках допустимой подкатегории на линейные расслоения из Pic^0 не должно получаться нетривиального семейства, значит, каждая допустимая подкатегория инвариантна относительно действия Pic^0, и аналогично для действия автоморфизмов из связной компоненты группы автоморфизмов многообразия. Этот результат доказан в той же статье Каватани–Окавы, что и прошлая теорема.

Теорема 8.6.1 ([3]): Пусть X — гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{A} \subset D(X)$ — допустимая подкатегория. Тогда для любого линейного расслоения $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ из связной компоненты группы Пикара верно равенство $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L} = \mathcal{A}$. Аналогично, для любого автоморфизма $g \in \mathrm{Aut}^0(X)$ из связной компоненты группы автоморфизмов верно равенство $g^* \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Доказательство: Мы докажем утверждение про $\mathrm{Pic}^0(X)$, утверждение про автоморфизмы аналогично. Пусть $\mathcal{P}$ — универсальное линейное расслоение на $X \times \mathrm{Pic}^0(X)$, то есть такое расслоение, которое для любого $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ ограничивается на «срез» $X \times \{\mathcal{L}\} \subset X \times \mathrm{Pic}^0(X)$ изоморфно $\mathcal{L}$. Такое расслоение существует по определению схемы Пикара $\mathrm{Pic}^0(X)$. Если X — это абелево многообразие, то $\mathcal{P}$ — это расслоение Пуанкаре из лекции 4.

Пусть $G_{\mathcal{A}}$ — классический генератор в $\mathcal{A} \subset D(X)$. Рассмотрим на произведении $X \times \mathrm{Pic}^0(X)$ объект $\pi^*(G_{\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{P} \in D(X \times \mathrm{Pic}^0(X))$, где $\pi : X \times \mathrm{Pic}^0(X) \to X$ — проекция на первый множитель. По определению линейного расслоения $\mathcal{P}$ про этот объект можно думать, как про семейство подкруток объекта $G_{\mathcal{A}}$ на все расслоения из $\mathrm{Pic}^0(X)$. По теореме Каватани–Окавы о жёсткости (теорема 8.5.1) подмножество линейных расслоений

$$U := \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X) \mid G_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{L} \in \mathcal{A}\}$$

является открытым в Pic^0, причём поскольку $G_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ по построению, то тривиальное линейное расслоение $\mathcal{O}_X$ лежит в U. В частности, U не пусто.

Покажем, что для любого $\mathcal{L} \in U$ и любого объекта $A \in \mathcal{A}$ верно, что подкрутка $A \otimes \mathcal{L}$ лежит в $\mathcal{A}$. В самом деле, по определению U объект $G_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{L}$ лежит в $\mathcal{A}$. Значит, подкатегория, порождённая этим объектом, тоже целиком содержится в $\mathcal{A}$. Однако подкрутка на $\mathcal{L}$ — это эквивалентность категорий, поэтому $\langle G_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{L} \rangle = \langle G_{\mathcal{A}} \rangle \otimes \mathcal{L}$. А раз $G_{\mathcal{A}}$ — классический генератор в $\mathcal{A}$, из этого следует, что $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L} \subset \mathcal{A}$.

На многообразии $\mathrm{Pic}^0(X)$ есть структура группы, заданная тензорным произведением линейных расслоений. Покажем, что подмножество $U \subset \mathrm{Pic}^0(X)$ замкнуто относительно тензорного произведения. В самом деле, если $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in U$ — два линейных расслоения, то $\mathcal{L}_1 \otimes G_{\mathcal{A}}$ лежит в $\mathcal{A}$, и тогда по аргументу выше, применённому к $\mathcal{L}_2$, имеем

$$\mathcal{L}_2 \otimes (\mathcal{L}_1 \otimes G_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{A},$$

что означает по определению, что тензорное произведение $\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_1$ тоже лежит в U.

Мы получили, что $U \subset \mathrm{Pic}^0(X)$ — открытое подмножество в связной топологической группе, замкнутое относительно умножения и содержащее групповую единицу. Из этих свойств следует, что $U = \mathrm{Pic}^0(X)$. В самом деле, пусть $U' = U \cap U^{-1}$, где U^{-1} — множество обратных элементов к точкам из U. Тогда U' — открытая подгруппа в $\mathrm{Pic}^0(X)$. Любая открытая подгруппа автоматически является замкнутой, потому что дополнение до неё — объединение классов смежности, каждый из которых тоже открыт. Поскольку $\mathrm{Pic}^0(X)$ — связное пространство, то открыто-замкнутое подмножество U' или пусто, или совпадает со всем $\mathrm{Pic}^0(X)$. По условию U' содержит групповую единицу $\mathcal{O}_X \in \mathrm{Pic}^0(X)$, и тогда $U = U' = \mathrm{Pic}^0(X)$.

Мы доказали, что для любого $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ верно, что $\mathcal{A} \otimes \mathcal{L} \subset \mathcal{A}$. С другой стороны, из равенства

$$\mathcal{L} \otimes (\mathcal{L}^{\vee} \otimes \mathcal{A}) = (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{\vee}) \otimes \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

следует, что это вложение на самом деле является равенством, что мы и хотели доказать. □

Упражнение 8.6.2: Продумайте доказательство теоремы 8.6.1 для группы $\mathrm{Aut}^0(X)$. (*Указание*: какой объект надо взять на произведении $X \times \mathrm{Aut}^0(X)$ вместо $\pi^*(G_{\mathcal{A}}) \otimes \mathcal{P} \in D(X \times \mathrm{Pic}^0(X))$ в доказательстве выше?)

Из нерассказанного на лекции: Из инвариантности следует, например, такой факт:

Утверждение 8.6.3: Пусть X — гладкое проективное многообразие, у которого $\dim \mathrm{Pic}^0(X) > 0$. Тогда в $D(X)$ не существует полного исключительного набора.

Доказательство: Пусть $E \in D(X)$ — исключительный объект. Тогда теорема 8.6.1 утверждает, что для любого $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ верно $\langle E \rangle \otimes \mathcal{L} = \langle E \rangle$, из чего нетрудно вывести, что $E \simeq E \otimes \mathcal{L}$ (упражнение!). Если $\mathrm{supp}(E) = X$, то существует некоторый пучок когомологий $\mathcal{H} = \mathcal{H}^i(E)$, чей носитель тоже совпадает с X. При этом должно выполняться $\mathcal{H} \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{H}$ для всех $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$, но для когерентного пучка положительного ранга это невозможно (упражнение; см., например, «general fact» из начала доказательства [6, Lem. 6.9]). Противоречие; значит, $\mathrm{supp}(E)$ строго меньше, чем X. Можно доказать, что носитель E содержится в объединении конечного числа слоёв морфизма Альбанезе $\mathrm{alb}_X : X \to \mathrm{Pic}^0(\mathrm{Pic}^0(X))$.

Из этого следует, что никакой конечный набор исключительных объектов E_1, ..., E_k не может порождать всю категорию $D(X)$, так как $\mathrm{supp}(\oplus_i E_i) = \cup_i \mathrm{supp}(E_i)$ это собственное замкнутое подмножество в X и любой объект в порождённой $\oplus_i E_i$ подкатегории тоже будет иметь носитель внутри этого подмножества. □

Библиография

[1] J.-M. Drezet и J. Le Potier, «Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur P_2», *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, т. 18, вып. 2, сс. 193–243, 1985.

[2] W. Chang, F. Haiden, и S. Schroll, «Braid group actions on branched coverings and full exceptional sequences». 2023 г.

[3] K. Kawatani и S. Okawa, «Nonexistence of semiorthogonal decompositions and sections of the canonical bundle». 2018 г.

[4] A. Kuznetsov, «Base change for semiorthogonal decompositions», *Compos. Math.*, т. 147, вып. 3, сс. 852–876, 2011.

[5] P. Belmans, S. Okawa, и A. T. Ricolfi, «Moduli spaces of semiorthogonal decompositions in families». 2020 г.

[6] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. в Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, с. viii+307.