УДК 512.76

Торические поверхности дель Пеццо и пучки эллиптических кривых с низким ветвлением

С. С. Галкин

Аннотация. В статье изучаются слабые модели Ландау–Гинзбурга зеркально симметричные к поверхностям дель Пеццо. Показано что такие модели существуют, и для поверхностей отличных от $\mathbb{F}_1$ и S_7 их компактификации являются эллиптическими пучками минимального ветвления. В конце иллюстрируется гипотеза Дубровина: в случае поверхностей дель Пеццо она связывает эллиптические пучки минимального ветвления и 3-блочные полные исключительные наборы.

Для поверхностей дель Пеццо степени d в работе [1] (и предшествовавших ей работах, таких как [36]) построены зеркально-симметричные модели Ландау–Гинзбурга для достаточно общего выбора симплектической формы. Построенные таким образом модели имеют следующую комплексную структуру: особый слой над бесконечностью — это колесо из d кривых, и кроме этого особого слоя есть ещё $12-d$ простых особых слоев. В этой главе мы рассмотрим противоположный случай — зеркально симметричные поверхностям дель Пеццо слабые модели Ландау–Гинзбурга, в которых простые особые слои склеиваются в 3 (минимальное возможное количество) вырожденных слоя, соответствующие естественному выбору симплектической формы в антиканоническом классе. Для этих моделей мы проверим гипотезу зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа.

1. Эллиптические поверхности.

Впервые систематическое изложение теории эллиптических поверхностей было дано Кодаирой в работе [26]. Напомним основные результаты.

Обозначим через t координату на $\mathbb{A}^1$. Тогда *j-инвариант* $j(t)$ эллиптической поверхности над $\mathbb{P}^1$ — это j-инвариант общего слоя эллиптической поверхности над $\mathbb{P}^1$, то есть j-инвариант эллиптической кривой над полем функций $\mathbb{C}(t)$. Будем говорить что эллиптическая поверхность *изотривиальна*, если $j(t)$ — константа (то есть j — отображение в точку, все неособые слои изоморфны над $\mathbb{C}$). Будем говорить что эллиптическая поверхность *якобиева*, если она имеет сечение (якобиан произвольной эллиптической поверхности — якобиева эллиптическая поверхность). Если E_0 — произвольная эллиптическая поверхность над кривой C, разрешив её особенности, а затем стянув все (-1)-кривые в компонентах слоёв, получим *модель Нерона* E — минимальную неособую модель среди эллиптических якобиевых поверхностей над C ([29]). Пусть E' — поверхность полученная из модели Нерона E якобиевой эллиптической поверхности стягиванием всех компонент слоёв не пересекающих нулевое сечение (*модель Вейерштрасса*). Поверхность E' имеет дювалевские особенности, а стягивание $E \to E'$ — минимальное (крепантное) разрешение особенностей.

Напомним, что если эллиптическая поверхность E' задана в вейерштрассовой нормальной форме

$$y^2 = x^3 + Ax + B,$$

Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS 05-100000-8118 и НШ-1987.2008.1.

то её j-инвариант равен

$$j = 1728\frac{4A^3}{27B^2+4A^3},$$

а *дискриминант*

$$\Delta = 27B^2+4A^3.$$

Глобально, дискриминант Δ это дивизор на кривой C. Обозначим $J = \frac{j}{1728}$, а $\omega_E = \frac{dx}{y}$ — *дифференциал Нерона*. Пусть $c \in C$ — точка на базе, обозначим $a = \operatorname{ord}_c A, b = \operatorname{ord}_c B, \delta = \operatorname{ord}_c \Delta$, $e = e_J(c)$ — индекс ветвления отображения J в точке c.

Теорема 1.1 ([26]). *Все возможные слои модели Нерона над точкой c перечислены в следующей таблице (I_0 — неособые, I_n —* полустабильные*).*

Тип особого слоя E_c определяется локальной монодромией локальной системы $R^1t_*(\mathbb{Z}_E)$ вокруг точки c. Пусть $I_{[p,q]} = \begin{pmatrix} (1-pq) & p^2 \\ -q^2 & (1+pq) \end{pmatrix}$ — симплектическое отражение относительно вектора $[p,q]$. Обозначим $I_A = I_{[0,1]}, I_B = I_{[-1,1]}, I_C = I_{[1,1]}$.

обозначение	a	b	δ	J	$1+e_J(c)$	особенность E'	моно- дромия T	$Tr(T)$
$I_0(G)$	0	0	0	G	1	—	1	2
$I_0(0)$	$a \geqslant 1$	0	0	0	$3a$	—	1	2
$I_0(1)$	0	$b \geqslant 1$	0	1	$2b$	—	1	2
$I_0^*(G)$	2	3	6	G	1	D_4	$I_A^4 I_B I_C$	-2
$I_0^*(0)$	$a \geqslant 3$	3	6	0	$3a-6$	D_4	$I_A^4 I_B I_C$	-2
$I_0^*(1)$	2	$b \geqslant 4$	6	1	$2b-6$	D_4	$I_A^4 I_B I_C$	-2
$I_n, n \geqslant 1$	0	0	n	∞	n	A_{n-1}	I_A^n	2
$I_n^*, n \geqslant 1$	2	3	$n+6$	∞	n	D_{n+4}	$I_A^{n+4} I_B I_C$	-2
II	$a \geqslant 1$	1	2	0	$3a-2$	—	$I_A I_C$	1
III	1	$b \geqslant 2$	3	1	$2b-3$	A_1	$I_A^2 I_C$	0
IV	$a \geqslant 2$	2	4	0	$3a-4$	A_2	$I_A^3 I_C$	-1
IV^*	$a \geqslant 3$	4	8	0	$3a-8$	E_6	$I_A^5 I_B I_C^2$	-1
III^*	3	$b \geqslant 5$	9	1	$2b-9$	E_7	$I_A^6 I_B I_C^2$	0
II^*	$a \geqslant 4$	5	10	0	$3a-10$	E_8	$I_A^7 I_B I_C^2$	1

Будем говорить что у эллиптической поверхности полустабильная редукция в точке c (или, что слой над c полустабильный), если особый слой над c имеет тип I_n. Будем говорить, что эллиптическая поверхность полустабильна, если все её особые слои имеют полустабильную редукцию. Пусть $r(c)$ — ранг группы порождённой лежащими в слое над c исключительными дивизорами отображения $E \to E'$ (то есть, ранг системы Дынкина ассоциированной с дювалевской особенностью модели Вейерштрасса).

Разобрав все случаи в таблице докажем следующее

Утверждение 1.2. (1) *Топологическая эйлерова характеристика приведённого слоя E над c равна δ,*

(2) $r(c) = \delta \iff$ *слой над c гладкий,*

(3) $r(c) = \delta - 1 \iff$ *слой над c полустабильный,*

(4) *в остальных случаях* $r(c) = \delta - 2$.

С другой стороны, топологическая эйлерова характеристика тотального пространства E (равная $12\chi(E,\mathcal{O}_E)$ по формуле Нётера) равна сумме топологических эйлеровых характеристик особых слоёв (гладкие слои — эллиптические кривые, имеют топологическую эйлерову характеристику равную 0), поэтому

$$\deg\Delta = \sum_c \delta_c = \sum_c \chi_{top}(E_c) = \chi_{top}(E) = 12\chi(E,\mathcal{O}_E). \tag{1.3}$$

Пусть $\Phi(E)$ — *группа Морделла–Вейля*, то есть группа всех сечений E над C. Тогда группа Пикара E порождена сечениями и неприводимыми компонентами слоёв (см., например [33], [35] или [28]), точное выражение этого разложения даёт формула Шиоды–Тейта

$$\rho(E) = \operatorname{rk}\Phi(E) + 2 + \sum_c r(c).$$

Эллиптическая поверхность E называется *экстремальной*, если $h^{1,1}(E)=\rho(E)$ (для рациональной поверхности это условие выполнено автоматически) и группа Морделла–Вейля $\Phi(E)$ конечна. Например, экстремальными являются рациональные полустабильные поверхности, если у них 4 особых слоя.

Если поверхность E рациональная, то $\rho(E)=10, \chi_{top}(E)=12$.

С подгруппой конечного индекса $G\subset PSL(2,\mathbb{Z})$ связана модулярная эллиптическая поверхность Шиоды $S(G)$ — тотальное пространство универсальной эллиптической кривой над модулярной кривой $X(G)=\overline{\mathcal{H}/G}$, где $\mathcal{H}$ — верхняя полуплоскость ([33]).

Следующая теорема была доказана Бовилем.

Теорема 1.4 ([5],[6])**.** *У неизотривиальной эллиптической поверхности не менее трёх особых слоёв.*

Пусть S — неизотривиальная эллиптическая поверхность над полной кривой C со всюду полустабильной редукцией. Тогда

(1) *У S не менее четырёх особых слоёв.*
(2) *Если у S ровно четыре особых слоя, то кривая $C\simeq\mathbb{P}^1$, а сама поверхность S рациональна, якобиева, экстремальная, и изоморфна (над $\mathbb{C}$) одной из 6 эллиптических поверхностей Шиоды $S(G)$, перечисленных в следующей таблице.*

тип	G	уравнение (t — координата на C)	j-инвариант
$E_{(9111)}$	$\Gamma_0(9)\cap\Gamma_1(3)$	$X^2Y+Y^2Z+Z^2X+tXYZ=0$	$j_3=\frac{t^3(t^3-24)^3}{t^3-27}$
$E_{(8211)}$	$\Gamma_0(8)\cap\Gamma_1(4)$	$(X+Y)(XY-Z^2)+tXYZ=0$	$j_4=\frac{(t^4-16t^2+16)^3}{t^2(t^2-16)}$
$E_{(6321)}$	$\Gamma_1(6)$	$(X+Y)(Y+Z)(Z+X)+tXYZ=0$	$j_6=\frac{t^3(t^3-24t-48)^3}{(t-6)(t+3)^2(t+2)^3}$
$E_{(5511)}$	$\Gamma_1(5)$	$X(X-Z)(Y-Z)+tYZ(X-Y)=0$	$j_7=\frac{(t^4-40t^2-120t-80)^3}{(t+3)^5(t^2-5t-25)}$
$E_{(4422)}$	$\Gamma_1(4)\cap\Gamma_2(2)$	$X(X^2+Z^2+2ZY)+tZ(X^2-Y^2)=0$	$j_8=\frac{(t^4-16t^2+256)^3}{t^4(t-4)^2(t+4)^2}$
$E_{(3333)}$	$\Gamma_2(3)$	$(X^3+Y^3+Z^3)+tXYZ=0$	$j_9=\frac{t^3(t+6)^3(t^2-6t+36)^3}{(t-3)^3(t^2+3t+9)^3}$

Во всех этих случаях кривая $C = X(G)$ имеет род 0. Тип — это упорядоченный набор индексов ветвления j над ∞, то есть поверхность $E_{(efgh)}$ имеет 4 особых слоя-колеса I_e, I_f, I_g и I_h. Во всех бовилевских случаях получается, что группа Морделла–Вейля состоит из кручения, и оно имеет порядок $\sqrt{(efgh)}$.

Замечание 1.5. Пусть $(efgh)$ — одна из шести четвёрок чисел соответствующая бовилевской поверхности. Выберем одно из этих чисел и обозначим его d, а остальные три (abc). В работе [25] описаны все трёхблочные полные исключительные наборы в производной категории когерентных пучков на поверхности дель Пеццо степени d — ранги исключительных пучков в каждом блоке постоянны (обозначим их x, y, z, а количества исключительных пучков в блоках обозначим a, b, c), тогда эти числа удовлетворяют уравнению $ax^2+by^2+cz^2 = \sqrt{(abcd)}xyz$. Соответствующие наборы $d; abc$ в точности совпадают с наборами $(d; abc)$ которые можно получить из поверхностей Бовиля (см. также 5).

В работе [28] Миранда и Перссон нашли все экстремальные рациональные якобиевы эллиптические поверхности. Из формулы Шиоды–Тейта, теоремы Бовиля, утверждения 1.2 и 1.3 получается, что у такой поверхности E не более четырёх особых слоев, причём если особых слоя ровно четыре, то поверхность E полустабильна, а если особых слоёв меньше трёх, то поверхность E изотривиальна. Если же у экстремальной поверхности E три особых слоя, то ровно один из них не полустабилен.

Предложение 1.6 ([28]). *Экстремальных эллиптических поверхностей с тремя особыми слоями всего шесть, типы особых слоёв и вейерштрассовы нормальные формы этих поверхностей перечислены в следующей таблице.*

Пусть $(u : v)$ — однородные координаты на базе $\mathbb{P}^1$, $t = \frac{u}{v}$, A и B — однородные многочлены от $(u : v)$ степеней 4 и 6, соответственно.

тип	A	B	J	$\lvert\Phi(E)\rvert$
$II^*I_1I_1$	$-3u^4$	$2u^5v$	$\frac{u^2}{u^2-v^2}$	1
$III^*I_2I_1$	$-uv^3$	$v^5(u-v)$	$\frac{4u^3}{(u-3v)^2(4u-3v)}$	2
$IV^*I_3I_1$	$v^3(24u-27v)$	$v^4(16u^2-72uv+54v^2)$	$\frac{v(24u-27v)^3}{6427u^3(u-v)}$	3
$I_1^*I_4I_1$	$-3(u^2-3v^2)(u-2v)^2$	$u(2u^2-9v^2)(u-2v)^3$	$\frac{4(u^2-3v^2)^3}{27v^4(u^2-4v^2)}$	4
$I_4^*I_1I_1$	$-3v^2(u^2-3v^2)$	$uv^3(2u^2-9v^2)$	$\frac{4(u^2-3v^2)^3}{27v^4(u^2-4v^2)}$	2
$I_2^*I_2I_2$	$-3uv(u-v)^2$	$(u-v)^3(u^3+v^3)$	$\frac{-4u^3v^3}{(u^3-v^3)^2}$	4

Замечание 1.7. Последние три поверхности изогенны.

2. Квантовые когомологии поверхностей дель Пеццо.

Пространство MM модулей стабильных отображений μ рациональных кривых C с n отмеченными точками $p_1, \dots, p_n$ снабжено n отображениями вычисления $ev_i : \overline{M}_n(X, \beta) \to X$ и линейными тавтологическими расслоениями $\mathcal{L}_i$. Отображение ev_i переводит набор $[\mu : C \to X; p_1, \dots, p_n \in C]$ в образ i-ой отмеченной точки: $ev_i([\mu : C \to X; p_1, \dots, p_n]) = \mu(p_i) \in X$. Слой $\mathcal{L}_i$ над $[\mu : C \to X; p_1, \dots, p_n \in C]$ — это $T^*_{p_i}C$. Класс Чженя $\psi_i = c_1(L_i) \in H^2(\overline{M}_n(X, \beta), \mathbb{Q})$ называется i-ым тавтологическим классом.

Набору когомологических классов $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in H^\bullet(X,\mathbb{Z})$ и целых неотрицательных чисел $k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}_+$ удовлетворяющих условию

$$\sum_i(\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}\gamma_i+2k_i)=2d_M$$

соответствует *n-точечный инвариант Громова–Виттена с потомками*

$$I_\beta(\tau_{k_1}(\gamma_1)\tau_{k_2}(\gamma_2)\dots\tau_{k_n}(\gamma_n))=\int_{[\overline{M}_n(X,\beta)]}\psi_1^{k_1}\cup ev_1^*(\gamma_1)\cup\ldots\cup\psi_n^{k_n}\cup ev_n^*(\gamma_n).$$

Этот инвариант не зависит от комплексной структуры X — для гладких деформаций X_t и для X получается одно число (при отождествлении когомологий X и когомологий близких X_t). Инварианты вида $I_\beta(\tau_{k_1}(\gamma_1)\tau_{k_2}(\gamma_2)\dots\tau_{k_n}(\gamma_n))$, где $\sum_i(\operatorname{codim}\gamma_i+2k_i)\neq 2d_M$ формально положим равными 0.

Инварианты $I_\beta(\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n)=I_\beta(\tau_0(\gamma_1)\tau_0(\gamma_2)\dots\tau_0(\gamma_n))$ называются *примарными.*

Если $Z_i\subset X$ — алгебраические подмногообразия (коразмерности больше 1) в общем положении, и $\gamma_i\in H^{2\operatorname{codim}_X Z_i}(X,\mathbb{Z})$ — соответствующие им когомологические классы, то примарный инвариант $I_\beta(\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n)$ равен (ожидаемому) числу рациональных неприводимых кривых класса β на многообразии X, пересекающих многообразия Z_i.

Есть два способа упаковать всю совокупность инвариантов Громова–Виттена многообразия X в один объект — коммутативное кольцо квантовых когомологий $QH(X)$ и функция (степенной ряд) I^X.

Определение 2.1 ([17])**.** *$\mathcal{I}$-ряд* для многообразия X и класса $\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})$ — это следующий производящий ряд для всех одноточечных инвариантов Громова–Виттена рода 0 с потомками:

$$\mathcal{I}_\beta^X=ev_{1*}(\frac{1}{1-\psi_1}[\overline{M}_1(X,\beta)])\in H^\bullet(X,\mathbb{Q})$$

Если γ_i — однородный базис $H^\bullet(X,\mathbb{Q})$, а $\gamma_i^\vee$ — двойственный базис, то $\mathcal{I}_\beta^X=\sum_{i\geqslant 0,j}I_\beta(\tau_i(\gamma_j))\gamma_j^\vee$; из соображений размерности, для каждого j существует не более одного i для которого $I_\beta(\tau_i(\gamma_j))\neq 0$.

Ограниченный (с X) $\mathcal{I}$-ряд для подмногообразия $i:Y\subset X$ и класса $\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})$ это ряд

$$\mathcal{I}_\beta^{X\to Y}=\sum_{\beta_Y\in H_2(Y,\mathbb{Z})|i_*\beta_Y=\beta}i_*ev_{1*}\left(\frac{1}{1-\psi_1}[\overline{M}_1(Y,\beta_Y)]\right),$$

Производящий ряд для всех $\mathcal{I}$-рядов $\mathcal{I}_\beta^X$ по всем классам $\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})$ мы будем называть просто $\mathcal{I}$-рядом многообразия X:

$$\mathcal{I}^X=\sum_{\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})}\mathcal{I}_\beta^X t^\beta\in H^\bullet(X,A)$$

Аналогично, $\mathcal{I}$-ряд ограниченный (с X) для подмногообразия Y это

$$\mathcal{I}^{X\to Y}=\sum_{\beta\in H^2(X,\mathbb{Z})}I_\beta^{X\to Y}t^\beta\in H^\bullet(X,A).$$

Нас будут интересовать ограничения этой функции на орбиты $\phi_{H,t_0}(\mathbb{C}^*)$ одномерных подторов.

Если H — дивизор на X, а $t_0 \in T$ — точка тора T, $\mathcal{I}$-рядом относительно H с параметром t_0 мы будем называть ограничение функции $\mathcal{I}^X$ на одномерный подтор $t_0 T_H$:

$$\mathcal{I}^X_{H,t_0}(t) = \phi^*_{H,t_0}\mathcal{I}^X(t)$$

Аналогично

$$\mathcal{I}^{X\to Y}_{H,t_0}(t) = \phi^*_{H,t_0}\mathcal{I}^{X\to Y}(t) = \sum_\beta \mathcal{I}^{X\to Y} t_0^\beta t^{(\beta\cdot H)}$$

Если отображение $i_* H_2(Y,\mathbb{Z}) \to H_2(X,\mathbb{Z})$ сюръективно (например, по теореме Лефшеца), то ограниченный относительный $\mathcal{I}$-ряд $\mathcal{I}^{X\to Y}_{H,t_0} \in H^\bullet(X,\mathbb{Q})[t,t^{-1}]$ равен прямому образу (i_*) от $\mathcal{I}^Y_{H|_Y, t_0|_Y} \in H^\bullet(Y,\mathbb{Q})[t,t^{-1}]$.

Если параметр t_0 не указан, он предполагается равным 1. Наконец, если X — многообразие Фано, то его $\mathcal{I}$-рядом мы будем называть $\mathcal{I}^X_{-K_X,1}$-ряд относительно антиканонического класса.

Для каждого из определённых выше рядов, его ортогональную проекцию на $H^0(X,A)$ мы будем называть фундаментальным членом соответствующего $\mathcal{I}$-ряда (и обозначать так же, заменяя букву $\mathcal{I}$ на обычную I). Например,

$$I^X = \int_{[X]} \mathcal{I}^X,$$

$$I^{X\to Y} = \int_{[X]} \mathcal{I}^{X\to Y}.$$

Теорема 2.2 (Квантовая теорема Лефшеца. [17])**.** *Предположим, что Y — гиперплоское сечение X, Если $-K_Y\cdot\beta \geqslant 2$ для всех $\beta \in \overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}$, то верна формула*

$$\mathcal{I}^{X\to Y}_\beta = \mathcal{I}^X_\beta \cdot \prod_{i=0}^{Y\cdot\beta}(Y+i).$$

Соответственно, для $\mathcal{I}$-ряда целиком относительно (Y,t_0) верна формула

$$\mathcal{I}^{X\to Y}_{Y,1} = \sum_\beta \mathcal{I}^X_\beta t^{(Y\cdot\beta)} \prod_{i=0}^{Y\cdot\beta}(Y+i) \tag{2.3}$$

В общем случае, если $-K_Y$ численно эффективен, существуют явно вычислимые функции $P_0, P_1 \in \mathbb{C}[[t]]$, для которых верна формула

$$P_0 \sum_\beta \mathcal{I}^{X\to Y}_\beta \tilde{t}^{(Y\cdot\beta)} = \sum_\beta \mathcal{I}^X_\beta t^{(Y\cdot\beta)} \prod_{i=0}^{Y\cdot\beta}(Y+i),$$

где $\tilde{t} = e^{\frac{P_1}{P_0}}t$. То есть, формула 2.3 верна с точностью до линейной замены переменной $logt \to logt + \frac{P_1}{P_0}$ и константы P_0.

Определение 2.4. *Кольцом (малых) квантовых когомологий $QH(X)$* называется свободный A-модуль $QH(X) = H^\bullet(X,A)$ со следующим образом заданным $\star$-умножением:

$$\int_{[X]} (\gamma_1 \star \gamma_2) \cup \gamma_3 = \sum_{\beta\in\overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}} I_\beta(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)t^\beta,$$

Если кольцо R обладает структурой A-модуля, то определим кольцо малых квантовых когомологий с коэффициентами в R как $QH(X,R) = QH(X) \otimes_A R$.

Кольцом квантовых когомологий проективного (вложенного линейной системой $|H|$ соответствующей очень обильному дивизору H) многообразия $X \subset \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}(H))^*)$ (с параметром $t_0 \in T$) будем называть кольцо $QH_{H,t_0}(X)$, получающееся заменой базы ϕ_{H,t_0}.

Специализация кольца $QH(X)$ при $t = 0$ (в единственной T-неподвижной точке пространства Spec A) изоморфна кольцу когомологий многообразия X, поскольку $\overline{M_3}(X, 0) = X, I_0(\gamma, \gamma, \gamma) = \int_{[X]} \gamma \cup \gamma \cup \gamma$.

Определение 2.5 ([21])**.** (Приведённым) спектром многообразия (относительно дивизора H и параметра t_0) мы будем называть схему (подмножество в $\mathbb{C}^*$) нулей характеристического многочлена оператора $\star H : QH_{H,t_0}(X) \to QH_{H,t_0}(X)$. Спектром многообразия Фано мы называем его приведённый спектр относительно антиканонического класса дивизора с параметром 1.

Замечание 2.6. Если рассмотреть аналогичный оператор в обычных когомологиях, то получится 0, т.к. $H^{>0}(X, \mathbb{Q})$ — максимальный нильпотентный идеал.

Определение 2.7 ([31])**.** Многообразие X называется квантово минимальным относительно обильного дивизора H и параметра t_0, если подкольцо в $QH_{H,t_0}(X)$ порождённое элементом H это $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$-модуль ранга $(\dim(X) + 1)$. Многообразие Фано X называется *квантово минимальным* если оно квантово минимально относительно антиканонического класса $-K_X$ с параметром 1.

Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа утверждает, в частности, чт регуляризованный фундаментальный член I-ряда является периодом зеркально двойственной модели Ландау–Гинзбурга.

Теорема 2.8 ([19])**.** *Пусть X — неособое торическое многообразие почти Фано, $D_1, ..., D_k$ — все неприводимые инвариантные дивизоры, $Y_1, \ldots, Y_l$ — численно эффективные дивизоры на X, $Y = \cap Y_i$ — гладкое полное пересечение в X с численно эффективным антиканоническим классом $-K_Y$ (например, Y — многообразие почти Фано или Калаби–Яу). Пусть индекс Y не равен 1 или $K_Y = 0$.*

Тогда фундаментальный член I-ряда

$$I^{X \to Y} = \sum_\beta t^\beta \frac{\prod (Y_i \cdot \beta)!}{\prod (D_j \cdot \beta)!},$$

где суммирование ведётся только по тем классам эффективных 1-циклов β для которых указанные под факториалами целые числа неотрицательны.

Если Y произвольное, то I^Y отличается от $\sum_\beta t^\beta \frac{\prod (Y_i \cdot \beta)!}{\prod (D_j \cdot \beta)!}$ заменой координат аналогичной 2.2. В частности, $I^{X \to Y}_{-K_X, t_0} = e^{\alpha t} \sum_\beta t^{(-K_Y \cdot \beta)} t_0^\beta \frac{\prod (Y_i \cdot \beta)!}{\prod (D_j \cdot \beta)!}$, где α — число.

Предложение 2.9. *В предположениях теоремы 2.8, обозначим символом ρ_j образующую луча соответствующего дивизору D_j. Рассмотрим многочлен Лорана*

$$f_u = \alpha + \sum_{j=1}^k u_j x^{\rho_j}$$

Пусть t_0 — образ точки $(u_\rho)_{\rho \in \Sigma(1)} \in \prod_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{C}^*$, так что $t_0^\beta = \prod u_j^{(D_j \cdot \beta)}$.

Тогда выполняются равенства

$$I^X_{-K_X,t_0} = \Phi^{nr}_{f_u}(t),$$

$$I^{X,reg}_{-K_X,t_0} = \Phi_{f_u}(t).$$

Другими словами, многочлен Лорана f_u является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия X с параметром t_0 с точностью до перенормировки.

Доказательство. Во-первых, $\Phi^{nr}_{f+\alpha}(t) = e^{\alpha t}\Phi^{nr}_f(t)$, поэтому утверждение сводится к случаю $\alpha = 0$. Элементы β соответствуют линейным соотношениям $\sum \beta_j\rho_j = 0$ между векторами ρ_j. Вклад не численно эффективных 1-циклов в фундаментальный член I-ряда равен 0. Для численно эффективного цикла коэффициент $\frac{((\sum D_j)\cdot\beta)!}{\prod(D_j\cdot\beta)!} = \frac{(\sum\beta_j)!}{\prod\beta_j!}$ при t^β в I^X равен вкладу в коэффициент при 1 от произведений мономов вида $\prod(x^{\rho_j})^{\beta_j}$ (в произведении $(\sum u_jx^{\rho_j})\cdot\ldots\cdot(\sum u_jx^{\rho_j})$ выбрать в каждом множителе по одному моному x^ρ, чтобы всего для каждого j было выбрано β_j мономов x^{ρ_j} можно именно $\frac{(\sum\beta_j)!}{\prod\beta_j!}$ способами). А коэффициент $\prod u_j^{\beta_j}$ в точности равен t_0^β по определению t_0.
□

Теорема 2.10 ([2])**.** *Фундаментальный член I-ряда для $G = G(2,n)$ (относительно обильной образующей группы Пикара $\mathcal{O}(H) = \mathcal{O}(1)$) равен*

$$I^G_H = \sum_{d\geqslant 0}\frac{t^d}{(d!)^2}\sum_{d\geqslant j_{n-3}\geqslant\ldots\geqslant j_1\geqslant j_0=0}\frac{1}{(d-j_{n-3})!\prod_{i=2}^{n-2}\left((d-j_{i-1})!(j_{i-1}-j_{i-2})!j_{i-1}!\right)},$$

Это следствие гипотезы Хори–Вафы ([23]), описывающей полный I-ряд грассманиана $G(r,n)$, и (в случае $r=2$) комбинаторного тождества между итерированной биномиальной суммой и однократной (формулы Бейли). Два доказательства гипотезы Хори–Вафы изложены в [2], и там же доказывается справедливость предыдущей формулы для фундаментального члена I-ряда. Теорема 2.8 даёт явные формулы для (фундаментальных членов) I-рядов торических поверхностей $\mathbb{P}^2 = T_{3.1}$, $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 = T_{4.1}$, $\mathbb{F}_1 = T_{4.2}$, а также $S_7 = T_{5.1}$ и $S_6 = T_{6.4}$. и поверхностей являющихся полными пересечениями в проективных пространствах — S_4 (пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^4$) и S_3 (кубика в $\mathbb{P}^3$), то есть всех поверхностей дель Пеццо степеней $d = 9,8,7,6,4,3$. Поверхность дель Пеццо степени 2 это гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1,1,1,2)$, а поверхность дель Пеццо степени 1 это гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1,1,2,3)$; их I-ряды можно вычислить с помощью теоремы 2.8 на разрешениях объемлющих торических пространств (гладкие гиперповерхности не проходят через особенности, см. также [32]).

Поверхности дель Пеццо S_5 степени 5 получаются как сечения грассманиана $G(2,5)$ подпространствами коразмерности 4 (в плюккеровом вложении).

Таким образом, фундаментальный член I-ряда для S_5 относительно H с точностью до перенормировки получается применением квантовой формулы Лефшеца (2.2) к фундаментальному члену I-ряда $G(2,5)$ (2.10):

$$I^{S_5,reg}_H(t) = e^{\alpha t}\sum_{d\geqslant 0} t^d(d!)^5 I^{G(2,5)}_H[d],$$

где $I^{G(2,5)}_H[d]$ — коэффициент $I^{G(2,5)}_H$ при мономе t^d.

Выпишем явные формулы для фундаментальных членов I-рядов поверхностей дель Пеццо (с точностью до перенормировки).

$$I_{-K}^{\mathbb{P}^2,reg} = \sum \frac{(3n)!}{n!^3} t^{3n} \tag{2.11}$$

$$I_{-K}^{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1,reg} = \sum \frac{(2n)!^2}{n!^4} t^{2n} \tag{2.12}$$

$$I_{-K,t_0(u,v)}^{\mathbb{F}_1,reg} = \Phi_{x+y+\frac{v}{u}xy+ux^{-1}y^{-1}}(t) = \sum_{n,m\geqslant 0} \frac{(3n+2m)!}{(n+m)!m!n!^2} u^n v^m t^{3n+2m} \tag{2.13}$$

$$I_{-K,t_0(u_1,u_2,v)}^{S_7,reg} = \Phi_{x^{-1}+y^{-1}+u_1x+u_2y+vxy}(t) = \sum_{a,b,c\geqslant 0} \frac{(3c+2a+2b)!}{a!b!c!(a+c)!(b+c)!} u_1^a u_2^b v^c t^{3c+2a+2b} \tag{2.14}$$

$$I_{-K}^{S_6,reg} = \sum_{a,b,c\geqslant 0} \frac{(a+b+c)!^2}{(a!b!c!)^2} t^{a+b+c} = \sum_n t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!^2 2k!}{(n-k)!^2 k!^4} \tag{2.15}$$

$$I_{-K}^{S_4,reg} = \sum \frac{(2n)!^2}{n!^4} t^n \tag{2.16}$$

$$I_{-K}^{S_3,reg} = \sum \frac{(3n)!}{n!^3} t^n \tag{2.17}$$

$$I_{-K}^{S_2,reg} = \sum \frac{(4n)!}{(2n)!n!^2} t^n \tag{2.18}$$

$$I_{-K}^{S_1,reg} = \sum \frac{(6n)!}{(3n)!(2n)!n!} t^n \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} I_{-K}^{S_5,reg} &= \sum_{a,b,c\geqslant 0} \frac{(a+b+c)!^3}{a!^2 b! c!^2 (a+b)!(b+c)!} t^{a+b+c} = \\ &= \sum_{n\geqslant 0} t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!(n+k)!}{k!^3 (n-k)!^2} = \\ &= 1 + 3t + 19t^2 + 147t^3 + 1251t^4 + 11253t^5 + \ldots \end{aligned} \tag{2.20}$$

Замечание 2.21. Эти ответы согласуются с полученными другими методами: с явными вычислениями Краудера–Миранды в терминах линейных систем ([7]), с вычислениями Гётше–Пандхарипанде (см. [22], вкратце — они показали, что трёхточечные инварианты Громова–Виттена на раздутии поверхности дель Пеццо S восстанавливаются из инвариантов Громова–Виттена S с помощью уравнений ассоциативности, и явно восстановили), с предсказаниями Концевича–Манина об их свойствах ([27]).

3. Слабые модели Ландау–Гинзбурга

Рассмотрим регулярную функцию $f : \mathbb{T} \to \mathbb{A}^1$ на торе. Эта функция может быть представлена многочленом Лорана:

$$f = f(x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_d, x_d^{-1}) = \sum_{m\in M} a_m x^m.$$

Определение 3.1. Обозначим через $\phi_f(i)$ свободный член (то есть коэффициент при 1) многочлена f^i. Положим

$$\omega = \prod_{k=1}^{n} \frac{dx_k}{(2\pi i)x_k}$$

$$\Phi_f = \sum_{i\geqslant 0} \phi_f(i)\cdot t^i = \int_{S^1\times\ldots\times S^1} \frac{1}{1-tf(x)}\cdot\omega$$

$$\Phi_f^{nr} = \sum_{i\geqslant 0} \phi_f(i)\cdot \frac{t^i}{i!} = \int_{S^1\times\ldots\times S^1} e^{tf(x)}\cdot\omega$$

Ряд Φ_f называется (регуляризованным) *рядом свободных членов* многочлена f, а ряд Φ_f^{nr} — нерегуляризованным рядом свободных членов.

Φ_f является периодом, то есть интегралом от некоторой послойной относительно $f:\mathbb{T}\to\mathbb{A}^1$ формы объёма; в явном виде эта форма равна вычету $Res_{f=t^{-1}}(\frac{1}{1-tf(x)}\omega)$.

Теорема 3.2 ([34], см. также [18])**.** *Ряд свободных членов Φ_f является решением уравнения Пикара–Фукса для заданного отображением $f^{-1}:\mathbb{T}\to\mathbb{A}^1$ пучка гиперповерхностей в торе $\mathbb{T}$.*

Определение 3.3 ([30])**.** Пусть X — гладкое многообразие Фано, $t_0\in T$ — точка тора T, H — очень обильный дивизор, а $I_H^X(t)$ — фундаментальный член I-ряда X относительно H. Многочлен Лорана f называется *очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для (X,H,t_0), если выполнено одно из двух эквивалентных условий

$$\Phi_f^{nr}(t) = I_{H,t_0}^X(t)$$

$$\Phi_f(t) = I_{H,t_0}^{X,reg}(t)$$

Очень слабая модель Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано X с параметром t_0 — это очень слабая модель Ландау–Гинзбурга для тройки $(X,-K_X,t_0)$. Если параметр t_0 не указан, он равен 1.

Многочлен Лорана $f\in\mathbb{C}[\mathbb{T}]$ называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для многообразия Фано X, если он является очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X и почти все слои отображения $f:\mathbb{T}\to\mathbb{A}^1$ бирационально эквивалентны $(\dim X-1)$-мерным многообразиям Калаби–Яу.

Многочлен Лорана f считается слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X с точностью до перенормировки, если для некоторых констант α,β многочлен $\beta f+\alpha$ является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X.

Опишем достаточное условие (и в общем случае необходимое) того, что слои являются многообразиями Калаби-Яу.

Определение 3.4. *Носитель* многочлена Лорана f это множество всех индексов m, для которых коэффициенты при соответствующих им мономах не равны нулю:

$$\mathrm{Supp}(f) = \{m : a_m \neq 0\}$$

Выпуклая оболочка носителя f называется *многогранником Ньютона* многочлена Лорана f и обозначается $\Delta(f)$

$$\Delta(f) = Conv\,(m : a_m \neq 0)$$

Таким образом, многогранник Ньютона многочлена Лорана — это выпуклый целый многогранник. Символом $L(\Delta)$ обозначим векторное пространство многочленов Лорана, носитель которых содержится в Δ.

Пусть $f \in L(\Delta)$. Обозначим через $Z(f,\Delta)$ гиперповерхность нулей $f \in H^0(\mathbb{P}(\Delta),\mathcal{O}(1))$ в торическом пространстве $\mathbb{P}(\Delta)$ соответствующей многограннику Δ. Если Δ — рефлексивный многогранник, то $\mathbb{P}(\Delta)$ — торическое многообразие Фано и $-K_{\mathbb{P}(\Delta)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Delta)}(1)$, соответственно $Z(f,\Delta)$ — антиканоническое сечение многообразия Фано $\mathbb{P}(\Delta)$.

Определение 3.5. Многочлен $f \in L(\Delta)$ называется *невырожденным* относительно (Δ,δ), если $Z(f,\Delta)$ трансверсально пересекается с $\mathbb{P}^o(\delta)$ в пространстве $\mathbb{P}(\Delta)$. Многочлен f называется невырожденным относительно Δ, если он невырожден относительно всех орбит $\delta \in \Delta$.

Из определения легко выводятся следующие свойства:

Предложение 3.6. (1) *Многочлен $f = \sum a_m x^m \in L(\Delta)$ невырожден относительно 0-мерного страта l тогда и только тогда, когда коэффициент a_l отличен от нуля. Поэтому многочлен Лорана f невырожден относительно всех 0-мерных стратов $\mathbb{P}(\Delta)$ тогда и только тогда, когда $\Delta = \Delta(f)$.*

(2) *Пусть δ — одномерный страт $\mathbb{P}(\Delta)$ соответствующий ребру $[m,m']$ многогранника Δ. Предположим, что отрезок $[m,m']$ не содержит целых точек отличных от вершин m и m'. Тогда, если многочлен f невырожден относительно m и m', то f невырожден относительно δ.*

(3) *Пусть $f' \in L(\Delta)$ — многочлен Лорана, носитель которого содержится в открытой внутренности многогранника Ньютона $\Delta(f)$. Тогда многочлен f невырожден относительно Δ тогда же, когда и многочлен $f+f'$.*

Будем говорить что многочлен Лорана f невырожден, если f невырожден относительно $\Delta(f)$. Обозначим $\mathbb{P}(f) = \mathbb{P}(\Delta(f)), Z(f) = Z(f,\Delta(f))$.

Для грани Γ многогранника Δ, обозначим символом $l(\Gamma)$ количество целых точек на этой грани, а символом $l^*(\Gamma)$ — количество целых точек внутри грани.

На когомологиях $H^\bullet(Z(f,\Delta),\mathbb{C})$ есть смешанная структура Ходжа; размерности некоторых факторов её фильтраций можно вычислить с помощью следующей теоремы.

Теорема 3.7 ([9], 5.6-5.11)**.** *Если многочлен Лорана f невырожден, то при $p>0$*

$$h^{p,0}(H^{d-1}(Z(f))) = \sum_{\dim\Gamma=p+1} l^*(\Gamma),$$

суммирование производится по всем $(p+1)$-мерным граням Γ многогранника $\Delta(f)$.

4. Модели Ландау–Гинзбурга для поверхностей дель Пеццо.

Напомним, что существует 16 рефлексивных многоугольников Δ_0. Они соответствуют 16 торическим поверхностям дель Пеццо S_0 с дювалевскими особенностями:

Предложение 4.1. *Все торические поверхности дель Пеццо с дювалевскими особенностями перечислены в следующей таблице. Всего их 16.*

обозначение	Δ	*описание*
$T_{3.1}$	$\Delta(x+y+x^{-1}y^{-1})$	$\mathbb{P}^2$, *минимальная*

$T_{4.1}$	$\Delta(x+y+x^{-1}+y^{-1})$	$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, *минимальная*
$T_{4.3}$	$\Delta(x(y+y^{-1})+x^{-1})$	*квадратичный конус*
$T_{4.2}$	$\Delta(x+y+xy+x^{-1}y^{-1})$	$\mathbb{F}_1$
$T_{5.1}$	$\Delta(x+y+x^{-1}+y^{-1}+x^{-1}y^{-1})$	*гладкая поверхность степени 7*
$T_{5.2}$	$\Delta(x^{-1}(y^{-1}+y)+y^{-1}+x)$	
$T_{6.1}$	$\Delta(x+x^{-1}(y+y^{-2}))$	
$T_{6.2}$	$\Delta(xy+xy^{-1}+yx^{-1}+x^{-1})$	
$T_{6.3}$	$\Delta((1+y)(x+x^{-1})+y^{-1})$	
$T_{6.4}$	$\Delta((1+x)(1+y)(1+x^{-1}y^{-1}))$	*гладкая поверхность степени 6*
$T_{7.1}$	$\Delta(x^{-1}y+x(y+y^{-2})+y^{-1})$	
$T_{7.2}$	$\Delta(xy+xy^{-1}+yx^{-1}+x^{-1}+y^{-1})$	
$T_{8.1}$	$\Delta(y(x^{-2}+x^2)+y^{-1})$	*максимальная*
$T_{8.2}$	$\Delta((x^{-2}+1)y+(y^{-2}+1)x)$	
$T_{8.3}$	$\Delta((x+x^{-1})(y+y^{-1}))$	*максимальная*
$T_{9.1}$	$\Delta(x^2y^{-1}+x^{-1}y^2+x^{-1}y^{-1})$	*максимальная*

Замечание 4.2. В обозначении $T_{k.n}$ число k равно $\rho(T_{k.n})+2=12-\deg(T_{k.n})$ (количество целых точек на границе многоугольника), а n — просто номер среди поверхностей с данным числом k.

Если раздуть на $\mathbb{P}^2$ какие-то $(9-d)$ точек в необщем положении (возможно бесконечно близкие), то получится неособая поверхность S. Если $d>2$ и в линейной системе кубик, проходящих через раздуваемые точки, нет неподвижных компонент, то антиканоническая линейная система $|-K_S|$ будет задавать отображение S на поверхность дель Пеццо S_0 с дювалевскими особенностями (раздутие соответствующего пучка идеалов $\mathcal{I}$ на $\mathbb{P}^2$ с $h^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I})=(9-d)$).

Предложение 4.3 ([13], см. также [10]). *Все поверхности дель Пеццо степени $d>2$ с дювалевскими особенностями получаются описанным выше способом.*

Рассмотрев относительный антиканонический образ раздутия $\mathbb{P}^2$ в универсальном пучке идеалов над схемой Гильберта $Hilb_{(9-d)}(\mathbb{P}^2)$ пучков идеалов $\mathcal{I}$ коразмерности $(9-d)$ (то есть пучков идеалов $\mathcal{I}$, для которых $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}$ — пучок с нульмерным носителем и $h^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/I)=9-d$) получим

Следствие 4.4. *Поверхности дель Пеццо степени $d\geqslant 3$ с дювалевскими особенностями являются вырождениями гладких поверхностей дель Пеццо степени d.*

Предложение 4.5. *Пусть S — гладкая поверхность дель Пеццо степени $d\geqslant 3$, а S_0 — торическая поверхность дель Пеццо степени d с дювалевскими особенностями. Тогда S_0 является вырождением S.*

Это утверждение является следствием более общего классического результата дю Валя 4.4.

Рассмотрим многочлен Лорана $f=\sum u_m x^m$, многоугольник Ньютона которого совпадает с многоугольником поверхности S_0. Он задаёт пучок аффинных кривых $Z_s=\{x\in\mathbb{T}: f(x)=s\}$ геометрического рода 1 на торе $\mathbb{T}\simeq(\mathbb{C}^*)^2$. Рассмотрим его как эллиптическую поверхность над $\mathbb{A}^1$.

Замечание 4.6. На пространстве всех многочленов Лорана действуют две группы — тор $\mathbb{T}$ заменами координат на себе:

$$t : \sum u_m x^m \mapsto \sum (u_m \cdot t^m) x^m,$$

и группа Aff^1 аффинных преобразований образа $f \to a \cdot f + b$. Ряды свободных членов Φ_f, Φ_f^{nr} инвариантны относительно действия тора $\mathbb{T}$, и эквивариантны относительно действия Aff^1 (например, на Φ_f^{nr}, действие продолжается так: $\Phi_f^{nr}(t) \to e^{tb} \Phi_f^{nr}(at)$).

Пространство многочленов Лорана с носителем содержащимся в $\Delta \backslash 0$ можно отождествить с пространством $\mathbb{T}$-инвариантных дивизоров на S_0 с коэффициентами в $\mathbb{C}$. Это отождествление называется *дивизориально-мономиальным соответствием.* Дивизору $\sum a_m D_m$ соответствует многочлен $\sum a_m x^m$. В случае особого S_0 воспользуемся дивизориально-мономиальным соответствием для крепантного разрешения S_0'. Действия алгебры Ли тора T на многочленах Лорана соответствует сдвигам на главные дивизоры. Многочленам Лорана с носителем совпадающим с $\Delta \backslash 0$ соответствуют T-инвариантные дивизоры все компоненты которых отличны от 0; такие дивизоры можно рассматривать как элементы $Div(S_0) \otimes \mathbb{C}^*$, и записывать в виде $exp(2\pi i \sum a_m D_m)$ (дивизор $\sum a_m D_m$ определён однозначно с точностью до целого). Действия самого тора T на таких многочленах Лорана соответствует сдвигам логарифма $\sum a_m D_m$ на главные дивизоры.

Пример 4.7 (Проективная плоскость)**.** Рассмотрим общий многочлен Лорана

$$f_{3.1}^{gen} = a_x x + a_y y + a_z x^{-1} y^{-1}$$

Он соответствует главному дивизору тогда и только тогда, когда $a_x \cdot a_y \cdot a_z = 1$. С точностью до главного дивизора многочлен $f_{3.1}^{gen}$ эквивалентен многочлену $f_{3.1} = x + y + a \cdot x^{-1} y^{-1}$.

Лемма 4.8. *Поверхность дель Пеццо S_d степени $d \geqslant 3$ (а также поверхности S_1 и S_2) квантово минимальна всегда, за исключением двух случаев $S = \mathbb{F}_1$ и $d = 7$.*

Доказательство. Это утверждение можно проверить явно (например, с помощью формул [7] или [22]). Концептуальная причина квантовой минимальности поверхностей дель Пеццо в том, что они допускают действие группы G, инвариантные когомологии относительно которого 3-мерны (см. [11])), а поскольку квантовое умножение сохраняет инвариантные когомологии квантовый куб канонического класса выражается через меньшие степени (см. [16]). $\square$

Как будет видно далее, поверхности $\mathbb{F}_1$ и S_7 оказываются квантово минимальными относительно некоторого нетривиального параметра t_0.

Обозначим модель Нерона эллиптической поверхности заданной многочленом f через E_f.

Бирациональные преобразования эллиптических поверхностей являются изоморфизмами над открытым множеством на базе, поэтому, естественно, на уравнение Пикара–Фукса и периоды не влияют.

С эллиптическими поверхностями связано два типа накрытий — изогении и замены базы. Оба случаях изоморфно отображают гомологии слоёв над $\mathbb{Q}$. Уравнение Пикара–Фукса у эллиптической поверхности и изогенной ей совпадают: по формуле проекции, период на накрытии (интеграл обратного образа дифференциальной формы ω по собственному прообразу 1-цикла γ) равен периоду на базе накрытия ($\int_\gamma \omega$) умноженному на степень накрытия.

При замене базы $\pi : C' \to C$ уравнение Пикара–Фукса семейства $\pi^*(E) \to C'$ получается обратным образом уравнения Пикара–Фукса для семейства $E \to C$, а период $\Phi' : c' \to \int_{\gamma \in H_1(\pi^*(E)_{c'}, \mathbb{Z})} \omega_E$ совпадает с $c' \to \frac{\omega_E'}{\pi^* \omega_E} \int_{\gamma \in H_1(E_{\pi(c)}, \mathbb{Z})} \omega_E$.

В следующей теореме описаны слабые модели Ландау–Гинзбурга f для поверхностей дель Пеццо степени $d \geqslant 3$ относительно антиканонического класса (с симплектической формой в некоторых кратностях антиканонического класса) со значением параметра t_0 (параметр t_0 равен 1 для поверхностей, отличных от $\mathbb{F}_1$ и S_7). Для этого мы представляем такую поверхность дель Пеццо S как сглаживание (см. 4.4) торической поверхности S_0 с дювалевскими особенностями (они перечислены в 4.1), и среди всех многочленов Лорана, многоугольник Ньютона которых совпадает с многоугольником поверхности S_0, находим многочлен Лорана f с тремя критическими значениями (они и ∞ будут особыми слоями эллиптической поверхности E_f). Разным вырождениям S соответствуют разные многогранники Ньютона, но эллиптические поверхности E_f оказываются бирационально эквивалентными над $\mathbb{P}^1$ с точностью до изогении. В случае квантово минимальных поверхностей Дель Пеццо, теорема 4.9 является двумерным аналогом *соответствия Голышева* ([20]) между трёхмерными многообразиями Фано основной серии (они автоматически квантово минимальны) и модулярными семействами Куги–Сато поверхностей $K3$.

Теорема 4.9. *1) Пусть поверхность дель Пеццо S степени d является сглаживанием торической поверхности S_0 с дювалевскими особенностями, т.ч. $S_0 \simeq T_{12-d.n}$, где поверхности $T_{12-d.n}$ описаны в предложении 4.1, причем $d \neq 5, 12-d.n \neq 4.2$ [1]. Многочлены Лорана f, перечисленные в следующей таблице, являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга для S относительно кратного антиканонического дивизора $-kK_S$.*

2) Каждая из найденных слабых моделей Ландау–Гинзбурга (кроме случаев $d = 3, k = 1$ и $d = 4, k = 1$) компактифицируется до поверхности изогенной одной из шести эллиптических поверхностей Бовиля, перечисленных в теореме 1.4. В таблице выписаны значения j-инварианта поверхности E_f однозначно определяющие тип такой компактификации.

$12-d$.*номер*	k	*многочлен* f	j-*инвариант*
3.1	1	$x+y+x^{-1}y^{-1}$	j_3
4.1	1	$x+y+x^{-1}+y^{-1}$	j_4
4.3	1	$xy+2x+xy^{-1}+x^{-1}$	j_4
6.1	1	$3+xy+2y+x^{-1}y+3x^{-1}+3x^{-1}y^{-1}+x^{-1}y^{-2}$	j_6
6.2	1	$3+xy+2x+2y+xy^{-1}+yx^{-1}+x^{-1}$	j_6
6.3	1	$3+xy+2y+yx^{-1}+x+x^{-1}+y^{-1}$	j_6
6.4	1	$3+x+y+x^{-1}+y^{-1}+xy+x^{-1}y^{-1}$	j_6
7.1	1	$3+xy+2y+x^{-1}y+3x^{-1}+3x^{-1}y^{-1}+y^{-1}+x^{-1}y^{-2}$	j_7
7.2	1	$3+xy+2x+2y+xy^{-1}+yx^{-1}+x^{-1}+y^{-1}$	j_7
8.1	2	$y(x^{-2}+2+x^2)+y^{-1}$	j_8
8.1b	1	$y(x^{-2}+4x^{-1}+6+4x+x^2)+2(x^{-1}+3+x)+y^{-1}$	j_{8b}
8.2	2	$x^2y^{-1}+3x-2xy^{-1}+3y+y^{-1}+y^2x^{-1}+2yx^{-1}+x^{-1}$	j_8
8.3	2	$(x+x^{-1})(y+y^{-1})$	j_8
8.3b	1	$(x+2+x^{-1})(y+2+y^{-1})$	j_{8b}
9.1	3	$x^2y^{-1}+x^{-1}y^2+x^{-1}y^{-1}$	j_9

[1] То есть, поверхность S — любая поверхность дель Пеццо степени $d \geqslant 3$ отличная от поверхностей $\mathbb{F}_1$ и S_7. В этом случае поверхность S квантово минимальна.

9.1b	1	$6+3(x+y+xy+x^{-1}+y^{-1}+x^{-1}y^{-1})+$ $x^2y^{-1}+x^{-1}y^2+x^{-1}y^{-1}$	j_{9b}

$j_{8b}=\frac{t^2-16t+16)^3}{t(t-16)}$ $j_{9b}=\frac{t(t-24)^3}{t-27}$

Поверхность $E_{8.1b}$ *и поверхность* $E_{8.3b}$ *бирационально эквивалентны* $E_{I_1^*I_4I_1}$, *поверхность* $E_{9.1b}$ *бирационально эквивалентна* $E_{IV^*I_3I_1}$.

3) Пусть поверхность дель Пеццо S *совпадает с* $T_{4.2}\simeq\mathbb{F}_1$ *или с* $T_{5.1}$[2] *В этих случаях торическое вырождение поверхности* S *с дювалевскими особенностями либо тривиально, либо совпадает с* $T_{5.2}$ *(если* $d=5$*). Существует значение параметра* t_0, *относительно которого поверхность* S *квантово минимальна. В следующей таблице выписаны слабые модели Ландау–Гинзбурга для* S *относительно параметра* t_0. *В таблице выписаны значения* j*-инварианта для* f. *Эллиптические поверхности* $E_{f_{5.1}}$ *и* $E_{f_{5.2}}$ *бирациональны над* $\mathbb{P}^1$.

d.номер	k	*многочлен* f	j*-инвариант*
4.2	1	$\frac{1}{2}(4x+4y+3xy-x^{-1}y^{-1})$	$j_{4.2}$
5.1	1	$x+y+3x^{-1}+3y^{-1}+2x^{-1}y^{-1}$	j_5
5.2	1	$\frac{1}{3}(x^{-1}(y^{-1}+2+y)+2y^{-1}+27x)$	j_5

$$j_{4.2}=-\frac{(t^3-3t^2+15t+3)^3(t+3)}{(3t^2-10t+51)}$$

$$j_5=\frac{(t^3-6t^2-12t+24)^3(t+6)}{(2t-15)(2+3t)^3}$$

Поверхность $E_{4.2}$ имеет особые слои $II, I_8I_1I_1$, а $E_{5.1}$ и $E_{5.2}$ — $II, I_7I_2I_1$.

Замечание 4.10. (1) Между эллиптическими поверхностями 3.1 и 9.1 есть 3-изогения $(x',y')=(x^{-1}y^2,x^2y^{-1})$.

(2) Между эллиптическими поверхностями 4.1 и 8.3 есть 2-изогения $(x',y')=(xy,xy^{-1})$.

(3) Между эллиптическими поверхностями 4.3 и 8.1 есть 2-изогения $(x',y')=(x^2,y)$.

Замечание 4.11. (1) Поверхность $E_{9.1}$ получается из поверхности $E_{9.1b}=E_{IV^*I_3I_1}$ кубической заменой базы, вполне разветвлённой над IV^* и I_3.

(2) Поверхность $E_{3.1}$ получается из поверхности $E_{9.1b}=E_{IV^*I_3I_1}$ кубической заменой базы, вполне разветвлённой над IV^* и I_1.

(3) Поверхность $E_{8.3}$ получается из поверхности $E_{8.3b}=E_{I_1^*I_4I_1}$ квадратичной заменой базы, разветвлённой в I_1^* и I_4.

Формальное доказательство теоремы 4.9 заключается в непосредственной проверке утверждений теоремы в каждом из случаев.

Прежде чем приступить к этой несложной проверке, объясним, каким образом был найден ответ — многочлены $f_{k.n}$. Метод их нахождения (и в первом — квантово минимальном случае, и во втором) в сущности тот же, что и метод доказательства Бовиля. Наш случай даже проще общего — заранее известно, что поверхность рациональна и якобиева.

Требование малого количества особых слоев ограничивает возможные значения j-инварианта. Действительно, посмотрим на j-инвариант как на отображение $J: C\simeq\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$. Все слои над точками в прообразе $J^{-1}(\infty)$ — заведомо особые. Предположим сначала, что

[2] То есть, S не квантово минимальная.

многочлены $\Delta = 27B^2 + 4A^3$, $4A^3$ и $27B^2$ взаимно простые (то есть эллиптическая поверхность полустабильна). В этом случае слой $J^{-1}(0)$ состоит не более чем из $\deg A$ точек, а слой $J^{-1}(1)$ состоит не более чем из $\deg B$ точек.

Пусть $\deg A = 2d, \deg B = 3d, \deg J = 6d$. По формуле Гурвица существует не менее $d+2$ различных точек на базе C с J-инвариантом ∞, причём если выполняется равенство, то многочлены A и B не имеют кратных корней, а отображение J неразветвленное над $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Такие отображения (*функции Белого*) находятся во взаимно-однозначном соответствии с транзитивными представлениями фундаментальной группы в группе перестановок $6d$ элементов общего слоя отображения J, т.е. с гомоморфизмами $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathfrak{S}_{6d}$, и тривалентными вложенными графами Γ на сфере $\mathbb{P}^1$ (такой граф получается как прообраз отрезка, соединяющего 0 и 1).

Каждая точка $t \in J^{-1}(\infty)$ лежит в отдельной грани, и валентность n грани совпадает с индексом ветвления $1 + e_J(t) = n$; полустабильный слой над t — это колесо I_n из n прямых. Шесть бовилевских поверхностей соответствуют шести функциям Белого степени 12. Если эллиптическая поверхность задана пучком плоских кубик, степень дискриминанта Δ равна 12 (1.3 показывает, что степень Δ всегда равна $12\chi(E, \mathcal{O}_E)$).

Предположим теперь, что многочлены $\Delta = 27B^2 + 4A^3$, $4A^3$ и $27B^2$ не взаимно простые (не полустабильный случай). Рассмотрим наиболее общий случай $\deg(A, B) = 1$, $A(t) = A_1A_2A_3(t-u)$, $B(l) = B_1B_2B_3B_4B_5(t-u)$. Тогда J-инвариант — это функция степени 10 с индексами ветвления $(3,3,3,1)$ над 0, $(2,2,2,2,2)$ над 1 и (n_1, n_2, n_3) над ∞. В этом случае у эллиптической поверхности четыре особых слоя: три полустабильных слоя $I_{n_1}, I_{n_2}, I_{n_3}$, и один слой типа II над u; у графа Γ три вершины тривалентные (они соответствуют неособым слоям с $J = 1$), а одна вершина одновалентная (над ней и висит неполустабильный слой типа II). Существует всего 4 таких графа; соответствующие наборы индексов ветвления над ∞ такие: $(8,1,1)$ (этот граф соответствует функции $j_{4.2}$), $(7,2,1)$ (а этот набор соответствует функции j_5), $(5,4,1)$ и $(5,3,2)$.

Поскольку j-инвариант поверхности E_f является рациональной функцией от коэффициентов многочлена Лорана f, нам нужно найти такую подстановку коэффициентов в многочлены $f_{d.n}$, чтобы j-инвариант эллиптической поверхности E_f стал бы равен определённой наперёд заданной функции j_i Оказывается, что такая подстановка всегда существует, но никакого объяснения, почему для не квантово минимальных поверхностей она должна существовать, нам не известно.

Предложение 4.12. *Функции j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8, j_9, $j_{4.2}$ являются функциями Белого.*

Доказательство. Легко проверить, что их ветвление над 0, 1728 и ∞ именно такое, как было указано ранее. По формуле Гурвица в других точках отображение j неразветвленное. □

Предложение 4.13. *Для многочленов f из таблиц в теореме 4.9 j-инварианты эллиптических поверхностей E_f совпадают с указанными в таблице.*

Это несложное вычисление — все указанные эллиптические поверхности приводятся к вейерштрассовой нормальной форме.

Пример 4.14. Разберём, например, случай $f = x + y + \frac{1}{xy}$. Кривая задана уравнением $x^2y + y^2x + 1 - txy = 0$. Отображение $(x, y) \to x$ является в общей точке E двулистным отображением на $\mathbb{P}^1$:

$$y^2 + y(x-t) + x^{-1} = 0.$$

Сделаем замену $(x,y)\to(x,y+\frac{(x-t)}{2})$, в новых координатах E задаётся $y^2-\frac{(x-t)^2}{4}+x^{-1}=0$, после замены $(x,y)\to(-x^{-1},yx^{-1})$ получим кривую заданную уравнением $y^2=x^3+\frac{(tx+1)^2}{4}$, после линейной замены $x\to x+\frac{t^2}{12}$ получим вейерштрассову форму $y^2=x^3+Ax+B$, где $A=\frac{t(24-t^3)}{48}$, $B=\frac{t^6-36t^3+216}{864}$. Соответственно, $\Delta=4A^3+27B^2=\frac{27-t^3}{16}$ и $j=1728\frac{4A^3}{\Delta}=\frac{t^3(t^3-24)^3}{t^3-27}$.

Вычислив аналогичным образом вейерштрассовы нормальные формы для всех указанных эллиптических поверхностей, убедимся что верно

Утверждение 4.15. *При фиксированном $d\neq 4$ все эллиптические поверхности $E_{f_{12-d.n}}$ бирационально эквивалентны (как эллиптические поверхности). Поверхности $E_{f_{8.1b}}$,$E_{f_{8.3b}}$ и $E_{I_1^*I_4I_1}$ бирационально эквивалентны. Поверхности $E_{f_{9.1b}}$ и $E_{IV^*I_3I_1}$ бирационально эквивалентны.*

Таким образом, мы доказали утверждение 4.9-2.

Замечание 4.16. Для бовилевских случаев достаточно было выяснить что степень отображения J равна 12. Это эквивалентно тому, что дискриминант Δ взаимно прост с A и взаимно прост с B, то есть поверхность E полустабильна.

Предложение 4.17. *При $d<8$, то $\Phi_{f_{12-d.n}}=\Phi_{f_{12-d.m}}$ для всех n.*

Доказательство. Поскольку вейерштрассовы нормальные формы эллиптических поверхностей $E_{f_{12-d.m}}$ и $E_{f_{12-d.n}}$ совпадают, оба этих ряда являются решением одного и того же уравнения Пикара–Фукса, а уравнение Пикара–Фукса имеет единственное решение в $\mathbb{C}[[t]]$. $\square$

Доказательство теоремы 4.9.

Случай 4.18 (Случай не квантово минимальных поверхностей (4.9-3).)**.** Торические поверхности $S=T_{4.2}$ и $S=T_{5.1}$ неособые. В этом случае можно применить 2.9. Заключаем, что любой многочлен Лорана f с $\Delta(f)=\Delta(S)$ является слабой моделью Ландау–Гинзбурга S относительно некоторого параметра $t_0(f)$.

Теперь рассмотрим поверхность $S=T_{5.2}$. Ряд свободных членов у $f_{5.2}$ совпадает с рядом свободных членов у $f_{5.1}$ (см. 4.17), а следовательно, и с I-рядом гладкой поверхности дель Пеццо степени 7 относительно того же параметра t_0. Поэтому $f_{5.2}$ является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для S_7 с тем же параметром $t_0=t_0(f_{5.1})$, что и $f_{5.1}$.

Осталось проверить что для каждого $d\neq 7$ хотя бы у одного многочлена $f_{12-d.n}$ $(12-d.n\neq 4.2)$ ряд свободных членов $\Phi_{f_{12-d.n}}$ совпадает с $I^{S_d,reg}$.

Случай 4.19 $(12-d=3,4,6)$**.** Если $12-d<7$, то среди поверхностей $T_{12-d.n}$ есть одна гладкая (а именно $T_{3.1}$, $T_{4.1}$, $T_{6.4}$). Для соответствующего ей многочлена Лорана $f_{12-d.n}$ равенство ряда свободных членов I-ряду уже установлено (см. 2.9). Ряды свободных членов для $f_{12-d.n}$, при тех n, когда $T_{12-d.n}$ не является гладкой поверхностью, равны рядам свободных членов для гладкой $T_{12-d.k}$ по 4.17.

Случай 4.20 $(12-d=8,9,k>1)$**.** Если $12-d=8,9$ эллиптические поверхности $E_{9.1}$, $E_{8.3}$ изогенны эллиптическим поверхностям $E_{3.1}$ и $E_{4.1}$. Следовательно (4) у них одинаковые уравнения Пикара–Фукса и их решения (с точностью до изогении $t\mapsto t^r$). Очевидно, что $\Phi_{f_{9.1}}=\Phi_{f_{3.1}}$ и $\Phi_{f_{8.3}}=\Phi_{f_{4.1}}$ (свободный член многочлена Лорана не меняется при мономиальной замене переменных). Для остальных случаев степени 8 воспользуемся тем же соображением 4.17.

Случай 4.21 $(12-d=8,9,k=1)$**.** Многочлены Лорана $f_{9.1b}$, $f_{8.1b}$ и $f_{8.3b}$ (с точностью до замены координат 4.10, 4.11) это степени многочленов Лорана $f_{3.1}$, $f_{4.3}$ и $f_{4.1}$, поэтому

$$\Phi_{f_{9.1b}}(t^3)=\Phi_{f_{3.1}}(t),\Phi_{f_{8.1b}}(t^2)=\Phi_{f_{4.3}}(t),\Phi_{f_{8.3b}}(t^2)=\Phi_{f_{4.1}}(t).$$

Осталось сравнить ряды свободных членов в случаях 7.1, 7.2 и I-ряд для линейного сечения грассманиана $G(2,5)$.

Поскольку ряды свободных членов Φ_{f_1} и Φ_{f_2} удовлетворяют дифференциальным уравнениям Пикара–Фукса L_1 и L_2, степень по D и степень по t у которых ограничены $\deg_D$ и $\deg_t$ [3], то если два ряда свободных членов равны по модулю $(\deg_D+2)(\deg_t+2)$, то совпадают и коэффициенты l^k_{ij} уравнений $L_k=\sum_{i=0}^{\deg t}t^i\sum_{j=0}^{\deg_D}D^j l^k_{ij}$, и начальные условия, а следовательно совпадают и Φ_{f_1} и Φ_{f_2}.

□

4.1. **Модели Хори–Вафы.** В [23] предложен метод построения зеркально симметричных моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в торических многообразиях. Поскольку все поверхности дель Пеццо являются полными пересечениями в торических многообразиях (в случае S_5 — в торическом вырождении многообразия Грассмана $G(2,5)$, см. [3],[4], S_2,S_1 — во взвешенных проективных пространствах), можно сравнить получившийся выше ответ с ответом полученным по рецепту Хори–Вафы.

Напомним, что полному пересечению l гиперповерхностей степеней $d_1,\ldots,d_l$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(a_1\ldots a_n)$ сопоставляется пространство $M=\left\{x_1,\ldots,x_n\in(\mathbb{C}^*)^n:\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}=t_0,\sum_{j=1}^{k_r}x_{i_j^{(r)}}=1\right\}$ (индексы $i_1^{(r)},\ldots,i_{k_r}^{(r)}$ выбраны таким образом, что все они попарно различны, и для всех $r=1,\ldots,l$ выполнено равенство $\sum_{j=1}^{k_r}a_{i_j^{(r)}}=d_r$), и функция $w:M\to\mathbb{C}$ равная $w=\sum_{i=1}^n x_i$.

Пример 4.22. Поверхности дель Пеццо степени 4 сопоставлен тор $\mathbb{T}$ с координатами y,x_1,x_1',x_2,x_2', гиперповерхность $H=(yx_1x_1'x_2x_2'=t_0)$, две гиперповерхности $L_1=(x_1+x_1'=1),L_2=(x_2+x_2'=1)$, и функция $w=y+x_1+x_1'+x_2+x_2'$. Ограничение w на $L_1\cap L_2$ равно $y+2$. Поэтому $t_0(w-2)^{-1}$ ограниченное на $H\cap L_1\cap L_2$ равно $x_1x_1'x_2x_2'=x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)$ (x_1,x_2 являются на $H\cap L_1\cap L_2$ координатами).

Аналогичным образом, поверхностям дель Пеццо степени $d\leqslant 4$ сопоставляются пучки кривых на двумерном торе $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y,x^{-1},y^{-1}]$. Их уравнения перечислены в следующей таблице (с точностью до сдвига).

d	уравнение $(t=\frac{w-const}{t_0})$	особенности
$d=4,S_4=X_{2,2}\subset\mathbb{P}^4$	$1-t\cdot xy(1-x)(1-y)=0$	$I_1^*I_4I_1$
$d=3,S_3=X_3\subset\mathbb{P}^3$	$1-t\cdot xy(1-x-y)=0$	$IV^*I_3I_1$
$d=2,S_2=X_4\subset\mathbb{P}(1112)$	$1-t\cdot xy^2(1-x-y)=0$	$III^*I_2I_1$
$d=1,S_1=X_6\subset\mathbb{P}(1123)$	$1-t\cdot x^2y^3(1-x-y)-t=0$	$II^*I_1I_1$

Все эти кривые эллиптические над $\mathbb{C}(t)$, у них можно явно вычислить вейерштрассову нормальную форму, и следовательно найти типы особых слоёв модели Нерона; они перечислены в последнем столбце предыдущей таблицы.

[3] Степень $\deg_t$ это количество особых слоёв отображения f (то есть количество точек в спектре), а степень $\deg_D$ это ранг неприводимой относительно связности Гаусса–Манина компоненты в подсистеме трансцендентных циклов в локальной системе $R^{n-1}f_!\mathbb{C}$.

Предложение 4.23. *Модели Хори–Вафы для поверхностей дель Пеццо степени $d \leqslant 4$ бирациональны первым четырём поверхностям Миранды–Перссона (1.6). В частности, для случаев $d = 3, 4$ они имеют такое же уравнение Пикара–Фукса, и такую же модель Нерона, как и пучки $f_{8.1}, f_{9.1}$.*

В этом можно убедиться и построив изогению между ними.

Пример 4.24. В обозначениях примера 4.22, сделаем замену $x_i = \frac{z_i}{u_i}, x_i' = \frac{z_i'}{u_i}; u_i = (z_i + z_i')$ (то есть домножим исходный пучок на двумерный тор $T_2 = (\mathbb{C}^*)^2$ с координатами $u_i \neq 0$). Прообраз $\tilde{H}$ задаётся уравнением $yz_1z_1'z_2z_2' = t_0u_1^2u_2^2$. Действие T_2 продолжается до действия на всём $\tilde{H}$: $(y, z_1, z_2, z_1', z_2', u_1, u_2) \to (y, v_1z_1, v_2z_2, v_1z_1', v_2z_2', v_1u_1, v_2u_2)$. Гиперповерхности L_i задаются уравнениями $u_i = 1$, орбиты тора T_2 пересекаются с $L_1 \cap L_2$ по 1 точке. Рассмотрим M_2 — сечение H гиперповерхностями N_i заданными как $z_iz_i' = 1$. Орбиты тора T_2 пересекаются с $N_1 \cap N_2$ по 4 точкам, и M_2 является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-изогенным M. На M_2 функция $w = y + 2$ с точностью до линейной замены равна $\frac{u_1^2u_2^2}{z_1z_1'z_2z_2'} = (z_1 + z_1^{-1})^2(z_2 + z_2^{-1})^2$, а это и есть $f_{4.3}^2$, изогенная $f_{8.1}$.

5. Монодромия

В этом разделе мы проиллюстрируем замечание 1.5, показав что для построенных в предыдущем разделе моделей Ландау–Гинзбурга верна гипотеза об исключительном наборе и исчезающих циклах.

Напомним, что когерентный пучок $\mathcal{E}$ на алгебраическом многообразии X называется *исключительным*, если $Hom(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathbb{C}$ и $Ext^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$ для всех $i > 0$.

Набор исключительных пучков $E_1, \ldots, E_n$ называется *исключительным набором*, если для всех $i < j$ выполнено $Ext^\bullet(E_j, E_i) = 0$.

Исключительный набор называется *полным*, если он порождает всю ограниченную производную категорию $\mathcal{D}^b(X)$ когерентных пучков на X. Аналогичным образом определяются исключительные наборы произвольных элементов категории $\mathcal{D}^b(X)$.

Для пары когерентных пучков $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ на алгебраическом многообразии X, обозначим альтерированную сумму через

$$\chi(E, F) = \sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

Она задаёт билинейную форму на $K_0(X)$ (всюду далее символом $K_0(X)$ обозначается $K_0(X)/tors$).

Набор $e_1, \ldots, e_n$ элементов $K_0(X)$ называется *полуортонормированным* (относительно формы χ) если для всех $i < j$ выполнено $\chi(e_j, e_i) = 0$ и для всех i выполнено $\chi(e_i, e_i) = 1$.

Если $E_1, \ldots, E_n$ — полный исключительный набор в $\mathcal{D}^b(X)$, то его образ $e_1, \ldots, e_n$ в $K_0(X)$ это полуортонормированный базис. Положим $A_{ij} = \chi(e_i, e_j)$.

Обозначим через χ_- кососимметризацию формы χ:

$$\chi_-(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) - \chi(\mathcal{F}, \mathcal{E}).$$

С каждым элементом e_i ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ связано симплектическое отражение $I_i(v) = v - \chi_-(v, e_i)e_i$.

Имеем $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = A^{-1}A^t$. По двойственности Серра $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = (-1)^{\dim X}\chi(\mathcal{F}, \mathcal{E} \otimes K_X)$, поэтому для всех x, y выполнено равенство $x^tAy = y^tA(A^{-1}A^t)x$, следовательно умножение на $K_X[\dim X]$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $K_0(X)$ задаётся матрицей $A^{-1}A^t$, то есть представляется как произведение симплектических отражений $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$.

Если $\mathcal{E}$ — исключительный объект $\mathcal{D}^b(X)$, для всех объектов $\mathcal{F}$ определён канонический морфизм $can : \mathrm{RHom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. Он дополняется до точного треугольника

$$L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}[-1] \to \mathrm{RHom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}.$$

Объект $L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}$ называется *левой перестройкой* $\mathcal{F}$ относительно $\mathcal{E}$. Аналогично определяется правая перестройка. Перестройка $L_{\mathcal{E}}$ переводит правый ортогонал к $\mathcal{E}$ в левый ортогонал к $\mathcal{E}$. Перестройка относительно исключительного набора определяется как последовательная композиция перестроек относительно всех элементов.

Преобразование $x, y \to I_x y, x$ ($x, y \to y, I_y x$) называется левой (правой) *перестройкой* относительно x (y). Перестройке L_E соответствует отражение I_e.

Пусть X — чётномерное многообразие с полным исключительным набором $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Рассмотрим линейное пространство

$$V = K_0(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathrm{Ker}\ \chi_-,$$

с невырожденной кососимметрической формой χ_-. Пусть $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — упорядоченный набор точек на $\mathbb{A}^1$, а $U = \mathbb{A}^1 \backslash x$. Выберем точку $x_0 \in U$, и набор простых не пересекающихся петель $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \pi_1(U, x_0)$ охватывающих точки $x_1, \ldots, x_n$ соответственно (а $\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n$ — петля вокруг бесконечности). Определим представление $\phi_{E,x} : \pi_1(U) \to Sp(V, \chi_-)$ на образующих γ_i:

$$\phi_{E,x}(\gamma_i) = I_i.$$

Обозначим локальную систему, соответствующую представлению ϕ, через $\mathcal{L}_{E,x}$. Пусть (M, w) — модель Ландау–Гинзбурга (гомологически) зеркально симметричная к X. Гипотеза сформулированная Дубровиным (см раздел 5 в [12]) включает в себя следующее

Утверждение 5.1. *Локальная система $\mathcal{L}_{E,x}$ совпадает с $R^{\dim X} w_* \mathbb{Z}$.*

Далее мы проверим, что построенные в предыдущем разделе слабые модели Ландау–Гинзбурга удовлетворяют описанному в гипотезе условию.

Для обратимого пучка $\mathcal{L}$ на поверхности S, обозначим его антиканоническую степень $d(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}) \cdot (-K_S)$ через $d(\mathcal{L})$, а ранг $r(\mathcal{L}) = 1$ через $r(\mathcal{L})$. Продолжим функции r и d по линейности на группу $K_0(S)$.

На поверхности S кососимметрическая форма χ_- зависит только от рангов и степеней и явно выражается как

$$\chi_-(\mathcal{E},\mathcal{F}) = r(\mathcal{E})d(\mathcal{F}) - r(\mathcal{F})d(\mathcal{E}).$$

Исключительный набор $\mathcal{E} = E_1, \ldots, E_n$ называется *блоком*, если $Ext^\bullet(E_i, E_j) = 0$ для всех $i \neq j$. Левый перенос пучка F через блок определяется как $L_{\mathcal{E}}F = L_{E_1} \ldots L_{E_n}F$. Если пара блоков $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ полуортогональна ($Rhom(F_i, E_j) = 0$), то полуортогональна и пара блоков $(L_{\mathcal{E}}\mathcal{F},\mathcal{E})$. Аналогично определяется блочная перестройка набора (возможно, совпадающих) векторов V.

Пусть $E_1, \ldots, E_a, F_1, \ldots, F_b, G_1 \ldots, G_c$ — полный *трёхблочный* исключительный набор на поверхности дель Пеццо степени d (то есть, наборы E_i, F_j и G_k являются блоками). В [25] описаны все такие наборы. Напомним основные свойства.

Предложение 5.2 ([25]). (1) *На поверхности дель Пеццо S, все исключительные объекты в $\mathcal{D}^b(S)$ представляются сдвинутыми локально свободными пучками. Локально свободный исключительный пучок однозначно определяется его образом в $K_0(S)$.*

(2) *Внутри каждого блока, ранги и степени исключительных пучков из набора совпадают* ($r(E_i) = r(E_j), d(E_i) = d(E_j)$)*. Обозначим эти числа через* $x = r(E), y = r(F), z = r(G)$ *и* $d(E), d(F), d(G)$*. Это условие означает, что образы* E_i*,* F_j *и* G_k *совпадают в* $V = K_0(S)/Ker(\chi_-)$*. Обозначим их через* e, f, g*.*
(3) *Значения* $\chi(E_i, F_j)$*,* $\chi(E_i, G_k)$*,* $\chi(F_i, G_k)$ *не зависят от* i, j, k*. Обозначим их* $\chi(E, F)$*,* $\chi(E, F)$ *и* $\chi(F, G)$*.*
(4) *Число* $a + b + c$ *это количество элементов в базисе* $e_1, \dots, g_c$ *в векторном пространстве* $K_0(S) \otimes \mathbb{Q}$*, следовательно* $a + b + c = \operatorname{rk} K_0(S) = 2 + \rho(S)$*. Поэтому, по формуле Нётера:*

$$a + b + c + d = 12. \tag{5.3}$$

(5) *Число* $abcd$ *является полным квадратом. Пусть* $q \in \mathbb{Z}_+$ *— положительный корень*

$$q^2 = abcd \tag{5.4}$$

(6) *Ранги исключительных пучков в блоках и их количества удовлетворяют обобщённому уравнению Маркова:*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = qxyz \tag{5.5}$$

(7) *Матрица* A_{ij} *явно выражается через* a, b, c, x, y, z*:*

$$\chi(E, F) = \chi_-(e, f) = \frac{zdc}{q} \tag{5.6}$$

$$\chi(F, G) = \chi_-(f, g) = \frac{xda}{q} \tag{5.7}$$

$$\chi(E, G) = \chi_-(e, g) =$$

$$= xz\left(\frac{\chi_-(E, F)}{xy} + \frac{\chi_-(F, G)}{yz}\right) =$$

$$= dxz - \frac{ydb}{q}$$

(8) *Для каждого решения уравнения 5.5 в натуральных числах* x, y, z *существует трёхблочный исключительный набор с соответствующими рангами.*
(9) *Любой полный трёхблочный набор получается блочными перестройками из минимального (набора с минимальным возможным значением* $x + y + z$*).*
(10) *На поверхности* $\mathbb{F}_1$ *(и на поверхности* S_7*) трёхблочных полных исключительных наборов нет. А на всех остальных поверхностях дель Пеццо — есть.*

Таким образом, если зафиксированы ранги x, y, z и степень одного из блоков (например, $d(E)$), то степени $d(F)$ и $d(G)$ однозначно определяются из 5.6 и 5.7. Если одновременно умножить все элементы трёхблочного исключительного набора на обратимый пучок степени d', то получим эквивалентный трёхблочный исключительный набор с инвариантами $(x, d(E)+d'x), (y, d(F)+d'y), (z, d(G)+d'z))$ отличающимися на симплектоморфизм $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d' & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому будем считать, что $d(e) = 0$ (мы выберем упорядочения так, чтобы E_i были линейными расслоениями).

Кроме того, заметим что произведение последовательных симплектических отражений относительно всех элементов полного исключительного набора соответствует операции умножения на канонический класс $\otimes K_S$. В базисе r, deg эта операция равна $I_{[0,1]}^{-d}$; обозначим $h = [0,1] \in V$. Среди всех решений уравнения 5.5 есть одно с минимальным значением $x+y+z$. В следующей таблице перечислены минимальные решения (в случаях $5,5,1$ и $5,1,1$ минимальных решений два, но мы ограничимся одним), и соответствующие им тройки векторов $e = [x, d(E)]$, $f = [y, d(F)]$, $g = [z, d(G)]$.

d	$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 = q \cdot x \cdot y \cdot z$	e, f, g
9	$1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,3], [1,6]$
8	$2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,2], [1,6]$
6	$3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,1], [1,4]$
5	$5 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$	$[1,0], [1,2], [2,9]$
4	$4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,1], [1,3]$
3	$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,1], [1,2]$
3	$6 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$	$[1,0], [1,1], [2,5]$
2	$8 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2$	$[1,0], [2,1], [2,3]$
2	$6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3$	$[1,0], [1,1], [3,5]$
2	$4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$	$[1,0], [1,1], [2,3]$
1	$9 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^2 = 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$	$[1,0], [3,1], [3,2]$
1	$8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 4^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$	$[1,0], [2,1], [4,3]$
1	$6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$	$[1,0], [2,1], [3,2]$
1	$5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 1 \cdot 5^2 = 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5$	$[1,0], [2,1], [5,3]$

Все симплектические отражения I_{e_i} сопряжены в группе $GL(2,\mathbb{Z})$. Между векторами e, f, g, h выполнено соотношение

$$(I_e^a) \cdot (I_f^b) \cdot (I_g^c) \cdot (I_h^d) = 1 \tag{5.8}$$

В статьях [14] и [15] объясняется, что соотношения подобные 5.8, с точностью до отношения эквивалентности заданного одновременными сопряжениями в $GL(2,\mathbb{Z})$ (выбором базиса) и блочными перестройками, взаимно-однозначно соответствуют выбору порядка особых слоёв на некоторой (топологической) эллиптической поверхности, причём элементы I_e^a, I_f^b,... равны (глобальным) монодромиям вокруг особых слоёв типов I_a, I_b,....

Кроме того, деформации особых слоёв в наборы более простых, соответствуют распадениям элементов типа I_e^a в произведения меньших групп. В частности, особый слой типа I_a с монодромией I_e^a (все a исчезающих циклов лежат в одном гомологическом классе e) деформируется в a особых слоёв типа I_1 с монодромией I_e.

Таким образом, для деформаций построенных в разделе 4 слабых моделей Ландау–Гинзбурга соответствующих бовилевским поверхностям выполнено утверждение 5.1.

Стоит отметить, что этот подход можно бы было использовать и для определения моделей Ландау–Гинзбурга. Если на поверхности дель Пеццо S степени d есть трёхблочный полный исключительный набор (а такой набор есть на всех поверхностях дель Пеццо кроме $\mathbb{F}_1$ и S_7), то по нему можно построить 4 примитивных вектора e, f, g, h в двумерной решётке $\Lambda = K_0(S)/\chi_-$, где векторы e, f, g — это классы элементов блоков в Λ, а примитивный вектор h определяется тем условием, что умножение на антиканоническое линейное расслоение является d-ой степенью отражения относительно вектора h. Отражения относительно векторов e, f, g, h удовлетворяют соотношению $I_e^a I_f^b I_g^c I_h^d = 1$.

Этому соотношению однозначно соответствует топологическая эллиптическая поверхность с 4 особыми слоями типов I_a, I_b, I_c, I_d. А по теореме Бовиля такая алгебраическая поверхность единственная.

Список литературы

[1] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves*, Inv. Math. 166, No. 3 (2006), 537–582 arXiv:math.AG/0506166.

[2] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, *Two Proofs of a Conjecture of Hori and Vafa*, Duke Math. J. 126, No. 1 (2005), 101–136, arXiv:math.AG/0304403.

[3] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for calabi-yau complete intersections in grassmannians*, arXiv:alg-geom/9710022.

[4] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, Acta Math. 184, No. 1 (2000), 1–39, arXiv:math.AG/9803108.

[5] A. Beauville, *Le nombre minimum de fibres singulieres d'une courbe stable sur* $\mathbb{P}^1$, Asterisque 86, 97-108 (1981), http://math.unice.fr/∼beauvill/pubs/fibsing.pdf

[6] A. Beauville, *Les familles stables de courbes elliptiques sur* $\mathbb{P}^1$ *admettant* 4 *fibres singulieres*, C. R. Acad. Sc. Paris 294, 657-660 (1982), http://math.unice.fr/∼beauvill/pubs/ellss.pdf

[7] B. Crauder, R. Miranda, *Quantum Cohomology of Rational Surfaces*, arXiv:alg-geom/9410028.

[8] В. И. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, Успехи матем. наук, т. 33, вып. 2 (200) (1978), 85–134, http://mi.mathnet.ru/umn/33/2/85

[9] В. И. Данилов, А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа–Делиня*, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 50, No. 5 (1986), 925–945, http://mi.mathnet.ru/izv/50/5/925

[10] M. Demazure, *Surfaces de del Pezzo*, Lect. Notes Math, 777, 23-69.

[11] I.Dolgachev,V.Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, arXiv:math/0610595.

[12] B. Dubrovin, *Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds*, Proc. ICM Berlin 1998, arXiv:math/9807034.

[13] P. Du Val, *On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction, I, II and III*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 30 (1934), 453–459, 460–465, 483–491

[14] M. Fukae, Y. Yamada, S.-K. Yang, *Mordell–Weil Lattice via String Junctions*, Nucl.Phys. B572 (2000) 71–94, arXiv:hep-th/9909122v1.

[15] M. Fukae, *Monodromies of rational elliptic surfaces and extremal elliptic $K3$ surfaces*, arXiv:math/0205062.

[16] S.Galkin, *Two instances of fake minimal Fano threefolds.* (in preparation), http://www.mi.ras.ru/∼galkin/work/fakefano.pdf

[17] A. Gathmann, *Absolute and relative Gromov-Witten invariants of very ample hypersurfaces*, Duke Math. J. 115, No. 2 (2002), 171–203, arXiv:math.AG/0009190.

[18] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser, Boston (1994).

[19] A. B. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Kashiwara, Masaki (ed.) et al., Topological field theory, primitive forms and related topics. Proceedings of the 38th Taniguchi symposium, Kyoto, Japan, December 9–13, 1996 Boston, MA: Birkhauser. Prog. Math. 160, 141–175, arXiv:alg-geom/9701016.

[20] V. V. Golyshev, *Classification problems and mirror duality*, LMS Lecture Note, ed. N. Young, 338 (2007), arXiv:math.AG/0510287.

[21] V. V. Golyshev, *Spectra and strains*, arXiv:0801.0432.

[22] L. Gottsche, R. Pandharipande, *The quantum cohomology of blow-ups of* $\mathbb{P}^2$ *and enumerative geometry*, arXiv:alg-geom/9611012.

[23] H. Hori, C. Vafa, *Mirror symmetry*, arXiv:hep-th/0002222.

[24] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov, *Fano Varieties*, volume 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.* Springer-Verlag, Berlin.

[25] Б. В. Карпов, Д. Ю. Ногин, *Трехблочные исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо*, Изв. РАН. Сер. матем. 62:3 (1998), 3–38, arXiv:alg-geom/9703027.

[26] K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces II*, Ann. Math. 77, 563–626 (1963).

[27] M. L. Kontsevich, Yu. I. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. 164 (1994) 525–562, arXiv:hep-th/9402147.

[28] R. Miranda, U. Persson, *On Extremal Rational Elliptic Surfaces*, Math. Z., 193, 537–558 (1986).
[29] A. Neron, *Modeles minimaux des varieties abeliennes sur les corps locaux et globaux*, Publ. I.H.E.S., 21 (1964).
[30] В. В. Пржиялковский, *On Landau–Ginzburg models for Fano varieties*, Comm. Num. Th. Phys., в печати, arXiv:0707.3758.
[31] В. В. Пржиялковский, *Минимальное кольцо Громова–Виттена*, Известия РАН, Сер. Мат., в печати (Деп. в ВИНИТИ 16.10.07, 961-В 2007), arXiv:0710.4084.
[32] V. Przyjalkowski, *Quantum cohomology of smooth complete intersections in weighted projective spaces and singular toric varieties*, arXiv:math/0507232v3.
[33] T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan, 24 (1972), 20–59.
[34] J. Stienstra, F. Beukers, *On the Picard–Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic $K3$-surfaces*, Mathematische Annalen 271 (1985) p.269–304.
[35] J. Tate, *On the conjecture of Birch and Swinnerton–Dyer*, Sem. Bourbaki Exp. 306, 1–26 (1966).
[36] K. Ueda, *Homological mirror symmetry for toric Del Pezzo surfaces*, arXiv:math.AG/0411654.