Математический институт им. В. А. Стеклова
Российская Академия Наук

На правах рукописи
УДК 512.76

Галкин Сергей Сергеевич

Торические вырождения многообразий Фано.

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена в отделе теории чисел Математического института имени В. А. Стеклова РАН

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Василий Алексеевич Исковских;

Официальные оппоненты:
д. ф.-м. н. Николай Андреевич Тюрин
к. ф.-м. н. Александр Геннадьевич Кузнецов

Ведущая организация:
Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

Защита диссертации состоится 3 апреля 2008 года в 14.00 на заседании диссертационного совета Д.002.022.03 в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, 8 (9 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан 3 марта 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.002.022.03 в МИ РАН
д. ф.-м. н. Н. П. Долбилин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В диссертации даётся ответ на ряд вопросов, постановка которых мотивирована подходом к изучению многообразий Фано (и возможности их классификации) с помощью методов торических вырождений и зеркальной симметрии.

Классификация кривых была получена ещё в 19 веке - у каждой кривой над алгебраически замкнутым полем есть единственная бирациональная ей полная неособая модель, а единственный численный инвариант кривой - это её род g, который может принимать любое целое неотрицательное значение. Более разнообразен случай поверхностей: по любой неособой поверхности S_0 можно построить её минимальную модель S, последовательно стягивая (-1)-кривые. Минимальная поверхность S - неособая поверхность бирациональная S_0, и существуют три взаимно исключающие возможности: либо канонический класс K_S численно эффективен (то есть его индекс пересечения с классом любой эффективной кривой неотрицателен), либо S это проективная плоскость $\mathbb{P}^2$, либо S обладает структурой расслоения над некоторой базовой кривой B, а слои C этого расслоения имеют индекс пересечения с каноническим классом $K_SC = -2$. Поверхность S рациональна если рациональна базовая кривая B, и все такие минимальные поверхности S — это рациональные линейчатые поверхности (поверхности Хирцебруха) $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$.

Современная точка зрения обобщает двумерный результат на большие размерности: согласно программе минимальных моделей, всякое гладкое алгебраическое многообразие гипотетически (доказано в размерности ≤ 4) бирационально изоморфно либо минимальной модели [1], либо расслоению Мори, слоем которого является *многообразие Фано*, то есть многообразие X с обильным антиканоническим дивизором $-K_X$. Проективная плоскость и поверхности

[1]Определения минимальной модели и изложение программы Мори см., например, в *K. Matsuki* Introduction to the Mori program — Springer, 2002 — 478 pp.

$\mathbb{F}_n$ являются расслоениями Мори на двумерное и одномерные многообразия Фано, соответственно. В размерностях больше двух минимальная модель уже не обязательно гладкая, но в общем случае имеет *терминальные особенности.*

В связи с развитием упомянутой выше программы минимальных моделей, а также в виду интереса со стороны теоретической физики и других дисциплин, в последнее время особую роль в бирациональной геометрии стало играть изучение многообразий Фано. Мы работаем над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Единственное одномерное многообразие Фано это проективная прямая $\mathbb{P}^1$.

Двумерные неособые многообразия Фано X называются также поверхностями дель Пеццо. Два основных инварианта поверхности дель Пеццо это её антиканонические индекс и степень. *Индексом* многообразия Фано X называется наибольшее целое число i, такое что антиканонический класс представим как i-кратное некоторого дивизора Картье H, то есть $-K_X = iH$. Степень это квадрат канонического класса $d := (-K_X)^2$. Единственная поверхность дель Пеццо индекса 3 — проективная плоскость $\mathbb{P}^2$, и её антиканоническая степень равна 9. Поверхность дель Пеццо индекса 2 — это квадрика в $\mathbb{P}^3$, её антиканоническая степень равна 8. Поверхность дель Пеццо индекса 1 может иметь любую целую степень d в пределах $1 \leq d \leq 8$, и уже не минимальна, но является раздутием проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в $9 - d$ точках общего положения (никакие три точки не лежат на одной прямой, никакие шесть точек не лежат на конике, никакие восемь точек не лежат на нодальной кубике с нодом в одной из этих восьми точек).

Г. Фано изучал трехмерные гладкие многообразия, линейные сечения которых являются каноническими кривыми (в частности, антиканонический дивизор на таких многообразиях обилен). В. А. Исковских классифицировал гладкие трехмерные многообразия Фано основной серии, окончательная классификация гладких трехмерных многообразий Фано была получена Мори и Мукаем [2]. Основные численные инварианты трёхмерных многообразий Фано это их индекс, степень, ранг группы Пикара и третье число Бетти.

Позже Мукай [3] заново описал трёхмерные многообразия Фано основной серии, рассматривая векторные расслоения на поверхностях $K3$ получающихся антиканоническим сечением трёхмерного многообразия. Этим же методом была получена классификация 4-мерных многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ имеющих индекс больше 1. Задача классификации четырехмерных многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ и индексом 1 в настоящее время открыта.

В диссертации иллюстрируется подход к нахождению гипотетических многообразий Фано и описанию их классических численных инвариантов вместе с некоторыми „квантовыми", происходящими из инвариантов Громова–Виттена.

Исторически, зеркальная симметрия была сформулирована как соответствие (зеркальная симметрия) между ромбами Ходжа разных семейств трёхмерных многообразий X с тривиальным каноническим классом (многообразий *Калаби–Яу*). Для пары *численно зеркально симметричных* многообразий Калаби–Яу A и B, $h^{1,2}(A) = h^{1,1}(B)$ и $h^{1,1}(A) = h^{1,2}(B)$. Это размерности пространств параметров комплексных и кэлеровых структур, и таким образом появилась *гипотеза зеркальной симметрии* постулирующая что между комплексной геометрией A и симплектической геометрией B есть эквивалентность, и наоборот. У этого утверждения есть разные формулировки, например *гомологическая зеркальная симметрия* утверждает что ограниченная производная категория $\mathcal{D}^b(X)$ когерентных пучков на X совпадает с категорией Фукаи Y [4]

[2] См. [Is88] В. А. Исковских, *Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано*, -М.: Московский университет (1988).

[3] S. Mukai, *Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex* 3, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 86 (1989), 3000–3002

[4] Категория Фукаи это зависящая от симплектическй структуры A_∞-категория, объекты в которой представлены лагранжевыми циклами, морфизмы — их пересечениями, а произведения — заклеиваниями псевдоголоморфными дисками.
См.: [M. L. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proc. International Congress of

Вернёмся к невырожденному случаю многообразий (почти) Фано, и сформулируем интересующую нас версию зеркальной симметрии для них.

Используя 3-точечные инварианты Громова–Виттена можно построить *кольцо малых квантовых когомологий* $QH^\bullet(X,\Lambda)$ [5] многообразия Фано X. Это свободный Λ-модуль $H^\bullet(X,\Lambda)$, со структурой кольца заданной посредством $\star$-умножения:

$$\gamma_1 \star \gamma_2 = \sum_{\gamma_3,\beta} q^\beta I_\beta(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\gamma_3^\vee,$$

где $\gamma_3^\vee$ — класс когомологий Пуанкаре–двойственный к γ_3, γ_3 в суммировании пробегает базис когомологий $H^\bullet(X,\mathbb{Q})$, β в суммировании пробегает всю группу гомологий $H_2(X,\mathbb{Z})$; а символом $I_\beta(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ обозначен соответствующий 3-точечный инвариант Громова–Виттена. Наивный смысл этого инварианта — число рациональных кривых на X имеющих гомологический класс β и пересекающих представителей 3 гомологических классов Пуанкаре–двойственных к γ_1, γ_2 и γ_3 (достаточно общим образом выбранных), если таких кривых конечное число, и 0 иначе. $\star$ -умножение суперкоммутативно (и уважает естественную $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировку, далее мы ограничимся чётными элементами) и является деформацией обычного умножения в когомологиях X, а его ассоциативность — глубокий и плодотворный результат теории. Переформулированная на языке классической исчислительной геометрии, ассоциативность квантового умножения становится бесконечным набором неочевидных соотношений между числами кривых различных степеней; эти соотношения очень интересны уже в случае проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, и кроме этого позволяют вычислить инварианты на раздутии поверхности через инварианты на минимальной модели.

По кольцу малых квантовых когомологий можно построить *дифференциальное уравнение зеркальной симметрии* (или квантовый

Mathematicians (Zürich 1994), Birkhäuzer, Basel, 1995, pp. 120–139, arXiv:alg-geom/9411018.]

[5]Обозначим символом $\Lambda = \mathbb{Q}[H_2(X,\mathbb{Z})]$ кольцо Новикова функций $q^\beta_{\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})}$ на торе двойственном к решётке характеров группы Пикара многообразия Фано X.

$\mathcal{D}$-модуль) следующим образом: рассмотрим тривиальное расслоение со слоем $H^\bullet(X, \mathbb{C})$ над тором $\operatorname{Spec}\Lambda$; зададим на этом расслоении связность так, что дифференцирование горизонтального сечения с помощью этой связности вдоль инвариантного векторного поля равно квантовому умножению сечения на класс соответствующего дивизора.

Пусть M — некомпактное многообразие, и $w : M \to \mathbb{A}^1$ — такая функция на нём, что общий слой w бирационален многообразию с тривиальным каноническим классом. Пара (M, w) называется (слабой) *моделью Ландау–Гинзбурга зеркально двойственной к многообразию Фано* X, если связность Гаусса–Манина семейства M_w совпадает с определенной выше связностью построенной с помощью квантового умножения на X (то есть, периоды M_w являются решениями дифференциального уравнения зеркальной симметрии).

Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа. Существует соответствие между многообразиями Фано X и зеркально двойственными им моделями Ландау–Гинзбурга (M, w). Другими словами, для произвольного многообразия Фано X, построенное с помощью данных исчислительной геометрии на многообразии X дифференциальное уравнение имеет геометрическое происхождение (является уравнением Пикара–Фукса некоторого семейства).

Гипотезу гомологической зеркальной симметрии можно сформулировать и в случае многообразий Фано: категория $\mathcal{D}^b(X)$ эквивалентна категории исчезающих лагранжевых циклов (это относительный вариант категории Фукаи), „и наоборот".

В дальнейшем под гипотезой зеркальной симметрии мы будем иметь в виду утверждение про вариации структур Ходжа.

Известны кандидаты на (гомологически) двойственные модели Ландау–Гинзбурга для поверхностей дель Пеццо [6] , для полных

[6] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves*, Invent. Math. 166, No. 3 (2006), 537–582

пересечений в грассманианах [7] и пространствах флагов [8].

Торические многообразия — класс рациональных многообразий несравнимо легче поддающийся классификации чем абстрактные многообразия Фано. Зеркальная симметрия для торических многообразий (и полных пересечений в них) была установлена в работах Гивенталя, Батырева и Борисова. Используя *малые торические вырождения* многообразий Грассмана и многообразий частичных флагов, в работах [BFKS1],[BFKS2] были получены зеркальные партнеры к этим однородным многообразиям.

Вскоре, Батыревым было введено понятие малого торического вырождения [9] произвольного многообразия Фано, обобщающее примеры с многообразиями флагов, и предложен подход к нахождению инвариантов Громова–Виттена и построения зеркально симметричных моделей Ландау–Гинзбурга с помощью малых вырождений гладких многообразий Фано в торические многообразия Фано с особенностями. Именно этот подход и используется в данной работе.

Как показано далее в диссертации, к сожалению, не все трехмерные многообразия имеют малые торические вырождения, однако, некоторые интересные многообразия всё-таки имеют, и в этих случаях сам факт существования вырождения позволяет решить иногда нетривиальные задачи исчислительной геометрии (например, найти инварианты Громова–Виттена многообразия V_{22} или V_5), и метод торических вырождений может быть использован для описания неторических многообразий Фано в больших размерностях.

---

[7][BFKS1] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for calabi-yau complete intersections in grassmannians*, 1997, arXiv:math.alg-geom/9710022

[8][BFKS2] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, Acta Math. 184, No. 1 (2000), 1–39 (preprint (1998), arXiv:math.AG/9803108).

[9]V. V. Batyrev, *Toric Degenerations of Fano Varieties and Constructing Mirror Manifolds*, Collino, Alberto (ed.) et al., The Fano conference. Papers of the conference, Torino, Italy, September 29–October 5, 2002. Torino: Universita di Torino, Dipartimento di Matematica. 109–122 (2004) (preprint (1997), arXiv:alg-geom/9712034).

Цель работы

Цель работы — исследование гипотез и конструкций зеркальной симметрии, в особенности торических вырождений, для многообразий Фано малой размерности, нахождение максимально вырожденных моделей Ландау–Гинзбурга и малых торических вырождений многообразий Фано.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 121 странице и состоит из введения и трех глав. Библиография включает 72 наименования.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Для квантово минимальных поверхностей дель Пеццо S степени $d \geq 3$ существует слабая модель Ландау–Гинзбурга являющаяся компактификацией многочлена Лорана f на двумерном торе, причём у функции f только три критических значения. Показано, что не квантово минимальные поверхности дель Пеццо S являются квантово минимальными с параметром(и существует аналогичная функция f' с 3 критическими значениями, являющаяся слабой зеркально симметричной моделью Ландау–Гинзбурга для (X, ω)).

2. Найдены все трёхмерные гладкие многообразия Фано имеющие малые торические вырождения, и описано к каким торическим многообразиям они вырождаются.

3. Дана явная формула для спектра оператора квантового умножения на класс Шуберта в кольце квантовых когомологий грассманиана.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы торической геометрии, теории эллиптических поверхностей, теории деформаций, и теоремы о квантовых когомологиях однородных пространств (теорема Зиберта–Тиана, квантовая формула Шевалле) и торических многообразий. Кроме того, для прозрачности изложения, в третьей главе используется классификация трехмерных многообразий Фано[10] (результаты главы позволяют не используя эту классификацию восстановить её в том объёме, в котором она используется).

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Доказанные в диссертации теоремы представляют интерес для теории многообразий Фано, теории инвариантов Громова–Виттена и зеркальной симметрии.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Семинар “Геометрия алгебраических многообразий” под руководством В.А.Исковских и Ю.Г.Прохорова в МГУ (2006 и 2007),

2. Семинар “Характеристические классы и теория пересечений” под руководством М. Э. Казаряна и С. К. Ландо в НМУ (2006),

3. Семинар по алгебраической геометрии под руководством А.Н.Паршина в МИАН (2007).

Публикации автора по теме диссертации

Основное содержание диссертации опубликовано в работах, список которых приведен в конце автореферата.

[10]См. [IP] *V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov* Fano varieties, Springer-Verlag, New York 1999.

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения и трёх глав.

В главе 1 приведены необходимые определения и вспомогательные утверждения. Утверждения главы 1 как правило не доказываются, но снабжаются ссылками на источники. Завершается глава 1 иллюстрацией общих идей на необходимых далее примерах — грассманианах и торических многообразиях; в последнем разделе доказаны формулы определяющие спектр квантовых когомологий грассманиана.

В главе 2 подробно изучается двумерный случай. Как отмечалось ранее, двумерные гладкие многообразия Фано (поверхности дель Пеццо) были исследованы ещё в 19 веке.

Поверхности дель Пеццо степени 6 и больше — торические, а поверхности дель Пеццо степени 5 и меньше малых торических вырождений не имеют — всякая поверхность с терминальными особенностями сама гладкая. Поэтому, в этой главе мы рассматриваем более общее вырождение — вырождение гладкой поверхности к торической поверхности с каноническими (дювалевскими) особенностями. Мы опишем все поверхности такого типа (всего их 16, их степень не меньше 3), они являются вырождениями гладких поверхностей дель Пеццо. Далее, по каждой найденной торической поверхности мы построим пучок эллиптических кривых с 4 особыми слоями, заданный определённым многочленом Лорана, многоугольник Ньютона которого — это многоугольник соответствующий торической поверхности. По поверхностям дель Пеццо сглаживание которых квантово минимально [11] получаются эллиптические пучки со всюду стабильной редукцией, а по поверхности $\mathbb{F}_1$ и поверхности дель Пеццо степени 7 — эллиптические пучки с чуть более сложными особенностями в одном слое.

Наконец, мы покажем что с точностью до перенормировки (аф-

[11] Гладкое многообразие Фано называется квантово минимальным, если подкольцо в $H(X,\Lambda)$ порождённое каноническим классом K_X совпадает с аналогичным подкольцом в $QH(X)$.

финного преобразования образа) найденный пучок будет слабой моделью Ландау–Гинзбурга (с параметром t) к исходной поверхности дель Пеццо; в квантово минимальном случае параметр равен 1, а в остальных двух случаях — единственным образом определённый, и относительно него поверхность уже квантово минимальна. В отличие от работы Ору–Казаркова–Орлова, где для достаточно общего выбора симплектической формы строятся гомологически зеркально симметричные партнёры, все конечные слои которых простые, построенные нами модели максимально вырождены.

В главе 3 изучается трёхмерный случай, а именно малые торические вырождения трёхмерных многообразий Фано. Мы ответим на вопрос Батырева, какие из 87 семейств неторических гладких трёхмерных многообразий Фано имеют малые торические вырождения. Оказывается, что только 44 из них имеют такие вырождения, причём некоторые семейства могут иметь вырождения к нескольким различным торическим многообразиям. Мы опишем их все. Приложением существования найденных вырождений является вычисление инвариантов Громова–Виттена вырождающихся 44 многообразий (самый неочевидный пример это, видимо, V_{22}). В конце главы мы обсуждаем препятствия обобщения этого подхода на худшие особенности, в большие размерности, коразмерности, и на другие типы многообразий.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям В. А. Исковских за постоянное внимание к его работе и В. В. Голышеву за постановку задач и многочисленные полезные обсуждения, К. А. Шрамову за многочисленные советы на всех этапах подготовки диссертации, а также Н. Ф. Заку, В. В. Пржиялковскому, Ю. Г. Прохорову и D. van Straten за полезные обсуждения.

Публикации по теме диссертации

(1) *Галкин С. С.; Голышев В. В.* Квантовые когомологии грассманианов и круговые поля // УМН — 2006 — т.61, No. 1(367) — 175–176.

(2) *Галкин С. С.* Торические поверхности и экстремальные эллиптические пучки // Деп. в ВИНИТИ 27.02.08, 168-В 2008.

(3) *Галкин С. С.* Малые торические вырождения трёхмерных многообразий Фано // Деп. в ВИНИТИ 27.02.08, 167-В 2008.