9. Полуортогональные разложения в малых размерностях

Изучение алгебраической геометрии часто начинается с изучения кривых. В этой лекции мы обсудим, какие для производных категорий когерентных пучков на кривых могут быть полуортогональные разложения. Для такого вопроса кривые, пожалуй, оказываются слишком простыми, чтобы служить ценным источником примеров, но разобраться, что с ними происходит, всё равно полезно. В конце лекции мы перейдём к поверхностям и обсудим некоторые результаты про них, в основном про $\mathbb{P}^2$.

9.1. Полуортогональные разложения для $\mathbb{P}^1$

Мы уже видели, что в производной категории проективного пространства существует полный исключительный набор:

$$D(\mathbb{P}^n) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), ..., \mathcal{O}(n) \rangle$$

В частности, для проективной прямой получается разложение $D(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1) \rangle$. Его можно подкрутить на любое число $n \in \mathbb{Z}$ и получить $D(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n+1) \rangle$.

Упражнение 9.1.1: Покажите, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ разложение $D(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n+1) \rangle$ получается из разложения $D(\mathbb{P}^1) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1) \rangle$ последовательностью перестроек.

Других нетривиальных полуортогональных разложений у проективной прямой не существует. Для того, чтобы это доказать, сначала вспомним, как устроены когерентные пучки на гладких кривых.

Лемма 9.1.2: Пусть C — гладкая кривая. Любой когерентный пучок $\mathcal{F}$ на C изоморфен прямой сумме $\mathcal{F} \simeq V \oplus T$ некоторого векторного расслоения V и пучка кручения T.

Доказательство: Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на C. Пусть $T \subset \mathcal{F}$ — подпучок кручения в нём, то есть наибольший подпучок, чей носитель — собственное подмножество C. Рассмотрим точную тройку:

$$0 \to T \hookrightarrow \mathcal{F} \to \mathcal{F}/T \to 0. \qquad (1)$$

В факторе $\mathcal{F}/T$ нет кручения (упражнение). Локальное кольцо каждой замкнутой точки на гладкой кривой является кольцом дискретного нормирования, а у таких колец любой конечно-порождённый модуль без кручения свободен. Значит, пучок $\mathcal{F}/T$ локально свободен, то есть это векторное расслоение. Точная тройка (1) выше задаётся некоторым классом в

$$\mathrm{Ext}^1_C(\mathcal{F}/T, T) \cong H^1\Big((\mathcal{F}/T)^{\vee} \otimes T\Big),$$

где $(-)^{\vee}$ означает двойственный объект в производной категории. Так как $\mathcal{F}/T$ – векторное расслоение, двойственный к нему объект в производном смысле — это обычное двойственное векторное расслоение. Поэтому объект $(\mathcal{F}/T)^{\vee} \otimes T$ является когерентным пучком. При этом носитель тензорного произведения $(\mathcal{F}/T)^{\vee} \otimes T$ равен носителю пучка T, в частности нульмерен. Значит, у пучка $(\mathcal{F}/T)^{\vee} \otimes T$ нет когомологий, кроме нулевых. Следовательно, точная тройка (1) расщепляется, что и даёт искомое разложение $\mathcal{F}$ в прямую сумму. □

Нам понадобится дополнительный факт, который уже верен не для произвольной кривой, а только для $\mathbb{P}^1$. Это теорема Гротендика:

Теорема 9.1.3 (см., например, [1, Thm. 2.1.1]): Пусть V — векторное расслоение на $\mathbb{P}^1$. Тогда оно изоморфно прямой сумме линейных расслоений $\bigoplus_{i=1}^{\mathrm{rk}\ V} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i)$ для некоторого набора целых чисел $k_1, ..., k_{\mathrm{rk}\ V}$.

Упражнение 9.1.4: Покажите, что на любой кривой положительного рода существуют векторные расслоения, не распадающиеся в прямую сумму линейных. (*Указание*: постройте нетривиальное расширение двух тривиальных линейных расслоений и докажите, что оно не распадается в прямую сумму никаким образом.)

Ключевое наблюдение, которое позволит нам классифицировать все допустимые подкатегории в $D(\mathbb{P}^1)$, состоит в том, что на проективной прямой «слишком легко» породить всю производную категорию $D(\mathbb{P}^1)$. Например, верно следующее:

Лемма 9.1.5: Любой из объектов ниже — классический генератор в $D(\mathbb{P}^1)$:
- прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ двух различных линейных расслоений;
- прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus T$ произвольного линейного расслоения и ненулевого пучка кручения $T \neq 0$.

Доказательство: Как мы уже знаем, для любого числа $k \in \mathbb{Z}$ прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k+1)$ двух линейных расслоений с последовательными подкрутками — классический генератор в $D(\mathbb{P}^1)$. Будем сводить всё к этому случаю.

Сперва докажем вспомогательное утверждение: прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_x$ любого линейного расслоения на $\mathbb{P}^1$ и пучка-небоскрёба в произвольной точке $x \in \mathbb{P}^1$ порождает $D(\mathbb{P}^1)$. Это частный случай $T = \mathcal{O}_x$ второго пункта в формулировке. В самом деле, существует сюръекция $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_x$, чьё ядро изоморфно $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-1)$. Поскольку точные тройки в абелевой категории переходят в выделенные треугольники в производной, из этого следует, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-1) \in \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_x \rangle$. Но, как было отмечено выше, пара расслоений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-1)$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ вместе порождают $D(\mathbb{P}^1)$. Значит, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_x$ — классический генератор $D(\mathbb{P}^1)$.

Докажем теперь, что два неизоморфных линейных расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ порождают $D(\mathbb{P}^1)$. Без потери общности можно считать, что $m < n$. Тогда общий однородный многочлен степени $n - m$ от двух переменных задаёт инъективное отображение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, чьё коядро — прямая сумма $(n - m)$ пучков-небоскрёбов в различных точках $\mathbb{P}^1$, а именно — в корнях выбранного многочлена. Значит, в подкатегории $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \rangle$ содержится прямая сумма $(n - m)$ небоскрёбов. По определению эта подкатегория замкнута относительно перехода к прямым слагаемым, поэтому пучки-небоскрёбы по отдельности в ней тоже содержатся. Значит, в $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \rangle$ содержится, например, прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus \mathcal{O}_x$ линейного расслоения и пучка-небоскрёба. Это сводит вопрос к предыдущему наблюдению.

Осталось доказать, что прямая сумма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus T$, где T — ненулевой пучок кручения, порождает $D(\mathbb{P}^1)$. Носитель T — нульмерен, поэтому $T(1) \simeq T$, из чего следует, что для некоторого числа $r > 0$ существует сюръекция $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow T$. Ядро этой сюръекции — пучок без кручения, то есть по лемме 9.1.2 векторное расслоение, а по теореме 9.1.3 это прямая сумма линейных расслоений $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i)$. По предыдущему пункту достаточно доказать, что в этой прямой сумме встретится хотя бы одно линейное расслоение, не изоморфное $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$. Если бы это было не так, то пучок T лежал бы в подкатегории $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \rangle$, но мы знаем, что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ — исключительный объект, и любой объект в порождённой им подкатегории — это прямая сумма сдвигов копий $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$. Значит, T не может лежать в этой подкатегории и всё доказано. □

Теперь мы можем доказать полную классификацию допустимых подкатегорий в производной категории когерентных пучков на проективной прямой.

Утверждение 9.1.6: Пусть $\mathcal{A} \subset D(\mathbb{P}^1)$ — допустимая подкатегория. Тогда это либо 0, либо $\langle \mathcal{O}(n) \rangle$ для какого-то $n \in \mathbb{Z}$, либо вся $D(\mathbb{P}^1)$.

Доказательство: Поскольку $\mathcal{A} \subset D(\mathbb{P}^1)$ допустима, в ней существует классический генератор $G \in \mathcal{A}$. На любой гладкой кривой категория когерентных пучков имеет гомологическую размерность один. Как мы обсуждали во второй лекции, из этого следует, что объект $G \in D(\mathbb{P}^1)$

изоморфен прямой сумме своих пучков когомологий $\oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^i(G)[-i]$. Легко видеть, что объекты

$$G \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^i(G)[-i] \quad \text{и} \quad \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^i(G)$$

порождают одну и ту же подкатегорию в $D(\mathbb{P}^1)$, а именно наименьшую триангулированную подкатегорию, содержащую все пучки $\mathcal{H}^i(G)$ и замкнутую относительно взятия прямых слагаемых. Поэтому можно без потери общности считать, что G — это когерентный пучок. Случай $G = 0$ тривиален, поэтому считаем, что $G \neq 0$.

По лемме 9.1.2 и теореме 9.1.3 тогда G изоморфно прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^{\mathrm{rk}(G)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i) \oplus T$ линейных расслоений и пучка кручения T. Рассмотрим несколько вариантов того, как может быть устроено это разложение:

Вариант 1: ранг равен нулю, то есть $G = T$ — пучок кручения. Тогда носитель G — некоторое конечное множество точек в $\mathbb{P}^1$, и носитель любого объекта в подкатегории $\langle G\rangle$ содержится в этом конечном множестве. Тогда подкатегория $\langle G\rangle$ не может быть допустимой: например, по теореме Каватани–Окавы об инвариантости любая допустимая подкатегория в $D(\mathbb{P}^1)$ должна быть PGL_2-инвариантна, но никакой (непустой) конечный набор точек не может сохраняться группой PGL_2. (*Упражнение*: докажите, используя другую теорему Каватани–Окавы, что ни на каком гладком проективном многообразии не существует допустимых подкатегорий, у которых объединение носителей всех объектов — конечное множество.) Значит, этот вариант невозможен.

Вариант 2: предположим, что среди линейных расслоений, входящих в разложение G в прямую сумму, встречается пара различных линейных расслоений $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$. Тогда по лемме 9.1.5 объект G порождает всю производную категорию $D(\mathbb{P}^1)$, то есть $\mathcal{A} = D(\mathbb{P}^1)$.

Вариант 3: предположим, что пучок кручения T в разложении G нетривиален. Тогда среди прямых слагаемых G найдётся и некоторое линейное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$, и нетривиальный пучок кручения T. Снова по лемме 9.1.5 из этого следует, что $\mathcal{A} = \langle G\rangle = D(\mathbb{P}^1)$.

Получается, что пучок G может порождать допустимую подкатегорию, не совпадающую с $D(\mathbb{P}^1)$, только тогда, когда он изоморфен прямой сумме нескольких копий одного и того же линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$. Тогда $\mathcal{A} = \langle G\rangle = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)\rangle$. □

9.2. Канонический класс и неразложимость производных категорий

Выше мы полностью классифицировали все полуортогональные разложения для $D(\mathbb{P}^1)$. Для кривых положительного рода классификация получается ещё проще: нетривиальных разложений не существует. То, что на кривой C рода $g > 0$ нет исключительных объектов, нетрудно доказать в духе утверждения 9.1.6 (*подсказка*: если E — векторное расслоение на C, то $E^\vee \otimes E$ содержит структурный пучок $\mathcal{O}_C$ как прямое слагаемое). Доказать, что никаких полуортогональных разложений вообще нет, сложнее. Ключевое утверждение естественно доказывать не только для кривых, а сразу в произвольной размерности. Это ещё одна теорема Каватани и Окавы, причём из всё той же статьи [2]:

Теорема 9.2.1: Пусть X — связное гладкое проективное многообразие, у которого каноническое линейное расслоение ω_X глобально порождено. Тогда в категории $D(X)$ нет допустимых подкатегорий, кроме нулевой и всей $D(X)$.

Иными словами, для такого многообразия X в любом полуортогональном разложении производной категории $D(X)$ одна из компонент равна всей $D(X)$, а остальные равны нулю. Триангулированные категории, не допускающие нетривиальных полуортогональных разложений, называются *неразложимыми*.

Доказательство: Пусть $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение. Нам нужно доказать, что либо $\mathcal{A}$, либо $\mathcal{B}$ — нулевая подкатегория. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, а $\mathcal{O}_x$ — пучок-небоскрёб в ней. Сначала мы покажем, что этот пучок обязательно лежит в одной из подкатегорий $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$. Для этого рассмотрим треугольник проекции для этого пучка:

$$B \to \mathcal{O}_x \overset{a}{\to} A \to B[1]. \tag{2}$$

Назовём средний морфизм в этом треугольнике $a : \mathcal{O}_x \to A$. Пусть $s \in \Gamma(X, \omega_X)$ — глобальное сечение канонического линейного расслоения, которое не обращается в ноль в точке $x \in X$. Такое s существует по предположению глобальной порождённости ω_X. Тогда умножение на это сечение задаёт изоморфизм $\mathcal{O}_x \overset{s}{\to} \mathcal{O}_x \otimes \omega_X \simeq \mathcal{O}_x$. Он вписывается в морфизм выделенных треугольников

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "s"] & \mathcal{O}_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & A \arrow[r] \arrow[d, "s"] & B[1] \arrow[d, "s"] \\
B \otimes \omega_X \arrow[r] & \mathcal{O}_x \arrow[r] & A \otimes \omega_X \arrow[r] & B \otimes \omega_X[1]
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим морфизм $A \to B \otimes \omega_X[1]$, получающийся из самого правого коммутативного квадрата. Отметим, что по двойственности Серра

$$R\mathrm{Hom}_{D(X)}(A, B \otimes \omega_X[1]) \cong R\mathrm{Hom}_{D(X)}(B \otimes \omega_X[1], A \otimes \omega_X[\dim X])^{\vee} \cong$$
$$\cong R\mathrm{Hom}_{D(X)}(B[1], A[\dim X])^{\vee},$$

но из полуортогональности разложения $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ мы знаем, что правая часть равна нулю. Значит, морфизм $A \to B \otimes \omega_X[1]$ — нулевой. Рассмотрим тогда отображения из A в объекты нижнего выделенного треугольника:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "s"] \arrow[dr, "0"] & \\
B \otimes \omega_X \arrow[r] & \mathcal{O}_x \arrow[r] & A \otimes \omega_X \arrow[r] & B \otimes \omega_X[1]
\end{tikzcd}$$

Из длинной точной последовательности, получаемой применением функтора $R\mathrm{Hom}(A, -)$ к этому выделенному треугольнику, мы знаем, что если отображение $A \to A \otimes \omega_X$ таково, что его композиция с морфизмом $A \otimes \omega_X \to B \otimes \omega_X[1]$ равна нулю, то это отображение поднимается до некоторого морфизма $t : A \to \mathcal{O}_x$.

Теперь можно рассмотреть композицию $t \circ a : \mathcal{O}_x \to A \to \mathcal{O}_x$. Поскольку $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x) \cong \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$, эта композиция или автоморфизм, или равна нулю. (Впоследствии мы увидим, что эти два случая соответствуют вариантам $\mathcal{A} = D(X)$ и $\mathcal{A} = 0$.).

Первый случай: предположим, что композиция $t \circ a$ — некоторый автоморфизм φ пучка-небоскрёба $\mathcal{O}_x$. Тогда треугольник проекции для пучка $\mathcal{O}_x$ расщепляется: морфизм $B \to \mathcal{O}_x$ из треугольника проекции (2) можно представить в виде композиции

$$\left(B \to \mathcal{O}_x \overset{\varphi^{-1}}{\to} \mathcal{O}_x \overset{a}{\to} A \right) \overset{t}{\to} \mathcal{O}_x,$$

но любой морфизм из B в A равен нулю по полуортогональности. Значит, морфизм $B \to \mathcal{O}_x$ в треугольнике (2) нулевой, из чего следует изоморфизм $A[-1] \simeq B \oplus \mathcal{O}_x[-1]$. Поскольку объекты $A[-1]$ и B должны быть полуортогональны, такой изоморфизм может существовать только в случае, когда $B = 0$, а A тогда изоморфно $\mathcal{O}_x$. Иными словами, в этом случае пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ лежит в подкатегории $\mathcal{A}$.

Второй случай: предположим, что композиция $t \circ a$ равна нулю. Рассмотрим тогда квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_x \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\simeq"'] & A \arrow[d, "s"] \arrow[dl, "t"'] \\
\mathcal{O}_x \arrow[r, "a \otimes \omega_X"] & A \otimes \omega_X
\end{tikzcd}$$

в котором по построению t нижний треугольник коммутативен. Если $t \circ a = 0$, то тогда заведомо равна нулю композиция $(a \otimes \omega_X) \circ t \circ a$. Из коммутативности нижнего треугольника получаем, что $s \circ a$ тоже равно нулю. Поскольку квадрат коммутативен, а левая вертикальная стрелка является изоморфизмом, из этого следует, что морфизм $a \otimes \omega_X : \mathcal{O}_x \to A \otimes \omega_X$ — нулевой. Подкрутка на ω_X — это эквивалентность категорий, то есть $a \otimes \omega_X$ равно нулю тогда и только тогда, когда морфизм $a : \mathcal{O}_x \to A$ равен нулю. Следовательно, треугольник проекции (2) расщепляется и $B \simeq \mathcal{O}_x \oplus A[-1]$. Как в предыдущем случае, из полуортогональности категорий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ мы тогда выводим, что $A = 0$ и $B \simeq \mathcal{O}_x$, то есть пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ лежит в подкатегории $\mathcal{B}$.

Итак, мы доказали, что для любой точки $x \in X$ пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ лежит либо в $\mathcal{A}$, либо в $\mathcal{B}$. Пусть $X_{\mathcal{A}} \subset X$ — подмножество замкнутых точек X, для которых пучок-небоскрёб лежит в подкатегории $\mathcal{A}$, а $X_{\mathcal{B}}$ — аналогичное подмножество для $\mathcal{B}$. Они, очевидно, не пересекаются, и мы доказали, что вместе $X_{\mathcal{A}}$ и $X_{\mathcal{B}}$ покрывают всё (множество замкнутых точек в) X.

Дальше есть несколько способов закончить доказательство. Проще всего воспользоваться теоремой Каватани–Окавы о жёсткости из прошлой лекции: из допустимости подкатегории $\mathcal{A}$ следует, что если для некоторой точки $x \in X$ пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ лежит в $\mathcal{A}$, то для всех точек из Зариски-открытой окрестности x это тоже верно, то есть $X_{\mathcal{A}}$ — Зариски-открытое подмножество. Аналогично $X_{\mathcal{B}}$ тоже открыто. Но в связном гладком многообразии любые два непустых Зариски-открытых подмножества пересекаются. Значит, одно из подмножеств $X_{\mathcal{A}}$ или $X_{\mathcal{B}}$ пустое. Если, к примеру, $X_{\mathcal{B}} = \emptyset$, то любой пучок-небоскрёб лежит в подкатегории $\mathcal{A}$. Тогда каждый объект $B \in \mathcal{B}$ должен быть полуортогонален всем пучкам-небоскрёбам, но это означает, что носитель B — пустое множество, то есть в $\mathcal{B}$ не содержится никаких объектов, кроме нулевого, а тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\perp} = D(X)$. Аналогично, если $X_{\mathcal{A}} = \emptyset$, то $\mathcal{A} = 0$. □

Замечание: В конце доказательства можно обойтись и без теоремы о жёсткости: используя тот факт, что точка $x \in X$ лежит в носителе объекта $E \in D(X)$ тогда и только тогда, когда $R\mathrm{Hom}_X(E, \mathcal{O}_x) \neq 0$, можно показать, что у любого объекта из $\mathcal{B}$ носитель — это замкнутое подмножество внутри $X_{\mathcal{B}}$, а у любого объекта из $\mathcal{A}$ носитель — это замкнутое подмножество в $X_{\mathcal{A}}$. Если рассмотреть тогда треугольник проекции для, например, структурного пучка $\mathcal{O}_X$ многообразия X, получится, что X представляется в виде объединения двух замкнутых непересекающихся подмножеств, а дальше аналогично рассуждению выше.

Упражнение 9.2.2: Пусть X — связное гладкое проективное многообразия, у которого ω_X не глобально порождено, но базисные точки ω_X — это конечное подмножество $Z \subset X$. (Такие многообразия существуют, см., например, [3].) Докажите, что в $D(X)$ всё равно нет нетривиальных допустимых подкатегорий, следуя плану ниже.

- Пусть $D(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ — полуортогональное разложение. Проверьте, что аргумент из доказательства теоремы 9.2.1 показывает, что если точка $x \in X$ не лежит в Z, то пучок-небоскрёб $\mathcal{O}_x$ в этой точке принадлежит одной из двух подкатегорий $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$.
- Тогда $X = (X_{\mathcal{A}} \sqcup X_{\mathcal{B}}) \cup Z$, где первые два множества открыты и не пересекаются, а Z — конечно. Выведите из этого, что либо $X_{\mathcal{A}}$, либо $X_{\mathcal{B}}$ пусто.
- Без потери общности можно считать, что $X_{\mathcal{B}}$ пусто. Докажите тогда, что носитель любого объекта из $\mathcal{B}$ содержится в конечном множестве Z. Используя теорему Каватани–Окавы о жёсткости, покажите, что это любая допустимая подкатегория, у которой объединение носителей объектов это конечный набор точек, обязательно равна нулю.

Следствие 9.2.3: Пусть C — гладкая проективная кривая рода $g > 0$. Тогда в $D(C)$ не существует нетривиальных допустимых подкатегорий.

Доказательство: Хорошо известно, что на любой гладкой кривой положительного рода каноническое линейное расслоение $\omega_C \cong \Omega^1_C$ глобально порождено (см., например, [4, Лем. IV.5.1]). Неразложимость производной категории $D(C)$ тогда следует из теоремы 9.2.1. □

Теорема 9.2.1 применима ко многим другим многообразиям. Например, из неё следует, что абелевы многообразия и многообразия Калаби–Яу имеют неразложимые производные категории. При этом глобальная порождённость канонической линейной системы не является необходимым условием для неразложимости производной категории, причём дело не только в усилении теоремы, описанном в упражнении 9.2.2. Получить другие критерии неразложимости производных категорий — важная, но сложная задача. Для кривых всё оказалось просто: если род положительный, то производная категория неразложима, а если нулевой, то разложима. Но уже для поверхностей до сих пор многое неизвестно. Ожидается, что у минимальной поверхности производная категория допускает нетривиальное полуортогональное разложение тогда и только тогда, когда структурный пучок — исключительный объект [5, Conj. 1.8].

Одна из сложностей, возникающей при попытке классифицировать многообразия с неразложимой производной категорией, состоит в том, что все существующие методы так или иначе похожи на теорему 9.2.1 и зависят от свойств канонического линейного расслоения. При этом возникают не относительно хорошо изученные «асимптотические» свойства вроде обильности (которая означает, что $\omega_X^{\otimes m}$ очень обильно при $m \gg 0$), а именно свойства самого расслоения и его ограничения на подмногообразия. Их сложно контролировать.

9.3. Исключительные объекты на $\mathbb{P}^2$

Про производные категории поверхностей известно гораздо меньше, чем в случае кривых. Многие общие вопросы о поведении полуортогональных разложений пока не имеют ответа даже в случае размерности два. Поэтому мы ограничимся обсуждением исключительных объектов и исключительных наборов.

Сперва докажем утверждение о поведении исключительных объектов при их ограничении на антиканонические дивизоры.

Утверждение 9.3.1: Пусть X — гладкая проективная поверхность, а $j : C \hookrightarrow X$ — гладкий антиканонический дивизор в X. Если $E \in D(X)$ — исключительный объект, то его производное ограничение $E|_C \in D(C)$ — это, с точностью до сдвига, когерентный пучок $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(C)$, причём $\mathrm{Hom}_C(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \cong \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$.

Доказательство: Отметим сперва, что по сопряжённости

$$R\mathrm{Hom}_C(E|_C, E|_C) \cong R\mathrm{Hom}_X(E, j_* j^* E).$$

Из точной тройки

$$0 \to \mathcal{O}_X(\omega_X) \xrightarrow{C} \mathcal{O}_X \to j_* \mathcal{O}_C \to 0$$

производным тензорным умножением на E получается выделенный треугольник

$$E \otimes \omega_X \to E \to j_* j^* E. \tag{3}$$

Поскольку $R\mathrm{Hom}_X(E, E) \cong \mathbb{C}[0]$, то по двойственности Серра $R\mathrm{Hom}_X(E, E \otimes \omega_X) \cong \mathbb{C}[-2]$. Тогда длинная точная последовательность, полученная применением функтора $R\mathrm{Hom}(E, -)$ к треугольнику (3), такова:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(E, E \otimes \omega_X) = 0 \to \mathrm{Hom}(E, E) \to \mathrm{Hom}(E, j_* j^* E) \to \mathrm{Ext}^1(E, E \otimes \omega_X) = 0 \to \\ \to \mathrm{Ext}^1(E, E) = 0 \to \mathrm{Ext}^1(E, j_* j^* E) \to \mathrm{Ext}^2(E, E \otimes \omega_X) \to \mathrm{Ext}^2(E, E) = 0 \end{aligned}$$

Получается, что $\mathrm{Ext}^\bullet_X(E, j_* j^* E) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_C(E|_C, E|_C)$ одномерно в степенях 0 и 1. В частности, $\mathrm{Hom}(E|_C, E|_C)$ одномерно, из чего следует, что $E|_C$ не раскладывается в прямую сумму нетривиальным образом. Поскольку C гладкая кривая, любой объект в $D(C)$ распадается в прямую сумму своих пучков когомологий. Неразложимость $E|_C$ означает, что тогда только один пучок когомологий не равен нулю. □

Замечание: Длинная точная последовательность в доказательстве обобщается до такого факта: на любом многообразии X ограничение исключительного объекта E на антиканонический дивизор $Z \subset X$— это так называемый *сферический объект*, то есть объект в $D(Z)$, у которого алгебра Ext'ов одномерна в двух степенях, нулевой и равной размерности Z.

Упражнение 9.3.2: Пусть C — гладкая проективная кривая, а $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на C. Предположим, что $\dim \mathrm{Hom}_C(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 1$. Докажите, что тогда $\mathcal{F}$ это или векторное расслоение, или пучок-небоскрёб в некоторой точке $c \in C$.

Утверждение 9.3.3: Пусть $E \in D(\mathbb{P}^2)$ — исключительный объект. Тогда $E \simeq \mathcal{E}[k]$, где $\mathcal{E}$ — исключительное векторное расслоение, а $k \in \mathbb{Z}$ — некоторый сдвиг.

Доказательство: По теореме Каватани–Окавы об инвариантности исключительный объект E на проективной плоскости является $\mathrm{PGL}(3)$-инвариантным. Из этого следует, что каждый пучок когомологий $\mathcal{H}^i(E)$ тоже $\mathrm{PGL}(3)$-инвариантен. Поскольку $\mathrm{PGL}(3)$ транзитивно действует на $\mathbb{P}^2$, любой $\mathrm{PGL}(3)$-инвариантный когерентный пучок имеет одинаковый ранг во всех точках $\mathbb{P}^2$, то есть является векторным расслоением (упражнение!). Следовательно, каждый пучок когомологий объекта E является векторным расслоением. Осталось доказать, что E сосредоточен в одной когомологической степени.

Пусть $j : C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ — замкнутое подмногообразие. Покажем, что у производного ограничения $E|_C \in D(C)$ тоже все пучки когомологий являются векторными расслоениями, причём тех же рангов, в том смысле, что для любого $i \in \mathbb{Z}$ верно $\mathrm{rk}\ \mathcal{H}^i(E|_C) = \mathrm{rk}\ \mathcal{H}^i(E)$. В самом деле, рассмотрим выделенный треугольник

$$E(-C) \to E \to j_* j^* E,$$

как в доказательстве утверждения 9.3.1. Он задаёт длинную точную последовательность пучков когомологий. Поскольку подкрутка на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-C)$ и прямой образ j_* являются точными функторами, они коммутируют с взятием i-тых пучков когомологий. Значит, фрагмент длинной точной последовательности выглядит так:

$$\ldots \to \mathcal{H}^i(E)(-C) \to \mathcal{H}^i(E) \to j_* \mathcal{H}^i(E|_C) \to \mathcal{H}^{i+1}(E)(-C) \to \mathcal{H}^{i+1}(E) \to \ldots$$

Для любого векторного расслоения $\mathcal{E}$ на $\mathbb{P}^2$ отображение умножения $\mathcal{E}(-C) \to \mathcal{E}$ — мономорфизм. Пучки $\mathcal{H}^i(E)$ и $\mathcal{H}^{i+1}(E)$ являются расслоениями, поэтому длинная точная последовательность расщепляется в набор точных троек для каждого $i \in \mathbb{Z}$:

$$0 \to \mathcal{H}^i(E)(-C) \to \mathcal{H}^i(E) \to j_* \mathcal{H}^i(E|_C) \to 0.$$

Однако мы знаем, что коядро отображения $\mathcal{H}^i(E)(-C) \to \mathcal{H}^i(E)$ изоморфно $j_*(\mathcal{H}^i(E)|_C)$. Значит, $\mathcal{H}^i(E|_C)$ изоморфно $\mathcal{H}^i(E)|_C$, то есть в частности является векторным расслоением ранга $\mathrm{rk}\ \mathcal{H}^i(E)$, что мы и хотели доказать.

Теперь применим утверждение 9.3.1 к какому-нибудь антиканоническому дивизору, то есть к гладкой кубической кривой на $\mathbb{P}^2$. Она утверждает, что $E|_C$ это, с точностью до сдвига, когерентный пучок $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(C)$. В частности, у $E|_C$ лишь один пучок когомологий не равен нулю. Выше мы объяснили, что $\mathcal{H}^i(E|_C)$ равно нулю тогда и только тогда, когда пучок $\mathcal{H}^i(E) \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^2)$ равен нулю. Значит, объект $E \in D(\mathbb{P}^2)$ сосредоточен в одной степени и, следовательно, изоморфен сдвигу некоторого векторного расслоения на $\mathbb{P}^2$. □

Замечание: Другой подход к доказательству утверждения 9.3.3 состоит в том, чтобы рассмотреть спектральную последовательность, вычисляющую $R\mathrm{Hom}_{\mathbb{P}^2}(E, E) \cong \mathbb{C}[0]$ в терминах Ext'ов между пучками когомологий E и внимательно изучить взаимосвязь между размерностями векторных пространств в этой спектральной последовательности. Таким образом можно доказать, что на любой поверхности дель Пеццо исключительный объект — это, с точностью до сдвига, исключительный когерентный пучок [6, Prop. 2.10].

Замечание: Первая часть доказательства верна в любой размерности: у исключительного объекта $E \in D(\mathbb{P}^n)$ для любого n все пучки когомологий являются векторными расслоениями. Однако прямого аналога утверждения 9.3.1 в многомерном случае нет. Поэтому существуют ли на $\mathbb{P}^n$ для $n > 2$ исключительные объекты, не являющиеся с точностью до сдвига расслоениями — открытый вопрос даже для $n = 3$. Ожидается, что их быть не должно.

Упражнение 9.3.4: Пусть X — гладкое многообразие, а $E \in D(X)$ — объект производной категории. Докажите, что следующие условия эквивалентны:
- все пучки когомологий E являются векторными расслоениями на X;
- объект E является *локально тривиальным*, в том смысле, что у каждой точки $x \in X$ существует открытая окрестность $U \subset X$, ограничение E на которую изоморфно в $D(U)$ объекту $\mathcal{O}_U \otimes V^\bullet$, где $\mathcal{O}_U$ — тривиальное линейное расслоение на U, а $V^\bullet$ — градуированное векторное пространство.

Эту интерпретацию можно использовать для более концептуального доказательства того, что в утверждении 9.3.3 пучки когомологий у $E|_C$ на C имеют те же ранги, что и у E на $\mathbb{P}^2$.

9.4. Исключительные расслоения на $\mathbb{P}^2$

Согласно утверждению 9.3.3 изучение исключительных объектов в $D(\mathbb{P}^2)$ сводится к вопросам об исключительных расслоениях. Именно с исключительных векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$ исторически всё и началось: термин «исключительное расслоение» ввели Дрезе и Ле Потье в статье [7] в связи со свойствами пространств модулей расслоений на $\mathbb{P}^2$, а то, что исключительные расслоения интересно изучать и на других многообразиях, и что естественно обобщить понятие до исключительных когерентных пучков и исключительных объектов в производной категории, другие математики придумали позже, вдохновляясь результатами этой статьи.

Обсудим более подробно исключительные векторные расслоения на проективной плоскости. Вспомним сначала, что у векторного расслоения $\mathcal{E}$ на $\mathbb{P}^2$ есть три топологических инварианта:
- ранг $r = \mathrm{rk}\ \mathcal{E} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
- первый класс Черна $c_1(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$, он же степень линейного расслоения $\Lambda^{\mathrm{rk}\ \mathcal{E}}\mathcal{E}$;
- второй класс Черна $c_2(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$, он же класс Эйлера; для расслоений $\mathcal{E}$, у которых есть глобальные сечения, обращающиеся в ноль только в конечном числе точек, класс Эйлера равен числу этих точек с кратностями.

Утверждение 9.4.1: Пусть $\mathcal{E}$ — исключительное векторное расслоение на $\mathbb{P}^2$. Тогда $r = \mathrm{rk}\ \mathcal{E}$ и $c_1(\mathcal{E})$ — взаимно простые числа. Кроме того, верно равенство $c_2(\mathcal{E}) = (r^2 + (r-1)c_1^2 - 1)/2r$.

Доказательство: Теорема Гротендика–Римана–Роха утверждает, что на любом гладком проективном многообразии X для любых двух когерентных пучков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ целое число

$$\chi(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) := \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i_X(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

зависит только от классов Черна пучков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ и от топологических инвариантов многообразия X, и выражается явной формулой. Формулировать теорему в общем виде мы не будем, но для случая $X = \mathbb{P}^2$ и векторного расслоения $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ она утверждает, что

$$\chi(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = r^2 + (r-1)c_1^2 - 2rc_2. \tag{4}$$

У нас $\mathcal{E}$ — исключительное векторное расслоение, то есть $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ нулевое при $i \neq 0$ и одномерно при $i = 0$. Значит, по определению $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 1$. По формуле (4) это означает, что числа r и c_1 взаимно просты, а c_2 однозначно ими определяется. □

Для дальнейшего нам понадобится такое определение:

Определение 9.4.2: Пусть $\mathcal{E}$ — векторное расслоение на $\mathbb{P}^2$. Тогда его *наклон* $\mu(\mathcal{E})$ это отношение $\frac{c_1(\mathcal{E})}{\operatorname{rk}(\mathcal{E})} \in \mathbb{Q}$.

Утверждение 9.4.1 позволяет вычислить все классы Черна исключительного векторного расслоения, используя только его наклон:

Лемма 9.4.3: Пусть $\mathcal{E}$ — исключительное расслоение на $\mathbb{P}^2$. Тогда все его топологические инварианты, то есть числа $\operatorname{rk}(\mathcal{E})$, $c_1(\mathcal{E})$ и $c_2(\mathcal{E})$, однозначно определяются наклоном $\mu(\mathcal{E}) \in \mathbb{Q}$.

Доказательство: Из утверждения 9.4.1 следует, что первый класс Черна и ранг $\mathcal{E}$ взаимно просты, причём ранг — положительное число, поэтому они восстанавливаются как числитель и знаменатель приведённой дроби для $\mu(\mathcal{E}) = \frac{c_1(\mathcal{E})}{\operatorname{rk} \mathcal{E}}$, а второй класс Черна выражается через них. □

На самом деле верно гораздо более сильное утверждение:

Теорема 9.4.4 ([7]): Исключительные расслоения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ на $\mathbb{P}^2$ изоморфны тогда и только тогда, когда равны их наклоны.

Мы дадим набросок доказательства. Оно использует понятие *стабильности* для векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$:

Определение 9.4.5: Расслоение $\mathcal{E}$ на $\mathbb{P}^2$ называется *стабильным*, если для любого подрасслоения $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, у которого $\operatorname{rk} \mathcal{E}' < \operatorname{rk} \mathcal{E}$, выполняется неравенство $\mu(\mathcal{E}') < \mu(\mathcal{E})$.

Замечание: Более точно было бы называть это понятие μ-стабильностью, потому что существует и другие варианты. Дрезе и Ле Потье работают в основном как раз со стабильностью по Гизекеру, но для наших целей достаточно определения выше.

Понятие стабильности естественным образом возникает при изучении пространств модулей расслоений и играет там важнейшую роль. Грубо говоря, стабильность расслоения гарантирует, что у него просто устроена теория деформаций, то есть оно хорошо ведёт себя в семействах. При этом таких расслоений достаточно много: любое векторное расслоение на $\mathbb{P}^2$ имеет фильтрацию подрасслоениями, где все промежуточные факторы стабильны.

У нас нет времени на подробное обсуждение свойств стабильных расслоений, поэтому следующий стандартный факт мы оставим без доказательства.

Лемма 9.4.6: Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — два стабильных векторных расслоения на $\mathbb{P}^2$. Если $\mu(\mathcal{E}) > \mu(\mathcal{F})$, то $\operatorname{Hom}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$. Если же $\mu(\mathcal{E}) = \mu(\mathcal{F})$, то $\operatorname{Hom}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ изоморфно $\mathcal{F}$.

Аналогичным образом для следующего утверждения мы дадим только набросок доказательства.

Утверждение 9.4.7: Пусть $\mathcal{E}$ — исключительное расслоение на $\mathbb{P}^2$. Тогда $\mathcal{E}$ стабильно.

Доказательство (набросок): Для каждой гладкой кубики $C \subset \mathbb{P}^2$ ограничение $\mathcal{E}|_C$ — векторное расслоение, которое по утверждению 9.3.1 обладает свойством $\dim \operatorname{Hom}_C(\mathcal{E}|_C, \mathcal{E}|_C) = 1$. Поскольку C — гладкая проективная кривая рода 1, любое *простое* векторное расслоение на C, то есть расслоение, не имеющее никаких эндоморфизмов, кроме умножений на скаляры, автоматически является стабильным. Значит, ограничение $\mathcal{E}$ на любую кубическую кривую $C \subset \mathbb{P}^2$ стабильно. Из этого можно вывести, что $\mathcal{E}$ само стабильно. □

Замечание: В статье Дрезе и Ле Потье исключительные расслоения определялись не в терминах алгебры Ext'ов, а как стабильные векторные расслоения, у которых второй класс Черна выражается через ранг и c_1 по формуле из утверждения 9.4.1. Это эквивалентное определение.

Теперь мы можем вернуться к теореме 9.4.4:

Доказательство (теоремы 9.4.4): Предположим, что у исключительных векторных расслоений $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ одинаковые наклоны. Тогда по лемме 9.4.3 у этих двух расслоений одинаковые ранги, а так же первые и вторые классы Черна. Теорема Гротендика–Римана–Роха (см. доказательство утверждения 9.4.1) влечёт, что число

$$k := \chi(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \dim \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) - \dim \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) + \dim \operatorname{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2),$$

зависит только от топологических инвариантов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, но поскольку они у $\mathcal{E}_2$ такие же, как у $\mathcal{E}_1$, то k можно вычислять, заменив $\mathcal{E}_2$ на $\mathcal{E}_1$, то есть k равно

$$\chi(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) = \dim \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) - \dim \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) + \dim \operatorname{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) = 1 - 0 + 0 = 1.$$

По определению k это значит, что хотя бы одно из векторных пространств $\operatorname{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ и $\operatorname{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ не равно нулю.

Заметим теперь, что по двойственности Серра

$$\operatorname{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1(-3))^{\vee}.$$

Легко доказать, что из стабильности $\mathcal{E}_1$ следует, что подкрутка $\mathcal{E}_1(-3)$ тоже стабильна, причём $\mu(\mathcal{E}_1(-3)) = \mu(\mathcal{E}_1) - 3$ строго меньше, чем $\mu(\mathcal{E}_2) = \mu(\mathcal{E}_1)$. Тогда по лемме 9.4.6 ненулевых отображений из $\mathcal{E}_2$ в $\mathcal{E}_1(-3)$ не существует, и тогда $\operatorname{Ext}^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = 0$.

Значит, $\dim \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \geq k = 1$, но по лемме 9.4.6 для стабильных расслоений с одинаковым наклоном так может быть только тогда, когда эти расслоения изоморфны. Это мы и хотели доказать. □

Из теоремы 9.4.4 следует, что классификация исключительных векторных расслоений на $\mathbb{P}^2$ состоит в том, чтобы описать множество тех рациональных чисел, которые являются наклонами исключительных расслоений. Обозначим это множество через $\mathfrak{E} \subset \mathbb{Q}$. Поскольку каждое линейное расслоение $\mathcal{O}(n)$ исключительно, все целые числа лежат в $\mathfrak{E}$. Дрезе и Ле Потье явно описали это подмножество таким образом:

Теорема 9.4.8 ([7]): Существует цепочка подмножеств $\mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{Q}$ такая, что:
- $\mathfrak{E} = \cup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathfrak{E}_i$;
- Каждое $\mathfrak{E}_i$ — дискретное подмножество в $\mathbb{Q}$, причём $\mathfrak{E}_0 = \mathbb{Z}$.
- Подмножество $\mathfrak{E}_{i+1}$ определяется индуктивно: для каждой пары «соседних» рациональных чисел $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{E}_i$, то есть таких элементов $\mathfrak{E}_i$, что в открытом интервале (μ_1, μ_2) не содержится ни одного элемента $\mathfrak{E}_i$, существует некоторое число $\mu_1 \cdot \mu_2$, лежащее строго между μ_1 и μ_2, определённое явной формулой в терминах числителей и знаменателей приведённых дробей для μ_1 и μ_2. Тогда $\mathfrak{E}_{i+1}$ это объединение $\mathfrak{E}_i$ и чисел $\mu_1 \cdot \mu_2$ для всех пар соседних чисел из $\mathfrak{E}_i$.

Доказательство в статье [7] хитрое: сначала доказывается абстрактный критерий для существования на $\mathbb{P}^2$ стабильных расслоений с заданными топологическими инвариантами (r, c_1, c_2). Этот критерий даётся в терминах множества $\mathfrak{E}$ наклонов всех исключительных расслоений на $\mathbb{P}^2$, но для доказательства критерия не требуется знать, как это множество устроено. Затем с помощью этого критерия показывается, что индуктивная процедура из теоремы 9.4.8 корректна, то есть, что для пары соседних чисел μ_1 и μ_2 из некоторого $\mathfrak{E}_i$ стабильное расслоение с наклоном $\mu_1 \cdot \mu_2$ существует и является исключительным, то есть доказывается вложение $\cup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathfrak{E}_i \subset \mathfrak{E}$. Наконец, после этого снова с помощью того же критерия показывается, что существование исключительного расслоения, чей наклон не получается индуктивной процедурой, давало бы противоречие.

Другую интерпретацию индуктивной процедуре из теоремы 9.4.8 дали Городенцев и Рудаков в терминах исключительных наборов:

Утверждение 9.4.9 *([8])*: Пусть $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ — три числа из $\mathfrak{E}$. Тогда следующие условие эквивалентны:
- числа μ_1 и μ_3 являются соседними в некотором $\mathfrak{E}_i \subset \mathfrak{E}$, а μ_2 равно $\mu_1 \cdot \mu_3$;
- знаменатели r_1, r_2, r_3 приведённых дробей для μ_1, μ_2, μ_3 являются решением *уравнения Маркова*: $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 3 r_1 r_2 r_3$.
- соответствующие этим наклонам исключительные расслоения образуют полный исключительный набор $D(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{E}_{\mu_1}, \mathcal{E}_{\mu_2}, \mathcal{E}_{\mu_3} \rangle$.

Отметим такое следствие: для тройки чисел $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathfrak{E}$, удовлетворяющим условиям утверждения 9.4.9, можно рассмотреть в исключительном наборе $\langle \mathcal{E}_{\mu_1}, \mathcal{E}_{\mu_2}, \mathcal{E}_{\mu_3} \rangle$ перестройку расслоения $\mathcal{E}_{\mu_3}$ через $\mathcal{E}_{\mu_2}$, то есть полный исключительный набор $\langle \mathcal{E}_{\mu_1}, \sigma_2\left(\mathcal{E}_{\mu_3}\right), \mathcal{E}_{\mu_2} \rangle$. Значит, по утверждению 9.4.9 расслоение $\sigma_2\left(\mathcal{E}_{\mu_3}\right)$ имеет наклон $\mu_1 \cdot \mu_2$. Иными словами, операция «$\cdot$» из теоремы 9.4.8 описывает, что происходит с наклонами исключительных расслоений при перестройках исключительных наборов.

С помощью этой интерпретации удалось доказать полную классификацию исключительных объектов и исключительных наборов на $\mathbb{P}^2$:

Теорема 9.4.10 ([8]):
- Любое исключительное расслоение $\mathcal{E}$ на $\mathbb{P}^2$ может быть дополнено до полного исключительного набора.
- Любая исключительная пара $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle$ на $\mathbb{P}^2$ может быть дополена до полного исключительного набора.
- Любой полный исключительный набор в $D(\mathbb{P}^2)$ получается из стандартного набора Бейлинсона $\langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \rangle$ последовательностью перестроек.

Аналогичная классификация исключительных наборов как перестроек стандартного верна и на произвольной поверхности дель Пеццо, см. [6]. Но кроме этого, по сути, почти ничего неизвестно. Даже для $\mathbb{P}^3$ неизвестно, являются ли все исключительные объекты сдвигами расслоений, получается ли любое исключительное расслоение перестройками стандартного и т.п. Некоторые частичные результаты про $\mathbb{P}^3$ имеются в [9].

Библиография

[1] C. Okonek, M. Schneider, и H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*. в Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011, с. viii+239.

[2] K. Kawatani и S. Okawa, «Nonexistence of semiorthogonal decompositions and sections of the canonical bundle». 2018 г.

[3] F. Zucconi, «Surfaces with $p_g = q = 2$ and an irrational pencil», *Canad. J. Math.*, т. 55, вып. 3, сс. 649–672, 2003.

[4] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*. Мир, 1981.

[5] S. Okawa, «Semiorthogonal indecomposability of minimal irregular surfaces». 2023 г.

[6] S. A. Kuleshov и D. O. Orlov, «Exceptional sheaves on Del Pezzo surfaces», *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, т. 58, вып. 3, сс. 53–87, 1994.

[7] J.-M. Drezet и J. Le Potier, «Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur P_2», *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, т. 18, вып. 2, сс. 193–243, 1985.

[8] A. L. Gorodentsev и A. N. Rudakov, «Exceptional vector bundles on projective spaces», *Duke Math. J.*, т. 54, вып. 1, сс. 115–130, 1987.

[9] A. Polishchuk, «Simple helices on Fano threefolds», *Canad. Math. Bull.*, т. 54, вып. 3, сс. 520–526, 2011.