МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
ОТДЕЛ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

На правах рукописи

ГАЛКИН СЕРГЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

УДК 512.76

ТОРИЧЕСКИЕ ВЫРОЖДЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФАНО

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук В. А. Исковских

Москва — 2008

Оглавление

Введение

История вопроса

В диссертации даётся ответ на ряд вопросов, постановка которых мотивирована подходом к изучению многообразий Фано (и возможности их классификации) с помощью методов торических вырождений и зеркальной симметрии.

Классификация кривых была получена ещё в 19 веке — у каждой кривой над алгебраически замкнутым полем есть единственная бирационально эквивалентная ей полная неособая модель, а единственный численный инвариант кривой — это её род g, который может принимать любое целое неотрицательное значение. Более разнообразен случай поверхностей: по любой неособой поверхности S_0 можно построить её минимальную модель S, последовательно стягивая (-1)-кривые. Минимальная поверхность S — неособая поверхность, бирационально эквивалентная S_0, и существуют три взаимно исключающие возможности: либо канонический класс K_S численно эффективен (то есть его индекс пересечения с классом любой эффективной кривой неотрицателен), либо S — это проективная плоскость $\mathbb{P}^2$, либо поверхность S обладает структурой $\mathbb{P}^1$-расслоения над некоторой базовой кривой B.Поверхность S рациональна, если рациональна базовая кривая B, и все такие минимальные поверхности S — это рациональные линейчатые поверхности (поверхности Хирцебруха) $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$.

Современная точка зрения обобщает двумерный результат на большие размерности. Согласно программе минимальных моделей, гипотетически всякое гладкое алгебраическое многообразие бирационально эквивалентно либо минимальной модели (определения минимальной модели и изложение программы Мори см., например, в [64]), либо расслоению Мори, слоями которого являются *многообразия Фано* (то есть многообразия с обильным антиканоническим дивизором) с числом Пикара 1. Это доказано в размерности $\leqslant 4$.

Проективная плоскость и поверхности $\mathbb{F}_n$ являются расслоениями Мори на двумерное и одномерные многообразия Фано, соответственно. В размерностях больше двух минимальная модель уже не обязательно гладкая, но в общем случае имеет *терминальные особенности* (опр. см. в 1.2.11).

В связи с развитием упомянутой выше программы минимальных моделей, а также в виду интереса со стороны теоретической физики и других дисциплин, в последнее время особую роль в бирациональной геометрии стало играть изучение многообразий Фано. Мы работаем над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Единственное одномерное многообразие Фано — это проективная прямая $\mathbb{P}^1$.

Двумерные неособые многообразия Фано X называются также поверхностями дель Пеццо. Два основных инварианта поверхности дель Пеццо — это её антиканонические индекс и степень. *Индексом* многообразия Фано X называется наибольшее целое число i, такое что антиканонический класс представим как i-кратное некоторого дивизора Картье H, т.е. $-K_X = iH$. Степень — это квадрат антиканонического класса $d = (-K_X)^2$. Единственная поверхность дель Пеццо индекса 3 — это проективная плоскость $\mathbb{P}^2$, и её антиканоническая степень равна 9. Поверхность дель Пеццо индекса 2 — это квадрика в $\mathbb{P}^3$, её антиканоническая степень равна 8. Поверхность дель Пеццо индекса 1 может иметь любую целую степень d в пределах $1 \leqslant d \leqslant 8$, и уже не минимальна, но является раздутием проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в $9 - d$ точках общего положения (см. 1.6.1).

В работах [24], [25], [26], [27] Г. Фано изучал трехмерные гладкие многообразия, линейные сечения которых являются каноническими кривыми (в частности, антиканонический дивизор на таких многообразиях обилен).

В. А. Исковских в работах [45], [46] классифицировал гладкие трехмерные многообразия Фано X основной серии (с $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$), окончательная классификация гладких трехмерных многообразий Фано была получена Мори и Мукаем в работах [67], [66], [68] (обзор полной классификации см. в [47] и [48]). Основные численные инварианты трёхмерных многообразий Фано — это их индекс, степень, ранг группы Пикара и третье число Бетти.

Позже Мукай ([69],[70]) заново описал трёхмерные многообразия Фано основной серии, рассматривая векторные расслоения на поверхностях $K3$, получающихся антиканоническим сечением трёхмерного многообразия. Этим же методом была получена классификация 4-мерных многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$, имеющих индекс больше 1. Задача классификации четырехмерных многообразий Фано с группой Пикара $\mathbb{Z}$ и индексом 1 в настоящее время открыта.

В диссертации иллюстрируется подход к нахождению многообразий Фано и описанию их классических численных инвариантов вместе с некоторыми „квантовыми”, происходящими из инвариантов Громова–Виттена.

Исторически зеркальная симметрия была сформулирована как соответствие (зеркальная симметрия) между ромбами Ходжа разных семейств трёхмерных многообразий X с тривиальным каноническим классом (многообразий *Калаби–Яу*). Для пары *численно зеркально симметричных* многообразий Калаби–Яу A и B выполнено $h^{1,2}(A) = h^{1,1}(B)$ и $h^{1,1}(A) = h^{1,2}(B)$. Это размерности пространств параметров комплексных и кэлеровых структур, и таким образом появилась *гипотеза зеркальной симметрии*, утверждающая эквивалентность между комплексной геометрией A и симплектической геометрией B, и наоборот. У этого утверждения есть разные формулировки, например, *гомологическая зеркальная симметрия* утверждает, что ограниченная производная категория $\mathcal{D}^b(X)$ когерентных пучков на X совпадает с производной категорией категории Фукаи Y [1].

Вернёмся к случаю многообразий Фано, и сформулируем интересующую нас версию зеркальной симметрии для них.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — некоторые классы когомологий $H^\bullet(X, \mathbb{Z})$, а $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ — гомологический класс комплексной кривой. Обозначим символом $I_\beta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ соответствующий 3-точечный инвариант Громова–Виттена (см. 1.7.1, [63]). Наивный смысл этого инварианта — число рациональных кривых на X, имеющих гомологический класс β и пересекающих представителей гомологических классов двойственных по Пуанкаре к γ_1, γ_2 и γ_3 (достаточно общим образом выбранных), если таких кривых

[1] Категория Фукаи это зависящая от симплектической структуры A_∞-категория, объекты в которой представлены лагранжевыми циклами, морфизмы — их пересечениями, а произведения — заклеиваниями псевдоголоморфными дисками (см. [57])

конечное число, и 0 иначе.

Обозначим символом $\Lambda = \mathbb{Q}[H_2(X,\mathbb{Z})]$ кольцо Новикова функций $q^{\beta}_{\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})}$ на торе двойственном к решётке характеров группы Пикара многообразия Фано X [2].

Используя 3-точечные инварианты Громова–Виттена, можно построить *кольцо малых квантовых когомологий* $QH(X)$ многообразия Фано X. По определению, кольцо малых квантовых когомологий (с коэффициентами в Λ) $QH(X,\Lambda)$ это свободный Λ-модуль $H^{\cdot}(X,\Lambda)$ со структурой кольца, заданной посредством $\star$-умножения:

$$\int_{[X]}(\gamma_1\star\gamma_2)\cup\gamma_3=\sum_{\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})}q^{\beta}I_{\beta}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$$

Умножение $\star$ является деформацией обычного $\cup$-умножения в когомологиях X, суперкоммутативно (и согласовано с естественной $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировкой; далее мы ограничимся чётными элементами, ограничение квантовых когомологий на них — коммутативное кольцо), а его ассоциативность — глубокий результат теории ([58],[63]). Переформулированная на языке классической исчислительной геометрии, ассоциативность квантового умножения становится бесконечным набором неочевидных соотношений между числами кривых различных степеней; эти соотношения очень интересны уже в случае проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, и кроме этого позволяют вычислить инварианты Громова–Виттена на раздутии поверхности через инварианты на минимальной модели.

По кольцу малых квантовых когомологий можно построить *дифференциальное уравнение зеркальной симметрии* (или квантовый $\mathcal{D}$-модуль)

[2] Иногда оказывается удобнее работать с с коэффициентами в кольце $A=\mathbb{Q}[\overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}]$ — это подкольцо в Λ порождённое мономами соответствующими только эффективным 1-циклам.

следующим образом ([35]): рассмотрим тривиальное расслоение со слоем $H^\bullet(X, \mathbb{C})$ над тором Spec Λ [3]; зададим на этом расслоении связность так, что дифференцирование горизонтального сечения $\gamma \in H^\bullet(X, \mathbb{C})$ с помощью этой связности вдоль инвариантного векторного поля равно квантовому умножению сечения на класс соответствующего векторному полю дивизора.

Голоморфное решение этого уравнения выписывается как производящий ряд 1-точечных инвариантов Громова–Виттена с потомками (I-ряд).

Пусть M — некомпактное многообразие, и $w : M \to \mathbb{A}^1$ — такая функция на нём, что общий слой отображения w бирационален многообразию с тривиальным каноническим классом. Пара (M, w) называется (слабой) *моделью Ландау–Гинзбурга зеркально двойственной к многообразию Фано* X, если связность Гаусса–Манина семейства M_w совпадает с определенной выше связностью, построенной с помощью квантового умножения на X (то есть периоды M_w являются решениями дифференциального уравнения зеркальной симметрии).

Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа. Существует соответствие между многообразиями Фано X и зеркально двойственными им моделями Ландау–Гинзбурга (M, w). Неформально говоря, для произвольного многообразия Фано X, построенное с помощью данных исчислительной геометрии на многообразии X дифференциальное уравнение имеет геометрическое происхождение (является уравнением Пикара–Фукса некоторого семейства).

[3]Естественной базой для этого $\mathcal{D}$-модуля является Spec A, но обычно достаточно либо тора Spec Λ, либо одномерного аффинного пространства — замыкания в Spec A какого-то (например, антиканонического) одномерного подтора в Λ.

Гипотезу гомологической зеркальной симметрии также можно сформулировать в случае многообразий Фано: категория $\mathcal{D}^b(X)$ эквивалентна категории исчезающих лагранжевых циклов на (M, w) (это относительный вариант категории Фукаи).

В дальнейшем под гипотезой зеркальной симметрии мы будем иметь в виду утверждение про вариации структур Ходжа.

Известны кандидаты на роль (гомологически) зеркально симметричных партнёров (слабые модели Ландау–Гинзбурга) для поверхностей дель Пеццо ([1]), для полных пересечений в грассманианах и пространствах флагов ([43],[8],[9]).

Торические многообразия — класс рациональных многообразий, гораздо легче поддающийся классификации, чем абстрактные многообразия Фано. В работе [2] вычислено кольцо квантовых когомологий торического многообразия. В [35] вычислен I-ряд полного пересечения Y в торическом многообразии X, если антиканонический класс $-K_Y$ численно эффективен. Зеркальная симметрия для гладких торических многообразий (и полных пересечений в них) была построена в [3], [10] и [35]. Используя *малые торические вырождения* (допускающие горенштейновы терминальные особенности) многообразий Грассмана (построенные в [83, 84]) и многообразий частичных флагов (построенные в [39, 40, 62]), в работах [8, 9] были получены кандидаты в слабые модели Ландау–Гинзбурга зеркально симметричные к этим однородным многообразиям.

В работе [4] было введено понятие *малого торического вырождения* произвольного многообразия Фано, обобщающее примеры с многообразиями флагов. Тогда же и был предложен подход к нахождению инвариантов Громова–Виттена и построения зеркально–симметричных моделей Ландау–Гинзбурга с помощью малых вырождений гладких многообразий Фано в торические многообразия Фано с особенностями.

Именно этот подход и используется в данной работе как основной метод изучения многообразий Фано в размерности 2 и 3.

Как показано далее в диссертации, к сожалению, не все трехмерные многообразия Фано имеют малые торические вырождения, однако некоторые интересные многообразия всё-таки имеют, и в этих случаях сам факт существования вырождения позволяет решить иногда нетривиальные задачи исчислительной геометрии (например, найти некоторые инварианты Громова–Виттена многообразия V_{22} или V_5 не прибегая к геометрии объемлющего пространства), и метод торических вырождений может быть использован для описания неторических многообразий Фано в больших размерностях.

Основные результаты диссертации

Диссертация состоит из введения (главы) и трёх глав (1, 2 и 3).

В главе 1 приведены необходимые определения и известные вспомогательные утверждения.

Утверждения главы 1 как правило не доказываются, но снабжаются ссылками на источники. Завершается глава 1 иллюстрацией общих идей на необходимых далее примерах — грассманианах и торических многообразиях; в последнем разделе доказаны формулы, определяющие спектр квантовых когомологий грассманиана [4].

[4]Полученные автором совместно с В. В. Голышевым.

В главе 2 подробно изучается двумерный случай. Как отмечалось ранее, двумерные гладкие многообразия Фано (поверхности дель Пеццо) исследовались ещё в 19 веке. Поверхности дель Пеццо степени 6 и больше торические, а поверхности дель Пеццо степени 5 и меньше малых торических вырождений не имеют — всякая поверхность с терминальными особенностями сама гладкая. Поэтому в этой главе мы рассматриваем более общее вырождение — вырождение гладкой поверхности к торической поверхности с каноническими (дювалевскими) особенностями. Мы опишем все поверхности такого типа (всего их 16, их степень не меньше 3), они являются вырождениями гладких поверхностей дель Пеццо. Далее, по каждой найденной торической поверхности мы построим пучок эллиптических кривых с 4 особыми слоями, заданный определённым многочленом Лорана, многоугольник Ньютона которого — это многоугольник соответствующий торической поверхности. По поверхностям дель Пеццо, сглаживание которых квантово минимально, [5] получаются эллиптические пучки со всюду стабильной редукцией, а по поверхности $\mathbb{F}_1$ и поверхности дель Пеццо степени 7 — эллиптические пучки с чуть более сложными особенностями в одном слое (2.2.4).

Наконец, мы покажем, что с точностью до перенормировки (аффинного преобразования образа $\mathbb{A}^1$) в случае квантово минимальных поверхностей найденный пучок будет слабой моделью Ландау–Гинзбурга, к исходной поверхности дель Пеццо (2.2.4). В не квантово минимальных случаях верен аналогичный результат — единственным образом определённый многочлен Лорана f с тремя критическими значениями определяет некоторый пара-

[5]Гладкое многообразие Фано называется квантово минимальным, если подкольцо в $H(X, \Lambda)$, порождённое каноническим классом K_X, совпадает с аналогичным подкольцом в $QH(X, \Lambda)$.

метр t_0. Относительно этого параметра t_0 многочлен f является слабой моделью Ландау–Гинзбурга (определение см. в 1.7.13), а исходная поверхность относительно параметра t_0 квантово минимальна (определение см. в 1.7.8).

В отличие от работы [1], где гомологически зеркально симметричные партнёры строятся для достаточно общего выбора симплектической формы, и за исключением слоя над ∞ все остальные их особые слои простые (типа I_1), построенные нами модели максимально вырождены, и соответствуют простым комбинаторным объектам (плоским почти тривалентным графам).

В главе 3 изучается трехмерный случай, а именно малые торические вырождения трёхмерных многообразий Фано. В диссертации получен ответ на вопрос В. В. Батырева о том, какие из 87 семейств неторических гладких трёхмерных многообразий Фано имеют малые торические вырождения. Оказывается (3.2.1), что только 44 из них имеют такие вырождения, причём некоторые семейства могут иметь вырождения к нескольким различным торическим многообразиям. Мы опишем их все.

Теорема (см. 3.2.1)**.** *Следующие трёхмерные неторические гладкие многообразия Фано, и только они, имеют малые торические вырождения (обозначения см. в 1.1.3):*

1) 4 *семейства многообразий с группой Пикара* $\mathbb{Z}$*, а именно* Q*,* V_4*,* V_5*,*V_{22}*;*

2) 16 *семейств многообразий с группой Пикара* $\mathbb{Z}^2$*, а именно* $V_{2.n}$*, где* $n = 12, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32$*;*

3) 16 *семейств многообразий с группой Пикара* $\mathbb{Z}^3$*, а именно* $V_{3.n}$*, где* $n = 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$*;*

4) 8 семейств многообразий с группой Пикара $\mathbb{Z}^4$*, а именно* $V_{4.n}$*, где* $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Все такие вырождения перечислены в разделе 3.4.

Приложением существования найденных вырождений является вычисление инвариантов Громова–Виттена таких многообразий как V_5. В конце главы мы обсуждаем возможность обобщения этого подхода, и использования его в размерности 4.

Результаты главы 2 содержатся в работе (A2) (см. приложение A), результаты главы 3 — в работе (A3), результаты раздела 1.8 в работе (A1).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В. А. Исковских за постоянное внимание к его работе, В. В. Голышеву за постановку задач и многочисленные полезные обсуждения, К. А. Шрамову за многочисленные советы на всех этапах подготовки диссертации, а также Н. Ф. Заку, В. В. Пржиялковскому , Ю. Г. Прохорову и Дуко ван Стратену за полезные обсуждения.

Глава 1

Основные понятия

1.1 Обозначения

Все алгебраические многообразия считаются проективными и определёнными над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, если явно не указано обратное.

Определение 1.1.1. Если H — абелева группа, символом $H/tors$ будем обозначать фактор группы H по подгруппе кручения. Символом $\cup$ мы обозначаем $\cup$-произведение в когомологиях, символом $\cap$ — пересечение в гомологиях; спаривание между классом когомологий α и классом гомологий β будем обозначать $\int_\beta \alpha$ или $\langle \alpha, \beta \rangle$. Если $Y \subset X$ — подмногообразие или цикл в гладком многообразии X, то символом $[Y]$ обозначим представленный Y класс гомологий в $H_{2 \dim Y}(X, \mathbb{Z})/tors$, а классом когомологий Y в $H^{2 \operatorname{codim} Y}(X, \mathbb{Z})/tors$ будем называть двойственный по Пуанкаре класс когомологий $\alpha \in H^{2 \operatorname{codim} Y}(X, \mathbb{Z})/tors$, который однозначно определяется из равенства

$$\langle \alpha, \beta \rangle = [Y] \cap \beta, \text{ для всех } \beta \in H_{2 \operatorname{codim} Y}(X, \mathbb{Z})/tors$$

Определение 1.1.2. Символ $\operatorname{Pic}(X)$, как всегда, обозначает группу Пикара многообразия X, $NS(X)$ — группу Нерона–Севери, $N^1(X)$ — группу классов дивизоров Картье по модулю численной эквивалентности, $N_1(X)$ — группу классов 1-циклов по модулю численной эквивалентности. Если R — абелева группа (например $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$), обозначим $N_1(X)_R = N_1(X, R) = N_1(X) \otimes R$; аналогично определим $N^1(X)_R$, $\mathrm{Pic}(X)_R$. Символом $\rho(X) = \mathrm{rk}\, NS(X)$ обозначается число Пикара. Множество особых точек многообразия X обозначается $\mathrm{Sing}\, X$. Касательное расслоение к гладкому многообразию X мы обозначаем T_X, а $\omega_X = \det(T_X^*)$ — расслоение внешних форм старшей степени. Если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на алгебраическом многообразии X, через $h^i(X, \mathcal{F})$ будем обозначать размерности пространств когомологий $H^i(X, \mathcal{F})$, а $\chi(\mathcal{F}) = \sum(-1)^i h^i(X, \mathcal{F})$ — эйлерову характеристику.

Определение 1.1.3. Мы используем следующие обозначения (семейств) специальных гладких многообразий:

- $\mathbb{P}^n$ — n-мерное проективное пространство;
- Q^n — n-мерная гладкая квадрика в $\mathbb{P}^{n+1}$;
- $G(l, N)$ — грассманиан l–мерных подпространств в N–мерном векторном пространстве.
- $\mathbb{F}_n, n \geqslant 0$ — рациональная линейчатая поверхность (поверхность Хирцебруха) $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n))$; в частности $\mathbb{F}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{F}_1$ — раздутие $\mathbb{P}^2$ в точке.
- $S_d, d = 1 \ldots 8$ — поверхности дель Пеццо степени d индекса 1, $S_8 = \mathbb{F}_1$.

- Q — трёхмерная квадрика в $\mathbb{P}^4$;
- V_4 — пересечения двух квадрик в $\mathbb{P}^5$;
- V_5 — сечение грассманиана $G(2,5)$ подпространством коразмерности 3;
- V_{22} — трёхмерные многообразия Фано рода 12 с числом Пикара 1;
- W — дивизор бистепени $(1,1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ (оно же $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(T_{\mathbb{P}^2})$);
- V_7 — раздутие $\mathbb{P}^3$ в точке (оно же $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1))$);
- $V_{\rho.N}$ ($\rho = 2, 3, 4$, используется в третьей главе) — семейства трёхмерных многообразий Фано с числом Пикара ρ и номером N в таблицах [66, Table 2, Table 3, Table 4].

1.2 Особенности

Доказательства всех утверждений этого раздела можно найти, например, в [48], [56], [64] или [79].

Определение 1.2.1. Пусть $O \in X$ — точка на n-мерном многообразии X. Мы будем говорить, что X *имеет коническую особенность* в O, если окрестность точки O аналитически изоморфна окрестности вершины конуса над некоторым гладким проективным многообразием Z размерности $n-1$. Если Z — гладкая квадрика, то говорят, что X *имеет обыкновенную двойную особенность* (или *нод*) в O. Многообразие, имеющее лишь обыкновенные двойные особенности, также называется *нодальным.*

Замечание 1.2.2. Если $X \subset \mathbb{A}^N$ — гиперповерхность, заданная уравнением $F = 0$, $O \in X$ — особая точка, то X имеет обыкновенную двойную особенность в O тогда и только тогда, когда гессиан $H(F)$ невырожден в точке O.

Раздутие BZ вершины O конуса $CZ \subset \mathbb{A}^{n+1}$ над гладким многообразием $Z \subset \mathbb{P}^n$ является разрешением особенности конуса CZ. Оно является тотальным пространством линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)|_Z$, а слой над точкой O (*исключительное множество*) отождествляется с нулевым сечением. Следовательно, проколотая окрестность конуса над многообразием Z изоморфна тотальному пространству нормального линейного расслоения $N_{Z/BZ}$ без нулевого сечения. Аналогично, если $W \to CZ$ — некоторое разрешение особенностей CZ с неособым исключительным множеством E, проколотая окрестность O в CZ изоморфна тотальному пространству нормального расслоения $N_{E/W}$ без нулевого сечения.

Пример 1.2.3 (Трёхмерная обыкновенная двойная особенность)**.** Пусть Z — двумерная квадрика в $\mathbb{P}^3$, CZ — трёхмерный квадратичный конус. Тогда окрестность трёхмерной обыкновенной двойной особенности представляется как:

1. Расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1,-1)$ над $Z = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ без нулевого сечения получится, если раздуть точку O на конусе $CZ \subset \mathbb{A}^4$ над $Z \subset \mathbb{P}^3$.

2. Расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ над $\mathbb{P}^1$ без нулевого сечения. У трёхмерного квадратичного конуса есть два малых разрешения со слоем $\mathbb{P}^1$ (см. 1.4.42).

3. Касательное расслоение к вещественной трёхмерной сфере TS^3 без

нулевого сечения. Аналогичное утверждение верно для квадратичных конусов любой размерности. Явным образом, если $\sum_{i=1}^n z_i^2 = 0, z = x + yi$, то x и y — пара ненулевых ортогональных (относительно стандартной евклидовой метрики) векторов в $\mathbb{R}^n$ одинаковой длины r. Вектор $\frac{x}{r}$ это точка на $(n-1)$-мерной сфере радиуса 1, а y — касательный вектор в этой точке . Напомним, что касательное расслоение к трёхмерной сфере тривиализуется.

Пусть X — нормальное многообразие.

Определение 1.2.4. $\mathbb{Q}$-*дивизором* на X называется (формальная) $\mathbb{Q}$-линейная комбинация неприводимых подмногообразий коразмерности 1. Аналогичным образом определим дивизоры с коэффициентами в других группах (например, $\mathbb{C}$-дивизоры и $\mathbb{C}^*$-дивизоры). Если D — $\mathbb{Q}$-дивизор, то говорят, что D является дивизором $\mathbb{Q}$-*Картье*, если некоторая его кратность является дивизором Картье. Многообразие X называется *факториальным*, если любой дивизор Вейля на X является дивизором Картье, и $\mathbb{Q}$-*факториальным*, если любой дивизор Вейля является дивизором $\mathbb{Q}$-Картье.

Замечание 1.2.5. На $\mathbb{Q}$-Картье дивизоры по линейности можно продолжить теорию пересечений. Пусть D — дивизор $\mathbb{Q}$-Картье на многообразии X, $\pi : \tilde{X} \to X$ — разрешение особенностей, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(nD)$ — обратимый пучок, C — неприводимая кривая в X, а $\phi : \tilde{C} \to C$ её нормализация. Заметим, что так как дивизор D — $\mathbb{Q}$-Картье, то для любого морфизма $f : S \mapsto X$ корректно определён класс $\mathbb{Q}$-дивизора $f^*(D)$ на S $(\mathcal{O}_S(nf^*(D)) = f^*\mathcal{L})$.

Положим $(D \cdot C) = \frac{1}{n} \deg \phi^*(\mathcal{L}|_C)$, $D^{\dim X} = \frac{1}{n^{\dim X}} \int_{[X]} c_1(\mathcal{L})^{\dim X} := \frac{1}{n^{\dim X}} \int_{[\tilde{X}]} \pi^* c_1(\mathcal{L})^{\dim X}$.

Определение 1.2.6. Пусть ω — рациональная дифференциальная форма степени $\dim X$ на X. Поскольку коразмерность $\operatorname{Sing} X$ на нормальном многообразии не меньше 2, на открытом подмножестве $U = X \setminus \operatorname{Sing} X$ корректно определён дивизор Картье нулей формы $(\omega)_U$. Дивизор Вейля, получающийся замыканием $(\omega)_U$ в X называется *каноническим*, и его класс обозначается K_X.

Определение 1.2.7. Многообразие X называется *горенштейновым*, если X Коэн–Маколеево и дуализирующий пучок обратим; *квазигоренштейновым*, если канонический класс K_X является дивизором Картье; $\mathbb{Q}$-*горенштейновым*, если K_X является дивизором $\mathbb{Q}$-Картье.

Замечание 1.2.8. Любое неособое многообразие факториально. Любое факториальное многообразие автоматически является $\mathbb{Q}$-факториальным и горенштейновым. Любое $\mathbb{Q}$-факториальное многообразие автоматически $\mathbb{Q}$-горенштейново.

Пример 1.2.9. Пусть $S \subset \mathbb{P}^3$ — двумерный квадратичный конус, $l \subset S$ — образующая конуса. Тогда l не является дивизором Картье, а $2l$ — является. Следовательно, нодальная поверхность S не факториальна, но $\mathbb{Q}$-факториальна.

Пример 1.2.10. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^4$ — конус над гладкой двумерной квадрикой Q, l — прямая на квадрике Q, $L \subset Y$ — конус над l. Тогда никакая кратность L не является дивизором Картье. Следовательно, нодальное многообразие Y не является $\mathbb{Q}$-факториальным. Несмотря на это Y горенштейново.

Определение 1.2.11 (см., например, [56] или [64])**.** Рассмотрим пару (X, D), где X — нормальное многообразие, D — $\mathbb{Q}$-дивизор Вейля на X, такой что дивизор $K_X + D$ является $\mathbb{Q}$-Картье дивизором. Пусть $f : \tilde{X} \to X$ — некоторое лог-разрешение, то есть f — бирациональный морфизм неособого многообразия $\tilde{X}$, такой что исключительное множество морфизма f является дивизором с нормальными пересечениями $\cup E_i$ (E_i - неприводимые исключительные дивизоры), и объединение исключительного множества с собственным прообразом $f^{-1}D$ дивизора D является дивизором с нормальными пересечениями. Обозначим символом f^* — полный прообраз дивизора $\mathbb{Q}$-Картье (определённый в 1.2.5). Пусть

$$K_{\tilde{X}} + f^{-1}D = f^*(K_X + D) + \sum a_i E_i.$$

Числа a_i называются *дискрепантностями* исключительных дивизоров E_i. Разрешение называется *крепантным*, если все эти числа равны 0. Говорят, что пара (X, D) имеет *терминальные* (соотв., *канонические*) особенности, если для любого выбора f для всех исключительных дивизоров дискрепантности $a_i > 0$ (соотв., $a_i \geqslant 0$). Говорят, что многообразие X имеет терминальные (соотв., канонические) особенности, если таковы особенности пары $(X, 0)$. Если $\mathcal{D}$ — (непустая) линейная система на X, то говорят, что пара $(X, \mathcal{D})$ имеет терминальные (соотв., канонические) особенности, если таковы особенности пары (X, D) для общего дивизора $D \in \mathcal{D}$. Говорят, что многообразие X имеет *рациональные* особенности, если для любого выбора f выполнено $R^{\bullet} f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_X$.

Замечание 1.2.12. Все перечисленные условия верны для всех лог-разрешений, если они верны для какого-то одного из них.

Замечание 1.2.13. Многие из упоминающихся далее теорем верны в большей общности, но мы ограничимся случаем канонических особенностей.

Пример 1.2.14 (например, см. [79])**.** Поверхности с терминальными особенностями — это в точности неособые поверхности. Двумерные канонические особенности — то же, что дювалевские особенности. В частности, нодальные поверхности имеют канонические, но не терминальные особенности. Особенности нодального трёхмерного многообразия, напротив, терминальны.

Важность многообразий с терминальными особенностями обусловлена тем, что это наименьший класс многообразий, замкнутый относительно применения программы минимальных моделей и содержащий все гладкие многообразия; в частности, неособое многообразие после нескольких шагов ПММ может стать многообразием с терминальными особенностями (см., например, [64]). С другой стороны, терминальные особенности относительно хорошо изучены (по крайней мере, в размерности 3) и обладают рядом замечательных свойств. Например, они сосредоточены в коразмерности 3 (в частности, в двумерном случае все многообразия с терминальными особенностями на самом деле неособы).

Предложение 1.2.15 ([79])**.** *Терминальные горенштейновы особенности в размерности* 3 *— изолированные гиперповерхностные.*

1.3 Многообразия

Определение 1.3.1. Мы будем называть горенштейново многообразие X *многообразием Калаби–Яу*, если $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ и для всех $0 < i < \dim X$ выполнено $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$. В смысле этого определения, многообразия Калаби–Яу размерности 1 это эллиптические кривые, а многообразия Калаби–Яу размерности 2 это $K3$-поверхности.

Определение 1.3.2. Неособое многообразие X называется *многообразием Фано*, если антиканонический класс $-K_X$ обилен. Нормальное многообразие X называется особым многообразием Фано, если некоторая кратность антиканонического класса $-nK_X$ является обильным дивизором Картье (в частности, само многообразие X является $\mathbb{Q}$-горенштейновым). Аналогично, (возможно, особое) многообразие X называется *многообразием почти Фано*, если некоторая кратность его антиканонического дивизора является численно эффективным дивизором Картье и его самопересечение положительно, т.е. $(-nK_X)^{\dim X} > 0$.

Замечание 1.3.3. Одномерное многообразие Фано только одно — проективная прямая $\mathbb{P}^1$. Двумерные многообразия Фано принято называть *поверхностями дель Пеццо.*

Определение 1.3.4. Многообразие Фано X называется *выпуклым*, если для всякого отображения $f : \mathbb{P}^1 \to X$ выполнено

$$H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X) = 0,$$

то есть нет препятствий к деформации f.

Пример 1.3.5. Однородные многообразия G/P, где G — алгебраическая группа, а $P \subset G$ — некоторая максимальная параболическая подгруппа, являются выпуклыми многообразиями Фано. В частности, выпуклыми являются проективное пространство $\mathbb{P}^d$ и многообразия Грассмана $G(r, N)$, параметризующие r-мерные подпространства в N-мерном векторном пространстве. Выпуклость следует из глобальной порождённости касательного расслоения $T_{G/P}$.

С помощью теоремы Каваматы–Фивега, экспоненциальной последовательности и спектральной последовательности Лере легко получаются следующие свойства многообразий Фано.

Предложение 1.3.6 (См., например, [64], [56], [48])**.** *Пусть X — многообразие почти Фано с каноническими особенностями. Тогда*

1. $H^i(X, \mathcal{O}) = 0$ *для всех* $i > 0$,
2. $\mathrm{Pic}(X) = H^2(X, \mathbb{Z})$,
3. $\mathrm{Pic}(X)$ — *конечно-порождённый свободный* $\mathbb{Z}$*-модуль,*

Если $\pi : Y \to X$ — разрешение особенностей, все перечисленные утверждения верны и для Y, и кроме того $R^{\bullet}\pi_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ (канонические особенности рациональны).

Определение 1.3.7. *Индексом* (особого) многообразия Фано X называется наибольшее (рациональное) число $r > 0$, для которого антиканонический дивизор $-K_X$ является r-кратным некоторого целого дивизора (Картье) H:

$$-K_X = rH.$$

Определение 1.3.8 (см. также 1.4.3, 1.4.4). *Конусом Мори* $\overline{NE}(X)$ многообразия X называется замкнутый выпуклый конус в $N_1(X)_{\mathbb{R}}$, порождённый классами всех эффективных 1-циклов. Двойственный конус $\mathrm{Nef}(X)$ численно эффективных дивизоров (в $N^1(X)_{\mathbb{R}}$) называется *конусом Кэлера*. Символом $\overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}$ будем обозначать множество целых эффективных 1-циклов.

Естественно, все обильные дивизоры численно эффективны. Верно и обращение:

Теорема 1.3.9 (Критерий обильности Клеймана ([54])). *Дивизор Картье D обилен $\iff$ его пересечение со всеми 1-циклами $C \in \overline{NE}(X)\backslash 0$ положительно.*

Теорема 1.3.10 (Теорема о конусе. (см. например [53] или [64])). *Для $H \in N^1(X)$ положим $\overline{NE}_H(X) = \overline{NE}(X) \cap \{C : H \cdot C > 0\}$. Если у многообразия X канонические особенности, конус Мори устроен так:*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}_{K_X}(X) + \sum \mathbb{R}_+ R_i,$$

где $\{R_i\}$ — дискретный (возможно счётный) набор элементов в $N_1(X)$ (так называемых экстремальных лучей) не имеющий точек накопления в $\overline{NE}_{-K_X}(X)$.

Следствие 1.3.11. *Конусы Мори и Кэлера многообразия Фано — рациональные полиэдральные конусы (см. также 1.4.5).*

Определение 1.3.12. Пусть $H \in \mathrm{Pic}(X)$ — дивизор Картье на n-мерном многообразии X, $D_1, \ldots, D_l$ — базис $H^{2k}(X, \mathbb{Z})/tors$. Рассмотрим матрицу

$M_{ij}^{(k)} = (H^{n-4k} \cup D_i \cup D_j), i, j = 1, \ldots, l$. Определим $d^k(X, H)$ как определитель матрицы $M^{(k)}$ (он не зависит от выбора целочисленного базиса). Для трёхмерного многообразия Фано X положим $d(X) = d^1(X, -K_X)$.

Если X — гладкое многообразие, а H — обильный дивизор, то число $d^k(X, H)$ отлично от нуля (это переформулировка сильной теоремы Лефшеца).

Определение 1.3.13. Тройку (Λ, λ, Φ), где Λ — свободная абелева группа конечного ранга, $\lambda \in \Lambda$, а $\Phi : \Lambda \to \mathbb{Z}$ — однородная форма, будем называть *оснащённой решёткой*.

Определение 1.3.14. Если X — d-мерное горенштейново многообразие, *оснащённой решёткой Пикара* $\mathrm{Pic}_E(X)$ многообразия X мы будем называть оснащённые решётки вида $(\mathrm{Pic}(X), -K_X, int)$, где $int : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ — форма пересечения.

Замечание 1.3.15. Если многообразие X — неособое, то оснащённая решётка Пикара $\mathrm{Pic}_E(X)$ позволяет восстановить форму $\chi : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ с точностью до второго порядка. Действительно, по теореме Римана–Роха имеем

$$\chi(X, mD) = m^d\left(\frac{D^d}{d!} - m^{-1}K_X \cdot \frac{D^{d-1}}{2(d-1)!} + O(m^{-2})\right) \tag{1.3.16}$$

1.4 Торические многообразия и многочлены Лорана

Этот раздел содержит сведения о торических многообразиях, необходимые в главах 2, 3. Подробное введение в торическую геометрию см. в [18] или в [31].

Определение 1.4.1. *Торическим многообразием* называется неприводимое многообразие X, содержащее d-мерный тор $\mathbb{T}$ в качестве открытого по Зарискому множества, такое что действие этого тора на себе умножением продолжается до действия на всем X.

Пусть торическое многообразие X — нормальное.

Торические многообразия описываются простыми объектами комбинаторно-линейной геометрии: проективные (вложенные) торические многообразия соответствуют выпуклым *многогранникам* (1.4.18), аффинные — *конусам* (над выпуклыми многогранниками) (1.4.7), а абстрактные — *веерам* (1.4.14, веер это класс эквивалентности (не обязательно выпуклых) многогранников).

Определение 1.4.2. Пусть N и $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ — пара взаимно двойственных решеток ранга d, $\langle .,. \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ — каноническое спаривание, $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ и $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\mathbb{T} = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}^*) = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[M]$ — d-мерный тор, $x^m \in \mathbb{C}[M]$ — характер $\mathbb{T}$ (моном) соответствующий элементу $m \in M$.

Будем называть точки $M_{\mathbb{R}}$ и $N_{\mathbb{R}}$ целыми, если они лежат в M и N, соответственно.

Определение 1.4.3. Пусть A — некоторое множество векторов из $N_{\mathbb{R}}$. *Двойственный конус* $A^{\vee}$ определяется как множество векторов

$$A^{\vee} = \{m \in M_{\mathbb{R}} | \, \langle m, n \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } n \in A\}.$$

Аналогично определяется двойственный конус $B^{\vee} \subset N_{\mathbb{R}}$ для $B \subset M_{\mathbb{R}}$. *Замкнутым выпуклым конусом, порождённым множеством* A, называется дважды двойственный конус $A^{\vee\vee}$. Множество A называется замкнутым выпуклым *конусом*, если оно совпадает с порождённым им замкнутым выпуклым конусом.

$$A^{\vee\vee} = A$$

Размерностью конуса будем называть размерность его линейной оболочки.

Пример 1.4.4. Пусть Z — проективное многообразие. Положим $N = N_1(X)$, и $A \subset N_1(X)$ — множество классов неприводимых кривых по модулю численной эквивалентности. Тогда двойственный конус к множеству A это конус Кэлера, а конус Мори $\overline{NE}(X)$ — замкнутый выпуклый конус, порождённый A.

Замечание 1.4.5. В явном виде, если $A = \{e_1, \dots, e_k\}$ — некоторый конечный набор примитивных (неделимых в N) векторов из N, то конус, порождённый этими векторами, это подмножество

$$< A >_{\geqslant} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle_{\geqslant} = \{l_1 e_1 + \dots + l_k e_k, l_i \in \mathbb{R}, l_i \geqslant 0\}.$$

Такие множества называются *рациональными полиэдральными* выпуклыми конусами. Векторы $\{e_i\}$ называются *образующими* конуса, если ни один из них не содержится в конусе, порождённом остальными.

Пример 1.4.6. Пусть Z — многообразие Фано. По теореме о конусе (1.3.10) конус Мори $\overline{NE}(Z)$ и конус Кэлера — рациональные выпуклые полиэдральные конусы.

Далее в этом разделе рациональные полиэдральные выпуклые замкнутые конусы мы будем называть просто конусами и обозначать символом σ.

Определение 1.4.7. *Аффинным торическим многообразием* X_σ, соответствующим конусу $\sigma \subset N_\mathbb{R}$, называется пространство Spec $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$, снабженное действием группы $\mathbb{T}$, соответствующим естественной M-градуировке кольца $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$.

Пример 1.4.8. Конусу из единственной точки 0 соответствует тор $\mathbb{T}$, положительному октанту — аффинное пространство $\mathbb{A}^n$.

Предложение 1.4.9 ([18]). *Все торические многообразия X_σ Коэн–Маколеевы.*

Определение 1.4.10. Конус $\sigma \in N_\mathbb{R}$ называется *симплициальным*, если образующие $e_1, \ldots, e_k$ можно выбрать линейно независимыми. Конус σ называется *симплициальным над N* (или *базисным*), если $e_1, \ldots, e_k$ можно выбрать как часть некоторого базиса решетки N.

Предложение 1.4.11 ([18]). *Многообразие X_σ неособо $\iff$ конус σ базисный.*

Определение 1.4.12. Конусы вида $\sigma_m = \langle m\rangle^\perp \cap \sigma$, где $m \in \sigma^\vee$ называются *гранями* конуса σ. Соответственно, двойственные к граням конусы представляются как суммы Минковского $\sigma_m^\vee = \sigma^\vee + \langle m\rangle$.

Определение 1.4.13. *Веер* Σ — это такой конечный набор конусов в $N_\mathbb{R}$, содержащий вместе с каждым конусом все его грани, что пересечение любых двух конусов из данного набора является общей гранью этих двух конусов.

Каждому конусу(грани) σ_j веера Σ соответствует аффинное торическое многообразие U_{σ_j} (1.4.7). Этот набор согласован: каждому вложению граней $\sigma_k \subset \sigma_i$ соответствует открытое $\mathbb{T}$-эквивариантное вложение аффинных торических многообразий $U_{\sigma_k} \subset U_{\sigma_i}$. Нульмерному конусу соответствует открытая орбита. Весь этот набор в совокупности определяет некоторое абстрактное алгебраическое торическое многообразие X_Σ.

Определение 1.4.14. Описанное выше многообразие X_Σ называется *торическим многообразием* построенным по вееру Σ.

Определение 1.4.15. Веер называется *симплициальным* (над N), если все составляющие его конусы симплициальны (над N).

Симплициальные над N вееры Σ соответствуют неособым многообразиям X_Σ (1.4.11).

$\mathbb{T}$-эквивариантные морфизмы торических многообразий $X_\Sigma \mapsto X_{\Sigma'}$ описываются морфизмами вееров, то есть отображениями $N_\mathbb{R} \mapsto N'_\mathbb{R}$, переводящими N в N', линейными на каждом конусе σ веера Σ, и переводящими конусы веера Σ внутрь конусов веера Σ'. Бирациональные морфизмы соответствуют подразбиениям конусов Σ на более мелкие конусы.

Предложение 1.4.16 ([18]). *Многообразие X_Σ полное $\iff$ веер* Σ полный*, то есть объединение всех конусов в этом веере совпадает со всем пространством $N_\mathbb{R}$.*

Далее мы будем работать с полным веером.

Определение 1.4.17. Пусть Σ — полный веер в $N_\mathbb{R}$. Обозначим через $PL(\Sigma)$ множество функций $\phi : N_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, на каждом конусе $\sigma \in \Sigma$ равных некоторой линейной функции $\phi_\sigma \in M$. Функция ϕ называется выпуклой, если всех $x, y \in N_\mathbb{R}, a \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$a\phi(x) + (1-a)\phi(y) \leqslant \phi(ax + (1-a)y).$$

Если это неравенство является равенством лишь для пар x, y лежащих в одном конусе, функцию $\phi \in PL(\Sigma)$ будем называть строго выпуклой (относительно Σ).

Определим многогранник $\Delta_{\Sigma,\phi} = \cap_{\sigma \in \Sigma^{(n)}} (\sigma^\vee - \phi_\sigma)$.

Будем говорить что многогранник $\Delta_{\Sigma,\phi}$ (строго) выпуклый, если функция ϕ (строго) выпуклая.

Определение 1.4.18. Пусть $h \in \sigma \cap N$ — внутренний целый элемент конуса σ. Элемент h определяет $\mathbb{Z}_+$-градуировку $\deg_h$ кольца $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$. Проективный спектр $\mathrm{P}roj(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M], \deg_h)$ является проективным торическим многообразием которое мы обозначим $\mathbb{P}(\sigma, h)$.

Пример 1.4.19. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис M, $\sigma =< e_1, \ldots, e_n >_\geqslant$ — положительный гипероктант, а $h \in N$ — некоторая функция: $h(\sum m_i e_i) = \sum a_i m_i$. Тогда пространство $\mathbb{P}(\sigma, h)$ называется *взвешенным проективным пространством* с весами $(a_1, \ldots, a_n)$ и обозначается $\mathbb{P}(a_1 \ldots a_n)$. Если все $a_i = 1$, то это обычное $(n-1)$-мерное проективное пространство. с пучком $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$.

Замечание 1.4.20. По паре (σ, h) можно построить выпуклый рациональный многогранник

$$\Delta = \sigma^\vee \cap (h = 1).$$

Наоборот, по выпуклому рациональному многограннику Δ построим выпуклый рациональный полиэдральный конус $C(\Delta) \subset M_\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$:

$$C(\Delta) = \left\{ (m, k) \in M \oplus \mathbb{Z} : k \in \mathbb{Z}_+, \frac{m}{k} \in \Delta \right\}$$

и функцию $h_\Delta(m,k) = k$. Многообразие $\mathbb{P}(C(\Delta), h_\Delta)$ будем обозначать символом $\mathbb{P}(\Delta)$.

Если многогранник $\Delta_{\Sigma,\phi}$ — строго выпуклый и целочисленный, то $\mathbb{P}(\Delta_{\Sigma,\phi}) \simeq X_\Sigma$. Если $\Delta_{\Sigma,\phi}$ не строго выпуклый, то определено отображение $X_\Sigma \to \mathbb{P}(\Delta_{\Sigma,\phi})$.

Рассмотрим регулярную функцию $f : \mathbb{T} \to \mathbb{A}^1$ на торе. Эта функция может быть представлена многочленом Лорана:

$$f = f(x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_d, x_d^{-1}) = \sum_{m \in M} a_m x^m.$$

Определение 1.4.21. *Носитель* многочлена Лорана f это множество всех индексов m, для которых коэффициенты при соответствующих им мономах не равны нулю:

$$\mathrm{Supp}(f) = \{m : a_m \neq 0\}$$

Выпуклая оболочка носителя f называется *многогранником Ньютона* многочлена Лорана f и обозначается $\Delta(f)$

$$\Delta(f) = Conv\,(m : a_m \neq 0)$$

Таким образом, многогранник Ньютона многочлена Лорана — это выпуклый целый многогранник. Символом $L(\Delta)$ обозначим векторное пространство многочленов Лорана, носитель которых содержится в Δ.

Пространство глобальных сечений $H^0(\mathbb{P}(\Delta), \mathcal{O}(k))$ является представлением тора $\mathbb{T}$ и раскладывается в прямую сумму по его характерам $H^0(\mathbb{P}(\Delta), \mathcal{O}(k)) = \sum_{m \in M} H^0(\mathbb{P}(\Delta), \mathcal{O}(k))_m$; пространство $H^0(\mathbb{P}(\Delta), \mathcal{O}(k))_m$ либо нульмерно (если m не лежит в $k\Delta$), либо одномерно и порождено характером $x^m x_0^k$ (если $m \in k\Delta$). Поэтому пространство глобальных сечений $H^0(\mathbb{P}(\Delta), \mathcal{O}(k))$ естественным образом отождествляется с пространством $L(k\Delta)$. Пусть все вершины многоугольника Δ — целые. Если точка $m \in M$ — вершина многогранника Δ, то соответствующее ей главное аффинное подмножество $U_m = \{X \in \mathbb{P}(\Delta) : x^m(X) \neq 0\}$ изоморфно $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[M \cap \langle \Delta - m \rangle_{\geqslant}]$ ($\langle \Delta - m \rangle_{\geqslant}$ это конус в $\overline{M}_{\mathbb{R}}$ над сдвигом многогранника Δ на вектор $-m$).

С другой стороны, каждой грани δ многогранника Δ соответствует однородный идеал $I_\delta = \mathbb{C}[M \cap (C(\Delta) \backslash C(\delta))]$. Нули I_δ это замкнутое $\mathbb{T}$-инвариантное подмногообразие в $\mathbb{P}(\Delta)$ изоморфное $\mathbb{P}(\delta)$, являющееся замыканием соответствующей $(\dim \delta)$-мерной орбиты. Грани-пересечению $\delta \cap \delta'$ соответствует пересечение подмногообразий $\mathbb{P}(\delta) \cap \mathbb{P}(\delta')$. Символом $\mathbb{P}^o(\delta)$ обозначим единственную $(\dim \delta)$-мерную орбиту тора $\mathbb{T}$ содержащуюся в δ. Орбита $\mathbb{P}^o(\delta)$ лежит в открытом множестве U_m тогда и только тогда, когда $m \in \delta$.

Пусть $f \in L(\Delta)$. Обозначим через $Z(f, \Delta)$ гиперповерхность нулей $f \in H^0(\mathbb{P}(\Delta), \mathcal{O}(1))$ в пространстве $\mathbb{P}(\Delta)$. В главной аффинной карте U_m гиперповерхность $Z(f, \Delta)$ задаётся уравнением $x^{-m} f = 0$. Как будет видно далее (1.4.30, 1.4.39. 1.4.32), если Δ — рефлексивный многогранник, то $\mathbb{P}(\Delta)$ — торическое многообразие Фано и $-K_{\mathbb{P}(\Delta)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Delta)}(1)$, соответственно $Z(f, \Delta)$ — антиканоническое сечение многообразия Фано $\mathbb{P}(\Delta)$.

Определение 1.4.22. Многочлен $f \in L(\Delta)$ называется *невырожденным* относительно (Δ, δ), если $Z(f, \Delta)$ трансверсально пересекается с $\mathbb{P}^o(\delta)$ в пространстве $\mathbb{P}(\Delta)$. Многочлен f называется невырожденным относительно Δ, если он невырожден относительно всех орбит $\delta \in \Delta$.

Из определения легко выводятся следующие свойства:

Предложение 1.4.23. *1. Многочлен $f = \sum a_m x^m \in L(\Delta)$ невырожден относительно 0-мерного страта l тогда и только тогда, когда коэффициент a_l отличен от нуля. Поэтому многочлен Лорана f невырожден относительно всех 0-мерных стратов $\mathbb{P}(\Delta)$ тогда и только тогда, когда $\Delta = \Delta(f)$.*

2. *Пусть δ — одномерный страт $\mathbb{P}(\Delta)$ соответствующий ребру $[m, m']$ многогранника Δ. Предположим, что отрезок $[m, m']$ не содержит целых точек отличных от вершин m и m'. Тогда, если многочлен f невырожден относительно m и m', то f невырожден относительно δ.*

3. *Пусть $f' \in L(\Delta)$ — многочлен Лорана, носитель которого содержится в открытой внутренности многогранника Ньютона $\Delta(f)$. Тогда многочлен f невырожден относительно Δ тогда же, когда и многочлен $f + f'$.*

Будем говорить что многочлен Лорана f невырожден, если f невырожден относительно $\Delta(f)$. Обозначим $\mathbb{P}(f) = \mathbb{P}(\Delta(f)), Z(f) = Z(f, \Delta(f))$.

Для грани Γ многогранника Δ, обозначим символом $l(\Gamma)$ количество целых точек на этой грани, а символом $l^*(\Gamma)$ — количество целых точек внутри грани.

На когомологиях $H^\bullet(Z(f, \Delta), \mathbb{C})$ есть смешанная структура Ходжа; размерности некоторых факторов её фильтраций можно вычислить с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.4.24 ([19], 5.6-5.11). *Если многочлен Лорана f невырожден,* *то при* $p > 0$

$$h^{p,0}(H^{d-1}(Z(f))) = \sum_{\dim \Gamma = p+1} l^*(\Gamma),$$

суммирование производится по всем $(p+1)$*-мерным граням* Γ *многогранника* $\Delta(f)$.

Теорема 1.4.25 ([77]). *Всякий эффективный дивизор (Картье) на* X *линейно эквивалентен эффективному* $\mathbb{T}$*-инвариантному дивизору (Картье). Всякий эффективный* r*-цикл на* X *рационально эквивалентен эффективному* $\mathbb{T}$*-инвариантному* r*-циклу.*

Следствие 1.4.26. *Конусы Мори и Кэлера торических многообразий — рациональные полиэдральные конусы.*

Кроме этого, из утверждения 1.4.25 следует что программа минимальных моделей для торического многообразия может быть проделана $\mathbb{T}$-эквивариантно (у экстремальных лучей есть инвариантные представители).

Предложение 1.4.27 ([18, 31]). *Неприводимые* $\mathbb{T}$*-инвариантные дивизоры Вейля многообразия* X_Σ *соответствуют конусам веера* Σ *размерности* 1 *(вершинам многогранника* Δ_Σ*). Главные* $\mathbb{T}$*-инвариантные дивизоры соответствуют элементам решетки* M *как дивизоры функций-характеров* $div(x^m)$*. Группа* $Div^{\mathbb{T}}(X)$ *целых* $\mathbb{T}$*-инвариантных дивизоров Вейля многообразия* X *— это группа отображений множества* $\Sigma^{(1)}$ *одномерных конусов (т.е. вершин многогранника* Δ_Σ*) веера в* $\mathbb{Z}$*, а группа главных* $\mathbb{T}$*-инвариантных дивизоров, канонически изоморфная* M*, — это* *подгруппа* $Div^{\mathbb{T}}(X)$*, состоящая из отображений* $\langle m, . \rangle, m \in M$*, значение которых на элементе* $\rho \in \Sigma^{(1)}$ *равно* $\langle m, \rho \rangle$*. таким образом, группа* $Cl(X)$ *классов дивизоров Вейля по модулю главных определяется точной последовательностью*

$$0 \to M \to \mathbb{Z}^{\Sigma^{(1)}} \to Cl(X) \to 0. \tag{1.4.28}$$

В частности, ранг группы $Cl(X)$ *равен* $|\Sigma^{(1)}| - \dim X$*.*

Дивизор $D = \sum_{\rho_i \in \Sigma^{(1)}} a_{\rho_i} D_{\rho_i}$ *является локально главным в общей (и любой) точке* $(\operatorname{codim} \sigma)$*-мерной орбиты соответствующей конусу* σ*, если существует такой элемент* $m \in M$*, что* $\langle m, \rho_i \rangle = a_{\rho_i}$ *для всех* $\rho_i \in \sigma^{(1)}$*. Поэтому дивизор Картье* $H = \sum_{\rho_i \in \Sigma^{(1)}} a_{\rho_i} H_{\rho_i}$ *определяется кусочно-линейной функцией* ϕ_H*:*

$$a_\rho = \phi_H(\rho).$$

Группа Пикара $\operatorname{Pic}(X)$ *определяется из точной последовательности*

$$0 \to M \to PL(\Sigma) \to \operatorname{Pic}(X) \to 0. \tag{1.4.29}$$

Обратимые пучки на торическом многообразии описываются кусочно-линейными (относительно веера) функциями, обратному образу обратимого пучка соответствует обратный образ функции (для бирационального отображения это фактически та же самая функция).

Для дивизора Картье H на X_Σ символом Δ_H обозначим многогранник Δ_{Σ,ϕ_H} (в смысле определения 1.4.17).

Предложение 1.4.30 ([31])**.** *Антиканонический класс* $-K_X$ *торического многообразия* X *представляется постоянным отображением* ϕ_{-K} :

$\Sigma^{(1)} \to 1 \in \mathbb{Z}$:

$$-K_X = \sum_{\rho_i \in \Sigma^{(1)}} D_{\rho_i}$$

Если X — $\mathbb{Q}$-горенштейново, то $\phi_{-K} \in \mathbb{Z}^{\Sigma^{(1)}}$ продолжается до функции из $PL(\Sigma)$, которую мы также обозначим ϕ_{-K}. В частности, определены значения ϕ_{-K} в любых точках $N_{\mathbb{R}}$. Пусть $\psi : X' \to X$ — бирациональный морфизм торических многообразий, соответствующий морфизму вееров $N'_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}$, а $E \subset X'$ — исключительный дивизор (он $\mathbb{T}$-инвариантен автоматически), соответствующий примитивному вектору $\rho_E \in \Sigma^{(1)}$; тогда дискрепантность $a(E)$ относительно пары $(X, 0)$ равна $\phi_{-K}(\rho_E) - 1$.Морфизм крепантный, если все лучи исключительных дивизоров лежат на многограннике Δ_Σ — единичной линии уровня функции ϕ_{-K}.

Следствие 1.4.31. *1. Многообразие X $\mathbb{Q}$-горенштейново $\iff$ для каждого конуса σ веера Σ существует функция $m \in M_{\mathbb{Q}}$ принимающая значение 1 на всех векторах $\rho \in \sigma^{(1)}$. Если можно выбрать $m \in M$, то X горенштейново.*

2. *$\mathbb{Q}$-горенштейново многообразие X имеет терминальные особенности $\iff$ все целые точки многогранника Δ_Σ — только его вершины и 0.*

3. *$\mathbb{Q}$-горенштейново многообразие X имеет канонические особенности $\iff$ 0 — единственная целая точка лежащая строго внутри многогранника Δ_Σ.*

4. *Если торическое многообразие горенштейново, то оно имеет канонические особенности.*

Поскольку любой целый паралеллограмм без внутренних целых точек базисный, верно следующее

Предложение 1.4.32. *Двумерное торическое многообразие X имеет канонические особенности $\iff$ X горенштейново.*

Предложение 1.4.33. *Трёхмерное торическое многообразие X горенштейново и имеет терминальные особенности $\iff$ X нодальное.*

Доказательство. Поскольку X горенштейново, для каждого максимального конуса σ существует такой $m \in M$, что пересечение $\sigma \cap (m = 1)$ это выпуклый целый многогранник Δ_σ, являющийся выпуклой оболочкой вершин $\rho \in \sigma^{(1)}$. Терминальность X означает, что каждый вектор $\rho \in \sigma^{(1)}$ является вершиной многогранника Δ_σ, а других целых точек на многограннике Δ_σ нет. Несложно убедиться, что многогранник Δ_σ, удовлетворяющий таким условиям, эквивалентен одному из двух:

1. Либо Δ_σ это базисный треугольник, то есть $\sigma^{(1)}$ — базис N. В этом случае $X_\sigma = \mathbb{A}^3$, и неподвижная точка 0 неособая.

2. Либо Δ_σ это базисный параллелограмм, то есть конус с набором образующих $\sigma^{(1)} = \{\rho_A, \rho_B, \rho_C, \rho_D\}$, любые три из которых являются базисом N, а все вместе они удовлетворяют линейному соотношению $\rho_A + \rho_C = \rho_B + \rho_D$. В этом случае, X_σ это квадратичный конус в $\mathbb{A}^4$, а неподвижная точка 0 является обыкновенной двойной особенностью.

□

Следствие 1.4.34. *Трёхмерное торическое $\mathbb{Q}$-факториальное многообразие с горенштейновыми терминальными особенностями — гладкое.*

Предложение 1.4.35 ([18]). *Дивизор H обильный $\iff$ функция f_H строго выпуклая относительно Σ, то есть многогранник $\Delta_H = f_H^{-1}(1)$ является строго выпуклым многогранником в смысле определения 1.4.17.*

Следствие 1.4.36. *$\mathbb{Q}$-горенштейново торическое многообразие X является многообразием Фано $\iff$ многогранник $\Delta_\Sigma = \Delta_{-K}$ строго выпуклый.*

Напомним, что в 1.4.20 по многограннику $\Delta \subset M_\mathbb{R}$ мы построили конус $C(\Delta)$ в $M_\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Предложение 1.4.37. *Двойственность между конусами в $M_\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ и $N_\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ индуцирует двойственность между выпуклыми многогранниками в $M_\mathbb{R}$ и $N_\mathbb{R}$. При этом соответствии, если многогранник Δ рациональный, то рациональный и двойственный ему $\Delta^\vee$.*

Определение 1.4.38. Целый выпуклый многогранник называется *рефлексивным*, если двойственный многогранник также целый.

Естественно, двойственный к рефлексивному многограннику тоже рефлексивен.

Следствием 1.4.36 и 1.4.31 является следующее

Предложение 1.4.39 ([3]). *Горенштейновы торические многообразия Фано взаимно однозначно соответствуют рефлексивным многогранникам.*

Предположим что многообразие X — $\mathbb{Q}$-факториально. Рассмотрим гомоморфизм $N_1(X)_\mathbb{Q} \to \oplus_{\rho\in\Sigma(1)}\mathbb{Q}\rho$, переводящий кривую β в $\sum(\beta \cdot D_\rho)\rho$.

Последовательность

$$0 \to N_1(X)_{\mathbb{Q}} \to \oplus_{\rho\in\Sigma^{(1)}}\mathbb{Q}\rho \to N_{\mathbb{Q}} \to 0 \qquad (1.4.40)$$

точна (она двойственная к последовательности 1.4.28). Индекс пересечения 1-цикла, соответствующего соотношению $\sum b_i\rho_i = 0$, и дивизора $\sum a_iD_i$ равен $\sum a_ib_i$.

В общем случае (если X не $\mathbb{Q}$-факториально), в левой части последовательности 1.4.40 стоит не группа классов всех 1-циклов по модулю численной эквивалентности, а двойственная группа к группе классов дивизоров Вейля $Cl(X)$. Из неё есть естественное отображение в $N_1(X)$, и ядро этого отображения порождено всеми соотношениями равными нулю на кусочно-линейных функциях, то есть соотношениями между образующими конусов.

Следовательно, двойственным к 1.4.29 является следующее равенство

$$N_1(X) = \frac{\mathrm{Ker}\ (\oplus_{\rho\in\Sigma^{(1)}}\mathbb{Z}\rho \to N)}{\sum_\sigma \mathrm{Ker}\ (\oplus_{\rho\in\sigma^{(1)}}\mathbb{Z}\rho \to N)}/tors \qquad (1.4.41)$$

Замечание 1.4.42. Два разбиения базисного квадрата (определённого в доказательстве 1.4.33) на базисные треугольники соответствуют двум малым крепантным разрешениям $\tilde{X}_1 \to X$ и $\tilde{X}_2 \to X$ нодальной трёхмерной особенности.

Разрешения $\tilde{X}_1 \to X$ и $\tilde{X}_2 \to X$ связаны естественным малым бирациональным преобразованием, так называемым *флопом Атьи.*

Если на трёхмерном нодальном многообразии p особых точек, то есть 2^p малых крепантных разрешений.

К сожалению, получающиеся неособые многообразия-разрешения могут оказаться не проективными. Однако, в торическом случае хотя бы одно из этих разрешений проективно:

Теорема 1.4.43 ([34]). *Пусть X — торическое $\mathbb{Q}$-горенштейново многообразие Фано. Тогда у него существует* MPCP-разрешение *(максимальное* проективное *крепантное частичное разрешение), то есть существует крепантный проективный морфизм $\tilde{X} \to X$ из $\mathbb{Q}$-факториального многообразия $\tilde{X}$ с терминальными особенностями.*

Заметим, что если $X_{\Sigma'} \to X_\Sigma$ — $MPCP$-разрешение многообразия X_Σ с терминальными особенностями, то оно малое ($\Sigma'^{(1)} = \Sigma^{(1)}$). В интересующем нас случае нодальных трёхмерных многообразий, многообразие $\tilde{X}$ — гладкое (1.4.34), одно из упомянутых ранее 2^p разрешений; а само разрешение — малое, то есть не стягивающее дивизоров.

Теорема 1.4.44 (см. например [2]). *Пусть X — неособое и собственное (возможно, не проективное) торическое многообразие. Кольцо когомологий $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$ порождено классами инвариантных дивизоров D_{ρ_i}. Соотношения в этом кольце порождены соотношениями Стенли–Ризнера — для всякого $J \subset \Sigma^{(1)}$, не содержащегося ни в одной грани Δ, выполнено*

$$\prod_{j \in J \subset \Sigma^{(1)}} D_{\rho_j} = 0,$$

и соотношениями тривиальности главных дивизоров - $\forall m \in M$

$$\sum_i \langle m, \rho_i \rangle D_{\rho_i} = 0.$$

Это означает что в кольце когомологий гладкого торического многообразия все соотношения порождаются наивными: пересечение k различных дивизоров пусто, если соответствующие этим дивизорам 1-мерные грани не лежат на одной k-мерной грани σ. Если же лежат, то они трансверсально пересекаются в $(d-k)$-мерной орбите соответствующей грани σ.

Лемма 1.4.45. *Пусть X_Σ — гладкое n-мерное торическое многообразие. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений*

$$x_{j_1\dots j_n} = 0, \text{ если } \{\rho_{j_1}\dots\rho_{j_n}\} \text{ не конус в } \Sigma$$

$$\sum\langle m, \rho_j\rangle x_{j_1\dots j_{i-1}jj_{i+1}\dots j_n} = 0$$

Она имеет единственное с точностью до пропорциональности решение. Выберем единственное решение удовлетворяющее условию $x_{j_1\dots j_n} = 1$, если $\{\rho_{j_1}\dots\rho_{j_n}\}$ является конусом в Σ. Тогда числа $x_{j_1\dots j_n}$ равны индексам пересечения дивизоров $D_{j_1}\cdot\ldots\cdot D_{j_n}$ на X_Σ.

Предложение 1.4.46. *Для дивизора Вейля $\sum a_\rho D_\rho$ условие локальной главности в обыкновенной двойной особенности на трёхмерном торическом многообразии выглядит так — сумма коэффициентов при инвариантных неприводимых дивизорах соответствующих концам диагонали $\rho_A\rho_C$ параллелограмма $\rho_A\rho_B\rho_C\rho_D$ равна аналогичной сумме на концах диагонали $\rho_B\rho_D$:*

$$a_{\rho_A} + a_{\rho_C} = a_{\rho_B} + a_{\rho_D}.$$

Лемма 1.4.47. *Пусть X — нодальное трёхмерное торическое многообразие Фано. Тогда группа $\mathrm{Pic}(X)$ определяется из точной последовательности*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\tilde{X}) \xrightarrow{\phi} \oplus_{ABCD}\mathbb{Z},$$

в последнем члене суммирование происходит по всем базисным параллелограммам $\rho_A\rho_B\rho_C\rho_D$ для X, $\phi = \oplus_{ABCD}\phi_{ABCD}$, и $\phi_{ABCD}(\sum a_\rho D_\rho) = (a_{\rho_A} - a_{\rho_B} + a_{\rho_C} - a_{\rho_D})$.

Замечание 1.4.48. Используя лемму 1.4.45 и лемму 1.4.47, можно достаточно эффективно вычислить оснащённую решётку Пикара $\mathrm{Pic}_E(X)$ $\mathbb{Q}$-горенштейнового торического многообразия X имеющего неособое $MPCP$-разрешение $f : \tilde{X} \to X$ (например, этим свойством обладает трёхмерное нодальное X). Индекс самопересечения D^n дивизора Картье $D \in \mathrm{Pic}(X)$ равен индексу пересечения его полного (совпадающего с собственным) прообраза $\tilde{D} = f^*D$ на $\tilde{X}$. При малом раздутии группа дивизоров Вейля не меняется, дивизор $\tilde{D}$ представлен тем же самым дивизором Вейля, что и D (его собственным прообразом).

Таким образом, чтобы найти $\mathrm{Pic}_E(X)$ нужно решить две системы линейных уравнений: одну систему на индексы пересечений $D_{i_1} \cdot \ldots \cdot D_{i_n}$ описанную в 1.4.45, и вторую — систему уравнений 1.4.46 чтобы выделить $\mathrm{Pic}(X)$ как подгруппу в $\mathrm{Pic}(\tilde{X})$[1].

1.5 Вырождения

Опишем интересующую нас в этом разделе ситуацию.

Определение 1.5.1. *Деформацией* называется плоский собственный морфизм

$$\pi : \mathcal{X} \to \Delta,$$

[1]Сценарий для *pari/gp* реализующий описанный выше алгоритм: http://www.mi.ras.ru/ galkin/work/NodalToric3foldPicard.gp.

где Δ — единичный диск $\{|t| < 1\}$, $\mathcal{X}$ — неприводимое комплексное многообразие. Все рассматриваемые далее деформации проективные (морфизм π проективный над Δ). Обозначим через X_t слои $\mathcal{X}_t$, а через $i_t, t \in \Delta$, мы будем обозначать морфизм вложения слоя $\mathcal{X}_t \to \mathcal{X}$.

Если слои X_t при $t \neq 0$ неособые, то деформация π называется вырождением X_t при $t \neq 0$ и сглаживанием X_0. Если хотя бы один такой морфизм π существует, допуская вольность речи, мы будем говорить, что X_t при $t \neq 0$ является *сглаживанием* X_0, а X_0, соответственно, *вырождением* X_t.

Пусть $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на многообразии $\mathcal{X}$ над Δ. Тогда для всех $t \in \Delta$ символом $\mathcal{L}_t = i_t^* \mathcal{L}$ мы будем обозначать ограничение обратимого пучка на слой над точкой t, другими словами определен морфизм $i_t^* : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_t)$.

Локальная топология сглаживаний устроена следующим образом:

Предложение 1.5.2 (см., например, [15], [60] или [87]). *Пусть $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ — сглаживание.*

1. *Ограничение $\pi : \mathcal{X} \backslash X_0 \to \Delta \backslash 0$ является локально тривиальным расслоением в классе гладких топологических многообразий, в частности все гладкие слои диффеоморфны (это утверждение известно как* теорема Эресмана*).*

2. *Существует непрерывное* отображение Клеменса *$c : \mathcal{X} \to X_0$ (вне $c^{-1}(\mathrm{Sing}\, X_0)$ отображение c является гладким), являющееся деформационной ретракцией пространства $\mathcal{X}$ на слой X_0 согласованной с радиальной ретракцией $\Delta \to 0$. Ограничение отображения c на*

гладкий слой X_t является взаимно однозначным вне особых точек X_0.

Эти утверждения чисто топологические и являются вариациями теоремы о трубчатой окрестности.

Следствие 1.5.3. *Многообразия $\mathcal{X}$ и X_0 гомотопически эквивалентны (гомотопическая эквивалентность задаётся парой из отображения Клеменса $c : \mathcal{X} \to X_0$ и вложения слоя $i_0 : X_0 \to \mathcal{X}$), в частности*

$$H^2(X_0, \mathbb{Z}) = H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$$

$$H_2(X_0, \mathbb{Z}) = H_2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$$

Следствие 1.5.4. *Для всех $t \neq 0$ образы $Im[\{i_t\}_* H_\bullet(X_t, \mathbb{Z}) \to H_\bullet(\mathcal{X}, \mathbb{Z})]$ совпадают.*

Доказательство. Покроем $\Delta \backslash 0$ окрестностями U_i над которыми π является тривиальным расслоением. Рассмотрим пару точек $t, s \in U_i$ и k-цикл $\gamma \in H_k(X_t, \mathbb{Z})$. Пусть $I \subset U$ — отрезок соединяющий t и s в U, а γ_U — $(k+1)$-цикл в $\mathcal{X}_I$, соответствующий произведению I на γ при тривиализации π над I. Тогда граница γ_U в $\mathcal{X}$ это разность $\{i_t\}_* \gamma$ и $\{i_s\}_* \gamma$. $\square$

Теорема 1.5.5 ([20])**.** *Числа Ходжа $h^{p,q}(X_t)$ постоянны для всех $t \in \Delta \backslash 0$.*

Утверждение 1.5.6 (Теорема полунепрерывности, см. например [42])**.** *Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathcal{X}$, плоский над $\mathcal{O}_\Delta$; обозначим $\mathcal{F}_t = i_t^* \mathcal{F}$. Тогда*

1. *Эйлерова характеристика $\chi(X_t, \mathcal{F}_t)$ не зависит от $t \in \Delta$.*

2. *Размерность каждого отдельного пространства когомологий* $H^i(X_t, \mathcal{F}_t)$ *как функция от* t *полунепрерывна сверху (то есть* $\forall n \in \mathbb{Z}$ *множества вида*

$$\left\{t \in \Delta : h^i(X_t, \mathcal{F}_t) \geqslant n\right\}$$

замкнуты в топологии Зарисского).

Замечание 1.5.7. Если на многообразии X_0 выполнена формула Римана-Роха в форме 1.3.16, то большинство упоминающихся далее равенств между численными инвариантами являются следствиями утверждения 1.5.6.1

Замечание 1.5.8. Иногда мы будем пользоваться таким приёмом: если когомологии какого-то когерентного пучка $H^i(X_0, \mathcal{F}_0) = 0$ зануляются, то будем считать, что диск Δ выбран так, что зануляются и когомологии всех слоёв $H^i(X_t, \mathcal{F}_t) = 0$.

Теорема 1.5.9 ([52]). *Пусть многообразие* X_0 *имеет канонические особенности. Тогда и многообразие* $\mathcal{X}$ *имеет канонические особенности. Тотальное пространство* $\mathcal{X}$ *является* $\mathbb{Q}$*-горенштейновым. Если многообразие* X_0 *горенштейново, то и* $\mathcal{X}$ *тоже горенштейново.*

В последнем случае, на $\mathcal{X}$ верна наивная формула присоединения (так как дуализирующий пучок равен каноническому).

Всюду далее в этом разделе мы предполагаем что многообразие X_0 горенштейново многообразие Калаби–Яу (в этом случае предположим, для наглядности, что $\dim X_0 \geqslant 3$, для $K3$-поверхностей доказываемые далее утверждения тоже верны, но требуется несколько уточнений в доказательствах) или почти Фано с каноническими особенностями (любой размерности).

Предложение 1.5.10. *Для всех i и t имеем*

$$h^i(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = h^i(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h^i(X_t, \mathcal{O}_{X_t})_{0<i<\dim X_t}$ как функцию от t. Эта функция полунепрерывна сверху (по теореме полунепрерывности), и при $t = 0$ равна 0 (по определению если X — многообразие Калаби–Яу, и по свойству 1.3.6 если X — многообразие почти Фано). Следовательно, она равна 0 в окрестности 0. Значит, она и тождественно равна 0 (1.5.5). Поскольку $h^0(X_t, \mathcal{O}) = 1$ для всех t, из 1.5.6 получаем что $h^n(X_t) = h^n(X_0)$ для всех t (0 для почти Фано, 1 для Калаби–Яу). □

По теореме Грауэрта высшие прямые образы пучков $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-K_{\mathcal{X}})$ зануляются $R^i\pi_*\mathcal{O} = R^i\pi_*\mathcal{O}(-K_{\mathcal{X}}) = 0, \dim X_0 > i > 0$, а $\pi_*\mathcal{O}(-K_{\mathcal{X}})$ — локально свободный пучок над Δ ранга $h^0(X_0, \mathcal{O}(-K_{X_0}))$. Спектральные последовательности Лере $H^i(\Delta, R^j\pi_*\mathcal{O}(-K_{\mathcal{X}}))$ и $H^i(\Delta, R^j\pi_*\mathcal{O}))$ вырождаются. Имеем

$$H^i(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-K_{\mathcal{X}})) = H^i(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(-K_t)) = 0, \dim X_0 > i > 0, t \in \Delta \tag{1.5.11}$$

$$H^i(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = H^i(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0, \dim X_0 > i > 0, t \in \Delta \tag{1.5.12}$$

$$H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(-K_{X_t})) = H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(-K_{X_0})), t \in \Delta \tag{1.5.13}$$

$$H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-K_{\mathcal{X}})) = H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(-K_{X_0})) \otimes H^0(\Delta, \mathcal{O}) \tag{1.5.14}$$

Из экспоненциальной точной последовательности и 1.5.12 имеем изоморфизмы

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X}) = H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \tag{1.5.15}$$

$$\mathrm{Pic}(X_t) = H^2(X_t, \mathbb{Z}) \tag{1.5.16}$$

Комбинируя равенство 1.5.15 и утверждения 1.5.3 получаем

Предложение 1.5.17. *Отображение* $i_0^* : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \mapsto \mathrm{Pic}(X_0)$ *— изоморфизм.*

Предложение 1.5.18. *Отображение* $i_t^* : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \mapsto \mathrm{Pic}(X_t)$ *инъективно, то есть*

$$Ker\ i_t^* = 0. \tag{1.5.19}$$

Доказательство. Поскольку для всех $\gamma \in H_\bullet(X_t)$ и $\Gamma \in H^\bullet(\mathcal{X})$ выполнено

$$\langle i_t^*(\Gamma), \gamma \rangle = \langle \Gamma, \{i_t\}_* \gamma \rangle ,$$

из невырожденности спаривания на X_t при $t \neq 0$ и следствия 1.5.4 получаем что ядра $\mathrm{Ker}\ i_t^* : H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})/tors \to H^2(X_t, \mathbb{Z})/tors$ совпадают для всех $t \neq 0$. Из отождествления 1.5.15 то же верно для $i_t : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Pic}(X_t)$: $\mathrm{Ker}\ i_t = \mathrm{Ker}\ i_{t'}$ для всех $t, t' \in \Delta \backslash 0$.

Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{L} \in \mathrm{Ker}\ i_t^* = \cap_{t' \in \Delta \backslash 0} \mathrm{Ker}\ i_{t'}^*$. Это обратимый пучок обладающий свойством $\mathcal{L}_{X_t} = \mathcal{O}_{X_t}, t \in \Delta \backslash 0$. При $t \neq 0$ у этого тривиального расслоения одномерное пространство сечений:

$$h^0(X_t, \mathcal{L}_{X_t}) = h^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 1,$$

следовательно

$$h^0(X_0, \mathcal{L}_{X_0}) \geqslant 1.$$

Аналогично, получим

$$h^0(X_0, \mathcal{L}_{X_0}^{-1}) \geqslant 1$$

. Поэтому $\mathcal{L}_{X_0} \simeq \mathcal{O}_{X_0}$. А следовательно по 1.5.17 и $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. $\square$

По формуле присоединения, для всех $t \in \Delta$ выполнено

$$-K_{X_t} = -(K_{\mathcal{X}} + X_t)|_{X_t} = i_t^*(-K_{\mathcal{X}}), \tag{1.5.20}$$

т.к. X_0 горенштейново (1.5.9).

Предложение 1.5.21. *Сглаживания X_t горенштейнова многообразия Калаби–Яу X_0 являются многообразиями Калаби–Яу.*

Доказательство. Из утверждения 1.5.10 имеем $h^i(X_t,\mathcal{O})=0$ для $0<i<\dim X_t$. Из 1.5.17 и 1.5.20 получаем $K_{\mathcal{X}}|_{X_0}=K_{X_0}=\mathcal{O}_{X_0} \implies K_{\mathcal{X}}=\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, а следовательно $K_{X_t}=K_{\mathcal{X}}|_{X_t}=\mathcal{O}_{\mathcal{X}}|_{X_t}=\mathcal{O}_{X_t}$. □

Пусть $\mathcal{X}$ — относительное многообразие Фано (то есть пучок $-K_{\mathcal{X}}$ обилен над Δ).

Следствие 1.5.22. *Антиканонические сечения X_t являются деформациями антиканонических сечений X_0.*

Доказательство. Если Y_0 — некоторое антиканоническое сечение соответствующее элементу $y_0\in H^0(X_0,-K_{X_0})$, то $\mathcal{Y}$ — антиканоническое сечение $\mathcal{X}$ соответствующее элементу $y_0\otimes 1\in H^0(X_0,-K_{X_0})\otimes H^0(\Delta,\mathcal{O}_\Delta)=H^0(\mathcal{X},-K_{\mathcal{X}})$ (см. 1.5.14), задающее требуемую деформацию. Из точной последовательности

$$0\to\mathcal{O}_{\mathcal{X}}((-m-1)K_{\mathcal{X}})\to\mathcal{O}(-mK_{\mathcal{X}})\to\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-mK_{\mathcal{X}})\to 0,$$

занулений 1.3.6 и 1.5.11,1.5.12,1.5.13,1.5.14 (и аналогичных им для $\mathcal{O}(-mK_{\mathcal{X}})$) получим что многочлен Гильберта $\mathcal{Y}_t$ не зависит от t, следовательно семейство $\mathcal{Y}_t$ плоское. □

Следствие 1.5.23. *Если существует неособое антиканоническое сечение X_0, то общее антиканоническое сечение X_t для общего t тоже неособое.*

Пусть $\mathcal{D}\in\operatorname{Pic}(\mathcal{X})$. Слои $X_0=X$ и X_t алгебраически эквивалентны, следовательно

$$i_0^*(\mathcal{D})^{\dim X}=\mathcal{D}^{\dim X}\cdot X_0=\mathcal{D}^{\dim X}\cdot X_t=i_t^*(\mathcal{D})^{\dim X} \tag{1.5.24}$$

Следствие 1.5.25. *Антиканоническая степень* $(-K_t)^{\dim X_t}$ *не зависит от* $t \in \Delta$.

Теорема 1.5.26 ([28]). *Всякое трёхмерное нодальное многообразие Фано* X_0 *имеет сглаживание* $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$, *у которого общий слой* X_t *при* $t \neq 0$ *является гладким многообразием Фано.*

Теорема 1.5.26 имеет обобщение

Теорема 1.5.27 ([71]). *Всякое трёхмерное горенштейново многообразие Фано* X_0 *с терминальными особенностями имеет сглаживание* $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$, *общий слой* $X_{t\neq 0}$ *которого является гладким многообразием Фано.*

Определение 1.5.28 ([4]). Вырождение (сглаживание) π называется *малым*, если X_0 имеет лишь горенштейновы терминальные особенности (см. 1.2), и для всякого $t \in \Delta$ морфизм $i_t^* : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Pic}(X_t)$ является изоморфизмом.

Предложение 1.5.29. *В случае многообразий (почти) Фано, малость вырождения эквивалентна совпадению двух пар чисел* (ρ, d) *(число* d *определено в 1.3.12):*

$$\rho(X_0) = \rho(X_t)$$

$$d(X_0) = d(X_t)$$

Доказательство. Ограничение i_0^* всегда изоморфизм, и инъективность i_t^* верна всегда (см. 1.5.18). Обе группы $\mathrm{Pic}(X_t)$ и $\mathrm{Pic}(X)$ являются решётками конечного ранга (1.3.6). Таким образом, равенство $\rho(X_0) = \rho(X_t)$

означает что морфизм $i_t^*(i_0^*)^{-1}$ взаимно-однозначно отображает решётку $\mathrm{Pic}(X_0)$ в полную подрешётку конечного индекса в $\mathrm{Pic}(X_t)$. Этот индекс равен $[\mathrm{Pic}(X_t) : \mathrm{Pic}(X_0)] = \left(\frac{d(X_0)}{d(X_t)}\right)^{\frac{1}{2}}$. □

Теорема 1.5.30 ([49]). *Если $\mathcal{X}$ — сглаживание, а X_0 — трёхмерное горенштейново многообразие Фано с терминальными особенностями, морфизм i_t^* является изоморфизмом для всех t.*

Следствие 1.5.31. *У всякого трёхмерного горенштейнова многообразия Фано с терминальными особенностями существует сглаживание, общий слой которого гладкое многообразие Фано, и все такие сглаживания являются малыми.*

Доказательство. Это формальное объединение теорем 1.5.27 и 1.5.30. □

Следствие 1.5.32. *Трёхмерное горенштейново терминальное многообразие Фано X и его сглаживание Y имеют изоморфные оснащённые группы Пикара.*

Доказательство. Это мы показали равенствами 1.5.30, 1.5.6.1, 1.5.20 и 1.5.24. □

У трёхмерного многообразия Фано Y всего два нетривиальных числа Ходжа, первое $h^{1,1}(Y) = h^{2,2}(Y) = \rho(Y)$ равно рангу группы Пикара, а второе $b(Y) = h^{1,2}(Y) = h^{2,1}(Y) = \frac{1}{2}\operatorname{rk} H^3(Y, \mathbb{Z})$; ещё два равны единице $h^{0,0}(Y) = h^{3,3}(Y) = 1$, остальные нули.

Предложение 1.5.33. *Пусть X — нодальное трёхмерное многообразие, $\tilde{X}$ — его малое крепантное разрешение, Y — сглаживание X. Обозначим $p(X)$ — количество обыкновенных двойных точек на X. Тогда выполнено* *равенство*

$$b(Y) = p(X) + b(\tilde{X}) + \rho(Y) - \rho(\tilde{X}), \tag{1.5.34}$$

Доказательство. Сравним топологические эйлеровы характеристики (для некомпактных многообразий и многообразий с краем будем использовать эйлерову характеристику когомологий с компактным носителем: $\chi(M) = \sum_i (-1)^i \dim H^i_c(M, \mathbb{C})$) малого крепантного разрешения $\tilde{X}$ и сглаживания Y [2].

Вырежем из X маленькие окрестности всех обыкновенных двойных точек p_i, полученное многообразие с краем назовём M. Граница окрестности обыкновенной двойной особенности на X изоморфна $S^2 \times S^3$ (1.2.3), при крепантном разрешении она заклеивается $S^2 \times D^4$, а при сглаживании — $D^3 \times S^3$. Следовательно

$$\chi(\tilde{X}) = \chi(M) + p \cdot \chi(S^2),$$
$$\chi(Y) = \chi(M) + p \cdot \chi(S^3).$$

Поэтому

$$\chi(\tilde{X}) = \chi(Y) + 2p.$$

С другой стороны,

$$\chi(Y) = 2 + 2\rho(Y) - 2b(Y),$$
$$\chi(\tilde{X}) = 2 + 2\rho(\tilde{X}) - 2b(\tilde{X}).$$

□

[2] Вместо этого можно было бы сравнить размерности версального пространства деформаций Y и X; также существуют объясняющие это соотношение соображения зеркальной симметрии (см. [78, 8]).

Предложение 1.5.35. *Если X — трёхмерное нодальное торическое многообразие, соответствующее многограннику с v вершинами, p гранями-параллелепипедами (обыкновенными двойными особенностями) и $f-p$ треугольными гранями (гладкими неподвижными точками), имеем $H^3(\tilde{X})=0$, $\rho(\tilde{X})=v-3$. Поэтому если Y — сглаживание X, то*

$$b(Y)=p+\rho(X)-(v-3)$$

Доказательство. Поскольку многообразие $\tilde{X}$ неособое, группа $\mathrm{Pic}(\tilde{X})$ совпадает с группой $Cl(\tilde{X})$. Поскольку разрешение особенностей $\tilde{X}\to X$ — малое, на $\tilde{X}$ и X одинаковые дивизоры Вейля, то есть $Cl(\tilde{X})=Cl(X)$. Поэтому $\rho(\tilde{X})=\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(\tilde{X})=\mathrm{rk}\,Cl(X)=v-3$ (1.4.27). Таким образом, утверждение 1.5.33 в данном случае эквивалентно написанному выше равенству. $\square$

1.6 Классификация многообразий Фано

Обзор классификации многообразий Фано можно найти, например в [48].

1.6.1 Поверхности дель Пеццо

Следующий результат хорошо известен.

Предложение 1.6.1. *Пусть S — поверхность дель Пеццо индекса r и степени $d=K_S^2$. Тогда:*

1. $1\leqslant d=10-\rho(S)\leqslant 9$,

2. $r\leqslant 3$,

3. Единственная поверхность дель Пеццо индекса 3 *— это проективная плоскость:* $r = 3 \iff S \simeq \mathbb{P}^2$*.*

4. Единственная поверхность дель Пеццо индекса 2 *— это квадрика:* $r = 2 \iff S \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*.*

5. Поверхности дель Пеццо индекса 1 *— это всевозможные раздутия плоскости* $\mathbb{P}^2$ *в* $(9-d)$ *точках в общем положении. Условие общности положения такое: никакие три точки не лежат на одной прямой, никакие шесть точек не лежат на одной конике, и никакие восемь точек не лежат на одной особой кубике с особенностью в одной из этих точек.*

6. Каноническая линейная система $|-K_S|$ *задаёт вложение поверхности* S *в* $\mathbb{P}^d \iff d > 2$*.*

Если раздуть на $\mathbb{P}^2$ какие-то $(9-d)$ точек в необщем положении (возможно бесконечно близкие), то получится неособая поверхность S. Если $d > 2$ и в линейной системе кубик, проходящих через раздуваемые точки, нет неподвижных компонент, то антиканоническая линейная система $|-K_S|$ будет задавать отображение S на поверхность дель Пеццо S_0 с дюваленскими особенностями (раздутие соответствующего пучка идеалов $\mathcal{I}$ на $\mathbb{P}^2$ с $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}) = (9-d)$).

Предложение 1.6.2 ([23], см. также [21])**.** *Все поверхности дель Пеццо степени* $d > 2$ *с дювалевскими особенностями получаются описанным выше способом.*

Рассмотрев относительный антиканонический образ раздутия $\mathbb{P}^2$ в универсальном пучке идеалов над схемой Гильберта $Hilb_{(9-d)}(\mathbb{P}^2)$ пучков идеалов $\mathcal{I}$ коразмерности $(9-d)$ (то есть пучков идеалов $\mathcal{I}$, для которых $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{I}$ — пучок с нульмерным носителем и $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/I) = 9-d$) получим

Следствие 1.6.3. *Поверхности дель Пеццо степени $d \geqslant 3$ с дювалевскими особенностями являются вырождениями гладких поверхностей дель Пеццо степени d.*

У антиканонической поверхности $\mathbb{F}_1$ нет нетривиальных вырождений в поверхности дель Пеццо с дювалевскими особенностями.

1.6.2 Трёхмерные гладкие многообразия Фано

Пусть X — трёхмерное гладкое многообразие Фано индекса r, антиканонической степени $\deg = (-K_X)^3$. Обозначим символом H фундаментальный дивизор, то есть дивизор Картье удовлетворяющий равенству $-K_X = rH$.

Первые серьёзные исследования трёхмерных многообразий Фано принадлежат самому Г. Фано (работы [24], [25], [26], [27]). Он изучал трёхмерные гладкие многообразия, линейные сечения которых являются каноническими кривыми (в частности, антиканонический дивизор на таких многообразиях очень обилен).

Напомним, что символом $\rho = \operatorname{rk}\operatorname{Pic}(Y)$ мы обозначаем число Пикара, символом $r = r(Y)$ — индекс многообразия Фано, символом $\deg = \deg(Y) = (-K_Y)^3$ — антиканоническую степень, символом $b = b(Y) = h^{1,2}(Y)$ — половина третьего числа Бетти, а инвариант $d = d(Y)$ определён в 1.3.12.

Определение 1.6.4. Набор чисел $\rho, r, \deg, b, d$ мы будем называть набором *основных инвариантов* трёхмерного гладкого многообразия Фано.

В. А. Исковских в работах [45], [46] классифицировал гладкие трёхмерные многообразия Фано Y основной серии (то есть, в случае $\rho = 1$). При этом для многообразий Фано со свободной линейной системой $\mathcal{O}(H)$ использовались (доказанные Шокуровым) предположения что на них лежит прямая и общее гиперплоское сечение гладкое.

Окончательная классификация гладких трёхмерных многообразий Фано была получена Мори и Мукаем в работах [67], [66], [68].

Обзор полной классификации см. в [47] и [48].

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 1.6.5. *Два гладких трёхмерных многообразия Фано Y_1, Y_2 имеющие одинаковый набор* основных инвариантов $\rho, r, \deg, b, d$ *лежат в одном деформационном классе. Всего деформационных классов сто пять* [3]. *Все они перечислены в работе [66], каждый из них непустой.*

Позже Мукай ([69],[70]) заново описал трёхмерные многообразия Фано основной серии, рассматривая векторные расслоения на поверхностях $K3$ получающихся антиканоническим сечением трёхмерного многообразия.

1.6.3 Торические многообразия Фано

Замечание 1.6.6. Существует естественное отождествление между следующими тремя классами объектов:

1. $S = X_\Sigma$ — торическая поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями,

[3] В начальной версии [66] семейство многообразий $V_{4.13}$ было пропущено, это было исправлено в 2003 году.

2. $S' = X_{\Sigma'}$ — гладкая торическая поверхность почти дель Пеццо,

3. Δ — целый выпуклый многоугольник с единственной целой точкой во внутренности.

Поверхность S соответствует минимальному вееру Σ, конусы которого это конусы над гранями Δ, а S' — вееру Σ', конусы которого это конусы над гранями невыпуклого многоугольника Δ', максимального возможного подразбиения Δ с той же выпуклой оболочкой. S' является крепантным разрешением S, а S получается из S' стягиванием (-2)-кривых.

Напомним (1.4.31,1.4.39), что многоугольники описанные в 1.6.6 рефлексивны, на описанных классах объектов определена двойственность (1.4.37), переводящая рефлексивный многоугольник в двойственный к нему. Если S — торическая поверхность дель Пеццо, соответствующая многоугольнику Δ, то поверхность дель Пеццо соответствующую двойственному многоугольнику $\Delta^\vee$ будем обозначать $S^\vee$.

Предложение 1.6.7. *Все торические поверхности дель Пеццо с дюваллевскими особенностями перечислены в следующей таблице. Всего их* 16.

обозначение	Δ	*описание*
$T_{3.1}$	$\Delta(x+y+x^{-1}y^{-1})$	$\mathbb{P}^2$, *минимальная*
$T_{4.1}$	$\Delta(x+y+x^{-1}+y^{-1})$	$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, *минимальная*
$T_{4.3}$	$\Delta(x(y+y^{-1})+x^{-1})$	*квадратичный конус*
$T_{4.2}$	$\Delta(x+y+xy+x^{-1}y^{-1})$	$\mathbb{F}_1$
$T_{5.1}$	$\Delta(x+y+x^{-1}+y^{-1}+x^{-1}y^{-1})$	*гладкая поверхность степени* 7

$T_{5.2}$	$\Delta(x^{-1}(y^{-1}+y)+y^{-1}+x)$	
$T_{6.1}$	$\Delta(x+x^{-1}(y+y^{-2}))$	
$T_{6.2}$	$\Delta(xy+xy^{-1}+yx^{-1}+x^{-1})$	
$T_{6.3}$	$\Delta((1+y)(x+x^{-1})+y^{-1})$	
$T_{6.4}$	$\Delta((1+x)(1+y)(1+x^{-1}y^{-1}))$	*гладкая поверхность степени* 6
$T_{7.1}$	$\Delta(x^{-1}y+x(y+y^{-2})+y^{-1})$	
$T_{7.2}$	$\Delta(xy+xy^{-1}+yx^{-1}+x^{-1}+y^{-1})$	
$T_{8.1}$	$\Delta(y(x^{-2}+x^2)+y^{-1})$	*максимальная*
$T_{8.2}$	$\Delta((x^{-2}+1)y+(y^{-2}+1)x)$	
$T_{8.3}$	$\Delta((x+x^{-1})(y+y^{-1}))$	*максимальная*
$T_{9.1}$	$\Delta(x^2y^{-1}+x^{-1}y^2+x^{-1}y^{-1})$	*максимальная*

Замечание 1.6.8. В обозначении $T_{k.n}$ число k равно $\rho(T_{k.n})+2 = 12-\deg(T_{k.n})$ (количество целых точек на границе многоугольника), а n — просто номер среди поверхностей с данным числом k.

Доказательство. По двумерной программе минимальных моделей, минимальной (торической гладкой почти дель Пеццо) поверхностью может быть одна из трёх поверхностей: $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ или $\mathbb{F}_2$ (когда мы стягиваем (-1)-кривую на почти дель Пеццо, стянутая поверхность получается тоже поверхностью почти дель Пеццо, $\mathbb{F}_n$ при $n\geqslant 3$ поверхностью почти дель Пеццо не является).

Пусть Δ — многоугольник соответствующий S. Тогда $S'_{\Delta^\vee}$ стягивается на S'_{Δ_0}, где Δ_0 — один из трёх минимальных. Значит, $S'_{\Delta_0^\vee}$ стягивается на

S'_Δ, то есть Δ получается из $\Delta_0^\vee$ выбрасыванием части вершин. Перебирая случаи, получим указанный выше ответ (иногда при стягивании получится не буквально тот же многоугольник, но $GL(2,\mathbb{Z})$-эквивалентный).

$\square$

Предложение 1.6.9. *Пусть S — гладкая поверхность дель Пеццо степени $d \geqslant 3$, а S_0 — торическая поверхность дель Пеццо степени d с дювалевскими особенностями. Тогда S_0 является вырождением S.*

Доказательство. Это является следствием общего результата 1.6.3. $\square$

Для описания всех рефлексивных многогранников (то есть горенштейновых торических многообразий Фано) в любой фиксированной размерности есть эффективный алгоритм ([59]). Их количество растёт достаточно быстро: 16 многоугольников (1.6.7), 4319 многогранников в трёхмерном пространстве ([59]), 473800776 четырёхмерных многогранников.

Нас будет интересовать случай нодальных трёхмерных торических многообразий Фано. Для получения полного списка таких многообразий мы использовали программный пакет PALP ([61, 59]). Всего таких многообразий 100, из них 18 гладкие. В негладком случае число Пикара не превосходит 4. Все эти многообразия перечислены в таблице раздела 3.4.

Трёхмерные торические нодальные многообразия явно описаны ([73]). Имеются даже более общие классификации всех терминальных трёхмерных торических многообразий Фано ([51]) и всех горенштейновых трёхмерных торических многообразий Фано ([59]).

В местах где это не обременительно (всюду, кроме раздела 3.7), можно использовать обозначения работы [73], в которой все многообразия из этого класса описаны вручную и указаны основные геометрические характеристики этих многообразий (число орбит тора каждой размерности, число особых точек и число Пикара). Символом $W_{a.b}$ в дальнейшем мы будем обозначать нодальное трёхмерное торическое многообразие Фано, имеющее номер $a.b$ в [73] (число a — это количество вершин у соответствующего многогранника).

1.7 Теория Громова–Виттена

Изначально инварианты Громова–Виттена появились в симплектической геометрии, и для их вычисления использовалась техника подсчёта псевдоголоморфных кривых относительно экзотической псевдокомплексной структуры, совместной с симплектической формой. В этой работе мы будем придерживаться алгебро-геометрического подхода, в котором все эти инварианты явно строятся с помощью соответствия Громова–Виттена на пространстве модулей, и основные технические инструменты — это выбор подходящей компактификации и виртуального фундаментального класса у этих пространств. [4]

Систематический обзор этой теории и ссылки на основные работы есть в монографии [63].

Нам потребуются инварианты Громова–Виттена (с потомками) *рода ноль* и кольцо *малых* квантовых когомологий. Нигде далее (после этого предложения) инвариантов Громова–Виттена рода больше 0 или полного кольца квантовых когомологий не будет.

[4] В частности, формально вообще нигде симплектической формы не появится. Но неявно она появляется в определениях „относительно дивизора H с параметром t_0": когомологический класс дивизора H это когомологический класс симплектической формы, а t_0 соответствует B-полю.

В этом разделе лишь будут упомянуты основные нужные определения, сформулированы теоремы и предъявлены необходимые далее примеры.

1.7.1 Определения

Обозначения. Пусть X — гладкое алгебраическое многообразие с $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$.

Определим кольца коэффициентов $A = A_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[\overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}], \Lambda_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[N_1(X)], \Lambda = \Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes \mathbb{C}$. Пусть $T = \mathrm{Spec}\ \Lambda$.

Элементу $\beta \in \overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}$ соответствует моном $t^\beta \in A$. Пусть $D_1, \ldots, D_k$ — базис $\mathrm{Pic}(X)/tors$, тогда в явном виде $t^\beta = t_1^{(D_1\cdot\beta)} \cdot \ldots \cdot t_k^{(D_k\cdot\beta)}$. Если H — дивизор Картье на X, то символом ϕ_H обозначается морфизм колец $\phi_H : \Lambda \to \mathbb{C}[t, t^{-1}], t_i \mapsto t^{(\beta_i \cdot H)}$, а соответствующий морфизм торов (и его образ T_H) мы называем подтором, соответствующим дивизору H. Аналогичным образом, если задана точка $t_0 \in T$ определим ϕ_{H,t_0} как композицию ϕ_H и умножения на t_0 на торе T.

Пространство $\overline{M}_n(X, \beta)$ модулей стабильных отображений кривых параметризует (удовлетворяющие условию стабильности) наборы

$$[\mu : C \to X; p_1, \ldots, p_n \in C],$$

где C — связная приведённая нодальная кривая арифметического рода 0, p_i — различные неособые точки C, а μ — такое алгебраическое отображение кривой C в объемлющее пространство X, что образ фундаментального класса $[C]$ гомологичен β.

Если X — выпуклое многообразие (1.3.4) и $n \geqslant 3$, то пространство

$\overline{M}_n(X,\beta)$ является проективной схемой чистой ожидаемой размерности

$$d_M = \dim X + n - 3 - K_X \cdot \beta, \tag{1.7.1}$$

а её особенности это только факторособенности. В общем случае это не так, и для определения соответствия Громова–Виттена используется виртуальный фундаментальный гомологический класс $[\overline{M}_n(X,\beta)] \in H^{2d_M}(\overline{M}_n(X,\beta),\mathbb{Q})$ размерности d_M построенный в [13].

Пространство $\overline{M}_n(X,\beta)$ снабжено n отображениями вычисления $ev_i : \overline{M}_n(X,\beta) \to X$ и линейными тавтологическими расслоениями $\mathcal{L}_i$. Отображение ev_i переводит набор $[\mu : C \to X; p_1,\ldots,p_n \in C]$ в образ i-ой отмеченной точки: $ev_i([\mu : C \to X; p_1,\ldots,p_n]) = \mu(p_i) \in X$. Слой $\mathcal{L}_i$ над $[\mu : C \to X; p_1,\ldots,p_n \in C]$ — это $T^*_{p_i}C$. Класс Чженя $\psi_i = c_1(L_i) \in H^2(\overline{M}_n(X,\beta),\mathbb{Q})$ называется i-ым тавтологическим классом.

Набору когомологических классов $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in H^{\bullet}(X,\mathbb{Z})$ и целых неотрицательных чисел $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяющих условию

$$\sum_i (\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \gamma_i + 2k_i) = 2d_M$$

соответствует *n-точечный инвариант Громова–Виттена с потомками*

$$I_\beta(\tau_{k_1}(\gamma_1)\tau_{k_2}(\gamma_2)\ldots\tau_{k_n}(\gamma_n)) = \int_{[\overline{M}_n(X,\beta)]} \psi_1^{k_1} \cup ev_1^*(\gamma_1) \cup \ldots \cup \psi_n^{k_n} \cup ev_n^*(\gamma_n).$$

Этот инвариант не зависит от комплексной структуры X — для гладких деформаций X_t и для X получается одно число (при отождествлении когомологий X и когомологий близких X_t). Инварианты вида $I_\beta(\tau_{k_1}(\gamma_1)\tau_{k_2}(\gamma_2)\ldots\tau_{k_n}(\gamma_n))$, где $\sum_i(\operatorname{codim}\gamma_i + 2k_i) \neq 2d_M$ формально положим равными 0.

Инварианты $I_\beta(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n) = I_\beta(\tau_0(\gamma_1)\tau_0(\gamma_2)\ldots\tau_0(\gamma_n))$ называются *примарными.*

Если $Z_i \subset X$ — алгебраические подмногообразия (коразмерности больше 1) в общем положении, и $\gamma_i \in H^{2\operatorname{codim}_X Z_i}(X,\mathbb{Z})$ — соответствующие им когомологические классы, то примарный инвариант $I_\beta(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n)$ равен (ожидаемому) числу рациональных неприводимых кривых класса β на многообразии X, пересекающих многообразия Z_i.

Есть два способа упаковать всю совокупность инвариантов Громова–Виттена многообразия X в один объект — коммутативное кольцо квантовых когомологий $QH(X)$ и функция (степенной ряд) I^X.

Определение 1.7.2 ([33]). *$\mathcal{I}$-ряд* для многообразия X и класса $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$ — это следующий производящий ряд для всех одноточечных инвариантов Громова–Виттена рода 0 с потомками:

$$\mathcal{I}_\beta^X = ev_{1*}(\frac{1}{1-\psi_1}[\overline{M}_1(X,\beta)]) \in H^\bullet(X,\mathbb{Q})$$

Если γ_i — однородный базис $H^\bullet(X,\mathbb{Q})$, а $\gamma_i^\vee$ — двойственный базис, то $\mathcal{I}_\beta^X = \sum_{i\geqslant 0,j} I_\beta(\tau_i(\gamma_j))\gamma_j^\vee$; из соображений размерности, для каждого j существует не более одного i для которого $I_\beta(\tau_i(\gamma_j)) \neq 0$.

Ограниченный (с X) $\mathcal{I}$-ряд для подмногообразия $i : Y \subset X$ и класса $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$ это ряд

$$\mathcal{I}_\beta^{X\to Y} = \sum_{\beta_Y\in H_2(Y,\mathbb{Z})|i_*\beta_Y=\beta} i_*ev_{1*}\left(\frac{1}{1-\psi_1}[\overline{M}_1(Y,\beta_Y)]\right),$$

Производящий ряд для всех $\mathcal{I}$-рядов $\mathcal{I}_\beta^X$ по всем классам $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$ мы будем называть просто $\mathcal{I}$-рядом многообразия X:

$$\mathcal{I}^X = \sum_{\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})} \mathcal{I}_\beta^X t^\beta \in H^\bullet(X,A)$$

Аналогично, $\mathcal{I}$-ряд ограниченный (с X) для подмногообразия Y это

$$\mathcal{I}^{X\to Y} = \sum_{\beta \in H^2(X,\mathbb{Z})} I_\beta^{X\to Y} t^\beta \in H^\bullet(X, A).$$

Нас будут интересовать ограничения этой функции на орбиты $\phi_{H,t_0}(\mathbb{C}^*)$ одномерных подторов.

Если H — дивизор на X, а $t_0 \in T$ — точка тора T, $\mathcal{I}$-рядом относительно H с параметром t_0 мы будем называть ограничение функции $\mathcal{I}^X$ на одномерный подтор $t_0 T_H$:

$$\mathcal{I}_{H,t_0}^X(t) = \phi_{H,t_0}^* \mathcal{I}^X(t)$$

Аналогично

$$\mathcal{I}_{H,t_0}^{X\to Y}(t) = \phi_{H,t_0}^* \mathcal{I}^{X\to Y}(t) = \sum_\beta \mathcal{I}^{X\to Y} t_0^\beta t^{(\beta\cdot H)}$$

Если отображение $i_* H_2(Y,\mathbb{Z}) \to H_2(X,\mathbb{Z})$ сюръективно (например, по теореме Лефшеца), то ограниченный относительный $\mathcal{I}$-ряд $\mathcal{I}_{H,t_0}^{X\to Y} \in H^\bullet(X,\mathbb{Q})[t,t^{-1}]$ равен прямому образу (i_*) от $\mathcal{I}^Y_{H|_Y, t_0|_Y} \in H^\bullet(Y,\mathbb{Q})[t,t^{-1}]$.

Если параметр t_0 не указан, он предполагается равным 1.

Наконец, если X — многообразие Фано, то его $\mathcal{I}$-рядом мы будем называть $\mathcal{I}^X_{-K_X,1}$-ряд относительно антиканонического класса.

Для каждого из определённых выше рядов, его ортогональную проекцию на $H^0(X,A)$ мы будем называть фундаментальным членом соответствующего $\mathcal{I}$-ряда (и обозначать так же, заменяя букву $\mathcal{I}$ на обычную I). Например,

$$I^X = \int_{[X]} \mathcal{I}^X,$$
$$I^{X\to Y} = \int_{[X]} \mathcal{I}^{X\to Y}.$$

Теорема 1.7.3 (Квантовая теорема Лефшеца. [33]). *Предположим, что Y — гиперплоское сечение X, Если $-K_Y \cdot \beta \geqslant 2$ для всех $\beta \in \overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}$, то верна формула*

$$\mathcal{I}_{\beta}^{X\to Y} = \mathcal{I}_{\beta}^{X} \cdot \prod_{i=0}^{Y\cdot\beta}(Y+i).$$

Соответственно, для $\mathcal{I}$-ряда целиком относительно (Y, t_0) верна формула

$$\mathcal{I}_{Y,1}^{X\to Y} = \sum_{\beta} \mathcal{I}_{\beta}^{X} t^{(Y\cdot\beta)} \prod_{i=0}^{Y\cdot\beta}(Y+i) \tag{1.7.4}$$

В общем случае, если $-K_Y$ численно эффективен, существуют явно вычислимые функции $P_0, P_1 \in \mathbb{C}[[t]]$, для которых верна формула

$$P_0 \sum_{\beta} \mathcal{I}_{\beta}^{X\to Y} \tilde{t}^{(Y\cdot\beta)} = \sum_{\beta} \mathcal{I}_{\beta}^{X} t^{(Y\cdot\beta)} \prod_{i=0}^{Y\cdot\beta}(Y+i),$$

где $\tilde{t} = e^{\frac{P_1}{P_0}} t$. То есть, формула 1.7.4 верна с точностью до линейной замены переменной $logt \to logt + \frac{P_1}{P_0}$ и константы P_0.

Определение 1.7.5. *Кольцом (малых) квантовых когомологий $QH(X)$* называется свободный A-модуль $QH(X) = H^{\bullet}(X, A)$ со следующим образом заданным $\star$-умножением:

$$\int_{[X]} (\gamma_1 \star \gamma_2) \cup \gamma_3 = \sum_{\beta\in\overline{NE}(X)_{\mathbb{Z}}} I_{\beta}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) t^{\beta},$$

Если кольцо R обладает структурой A-модуля, то определим кольцо малых квантовых когомологий с коэффициентами в R как $QH(X, R) = QH(X) \otimes_A R$.

(Супер)коммутативность этого кольца видна из определения, элемент 1 является в нём единицей. В контексте классической исчислительной геометрии неочевидна ассоциативность $\star$-умножения. Однако она имеет место, и, используя ассоциативность, можно рекурсивно выразить инварианты большей степени через несколько инвариантов меньшей.

Кольцом квантовых когомологий проективного (вложенного линейной системой $|H|$ соответствующей очень обильному дивизору H) многообразия $X \subset \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}(H))^*)$ (с параметром $t_0 \in T$) будем называть кольцо $QH_{H,t_0}(X)$, получающееся заменой базы ϕ_{H,t_0}.

Специализация кольца $QH(X)$ при $t = 0$ (в единственной T-неподвижной точке пространства Spec A) изоморфна кольцу когомологий многообразия X, поскольку $\overline{M_3}(X, 0) = X, I_0(\gamma, \gamma, \gamma) = \int_{[X]} \gamma \cup \gamma \cup \gamma$.

Определение 1.7.6 ([38])**.** (Приведённым) спектром многообразия (относительно дивизора H и параметра t_0) мы будем называть схему (подмножество в $\mathbb{C}^*$) нулей характеристического многочлена оператора $\star H$: $QH_{H,t_0}(X) \to QH_{H,t_0}(X)$. Спектром многообразия Фано мы называем его приведённый спектр относительно антиканонического класса дивизора с параметром 1.

Замечание 1.7.7. Если рассмотреть аналогичный оператор в обычных когомологиях, то получится 0, т.к. $H^{>0}(X, \mathbb{Q})$ — максимальный нильпотентный идеал.

Определение 1.7.8 ([75])**.** Многообразие X называется квантово минимальным относительно обильного дивизора H и параметра t_0, если подкольцо в $QH_{H,t_0}(X)$ порождённое элементом H это $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$-модуль ранга $(\dim(X) + 1)$. Многообразие Фано X называется *квантово минимальным* если оно квантово минимально относительно антиканонического класса $-K_X$ с параметром 1.

Обозначим через HQ — тривиальное расслоение со слоем $H^{ev}(X, \mathbb{C})$ над T.

Если $H = \sum a_i D_i$ ($\{D_i\}$ — базис $\mathrm{Pic}(X)/tors$), пусть $D_H = \sum a_i t_i \frac{d}{dt_i}$ — соответствующее инвариантное векторное поле на торе T. Рассмотрим плоскую связность ∇ на HQ, определенную на постоянных сечениях σ следующим образом

$$\nabla_{D_H}(\sigma) = H \star \sigma.$$

Ограничимся на подтор $t_0 T_H$. Пусть $D = t\frac{\partial}{\partial t} \in \mathcal{D} = \mathbb{C}[t, t^{-1}, \frac{d}{dt}]$.

Связность ∇ задает на $H^0(t_0 T_H, HQ)$ структуру $\mathcal{D}$-модуля:

$$D\left(\sum_i f_i(t)\sigma_i\right) = \sum_i t\frac{\partial f_i(t)}{\partial t}\sigma_i - H \star \left(\sum_{i=0}^{N} f_i(t)\sigma_i\right).$$

$\mathbb{C}$-линейный оператор $D_H : H^0(T, HQ) \to H^0(T, HQ)$ называется *квантовым оператором.*

Определение 1.7.9 ([37]). *Квантовый дифференциальный оператор* L_{X,H,t_0} определяется как

$$L_{X,H,t_0} = \det_{\mathrm{right}}(D_H) \in \mathcal{D}.$$

Выберем образующую циклического $\mathcal{D}$-модуля $\mathcal{D}/L$ в виде $L = \sum_{i \geqslant 0} t^i P_i(D)$, где $P_i(D)$ — многочлены от D, и $P_0(D) \neq 0$. Тогда *регуляризацией* L^{reg} называется оператор $\sum_i (Dt)^i P_i(D) = \sum t^i P_i(D)(D+1)\ldots(D+i)$.

Если $I = \sum a_k t^k$ было решением L, то *регуляризация*

$$I^{reg} = \sum a_k \cdot k! t^k$$

будет решением L^{reg}.

Регуляризация L^{reg}_{X,H,t_0} квантового дифференциального оператора L_{X,H,t_0} называется *регуляризованным квантовым дифференциальным оператором* для (X, H, t_0).

Предложение 1.7.10 ([35]). *1. Фундаментальный член I^X_{H,t_0}-ряда — это голоморфное решение квантового дифференциального уравнения $L_{X,H,t_0} I^X_{H,t_0} = 0$.*

2. Регуляризованный фундаментальный член I-ряда, естественно, является решением регуляризованного квантового дифференциального уравнения.

Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа утверждает, что регуляризованный квантовый дифференциальный оператор совпадает с оператором Пикара–Фукса для зеркально двойственной модели Ландау–Гинзбурга.

В частности, регуляризованный фундаментальный член I-ряда является периодом зеркально двойственной модели Ландау–Гинзбурга.

Мы будем интересоваться очень явными зеркально двойственными моделями Ландау–Гинзбурга, заданными многочленами Лорана $f : \mathbb{T} \to \mathbb{A}^1$. Пусть $n = \dim \mathbb{T}$, а $x_1, \ldots, x_n$ — координаты на торе $\mathbb{T}$.

Определение 1.7.11. Обозначим через $\phi_f(i)$ свободный член (то есть коэффициент при 1) многочлена f^i. Положим

$$\omega = \prod_{k=1}^{n} \frac{dx_k}{(2\pi i)x_k}$$

$$\Phi_f = \sum_{i\geqslant 0} \phi_f(i)\cdot t^i = \int_{S^1\times\ldots\times S^1} \frac{1}{1-tf(x)}\cdot\omega$$

$$\Phi_f^{nr} = \sum_{i\geqslant 0} \phi_f(i)\cdot \frac{t^i}{i!} = \int_{S^1\times\ldots\times S^1} e^{tf(x)}\cdot\omega$$

Ряд Φ_f называется (регуляризованным) *рядом свободных членов* многочлена f, а ряд Φ_f^{nr} — нерегуляризованным рядом свободных членов.

Заметим, что Φ_f является регуляризацией в смысле 1.7.9.

Далее у нас будут рассматриваться два тора: $T = \mathrm{Pic}(X)\otimes\mathbb{C}^*$ — тор двойственный к группе $N_1(X)$, и $\dim X$-мерный тор $\mathbb{T}$.

Φ_f является периодом, то есть интегралом от некоторой послойной относительно $f : \mathbb{T}\to\mathbb{A}^1$ формы объёма; в явном виде эта форма равна вычету $Res_{f=t^{-1}}(\frac{1}{1-tf(x)}\omega)$.

Теорема 1.7.12 ([82], см. также [34])**.** *Ряд свободных членов Φ_f является решением уравнения Пикара–Фукса для заданного отображением $f^{-1} : \mathbb{T}\to\mathbb{A}^1$ пучка гиперповерхностей в торе $\mathbb{T}$.*

Определение 1.7.13 ([74])**.** Пусть X — гладкое многообразие Фано, $t_0\in T$ — точка тора T, H — очень обильный дивизор, а $I_H^X(t)$ — фундаментальный член I-ряда X относительно H. Многочлен Лорана f называется *очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для (X, H, t_0), если выполнено одно из двух эквивалентных условий

$$\Phi_f^{nr}(t) = I_{H,t_0}^X(t)$$

$$\Phi_f(t) = I_{H,t_0}^{X,reg}(t)$$

Очень слабая модель Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано X с параметром t_0 — это очень слабая модель Ландау–Гинзбурга для тройки $(X, -K_X, t_0)$. Если параметр t_0 не указан, он равен 1.

Многочлен Лорана $f \in \mathbb{C}[\mathbb{T}]$ называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга* для многообразия Фано X, если он является очень слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X и почти все слои отображения $f : \mathbb{T} \to \mathbb{A}^1$ бирационально эквивалентны $(\dim X - 1)$-мерным многообразиям Калаби–Яу.

Многочлен Лорана f считается слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X с точностью до перенормировки, если для некоторых констант α, β многочлен $\beta f + \alpha$ является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для X.

1.7.2 Примеры

Теорема 1.7.14 ([36]). *Пусть X — неособое торическое многообразие почти Фано, $D_1, ..., D_k$ — все неприводимые инвариантные дивизоры, $Y_1, \ldots, Y_l$ — численно эффективные дивизоры на X, $Y = \cap Y_i$ — гладкое полное пересечение в X с численно эффективным антиканоническим классом $-K_Y$ (например, Y — многообразие почти Фано или Калаби–Яу). Пусть индекс Y не равен 1 или $K_Y = 0$.*

Тогда фундаментальный член I-ряда

$$I^{X \to Y} = \sum_\beta t^\beta \frac{\prod (Y_i \cdot \beta)!}{\prod (D_j \cdot \beta)!},$$

где суммирование ведётся только по тем классам эффективных 1-циклов β для которых указанные под факториалами целые числа неотрицательны.

Если Y произвольное, то I^Y отличается от $\sum_\beta t^\beta \frac{\prod(Y_i\cdot\beta)!}{\prod(D_j\cdot\beta)!}$ заменой координат аналогичной 1.7.3. В частности, $I^{X\to Y}_{-K_X,t_0} = e^{\alpha t}\sum_\beta t^{(-K_Y\cdot\beta)}t_0^\beta \frac{\prod(Y_i\cdot\beta)!}{\prod(D_j\cdot\beta)!}$, где α — число.

Предложение 1.7.15. *В предположениях теоремы 1.7.14, обозначим символом ρ_j образующую луча соответствующего дивизору D_j. Рассмотрим многочлен Лорана*

$$f_u = \alpha + \sum_{j=1}^{k} u_j x^{\rho_j}$$

Из 1.4.40 получаем морфизм $\prod_{\rho\in\Sigma^{(1)}}\mathbb{C}^* \to T$. Пусть t_0 — образ точки $(u_\rho)_{\rho\in\Sigma^{(1)}} \in \prod_{\rho\in\Sigma^{(1)}}\mathbb{C}^*$, так что $t_0^\beta = \prod u_j^{(D_j\cdot\beta)}$.

Тогда выполняются равенства

$$I^X_{-K_X,t_0} = \Phi^{nr}_{f_u}(t),$$

$$I^{X,reg}_{-K_X,t_0} = \Phi_{f_u}(t).$$

Другими словами, многочлен Лорана f_u является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия X с параметром t_0 с точностью до перенормировки.

Доказательство. Во-первых, $\Phi^{nr}_{f+\alpha}(t) = e^{\alpha t}\Phi^{nr}_f(t)$, поэтому утверждение сводится к случаю $\alpha = 0$. Воспользуемся описанием 1.4.41 1-циклов на торическом многообразии. Элементы β соответствуют линейным соотношениям $\sum \beta_j\rho_j = 0$ между векторами ρ_j. Вклад не численно эффективных 1-циклов в фундаментальный член I-ряда равен 0. Для численно эффективного цикла коэффициент $\frac{((\sum D_j)\cdot\beta)!}{\prod(D_j\cdot\beta)!} = \frac{(\sum\beta_j)!}{\prod\beta_j!}$ при t^β в I^X равен вкладу в коэффициент при 1 от произведений мономов вида $\prod(x^{\rho_j})^{\beta_j}$ (в произведении $(\sum u_j x^{\rho_j})\cdot\ldots\cdot(\sum u_j x^{\rho_j})$ выбрать в каждом множителе по одному моному x^ρ, чтобы всего для каждого j было выбрано β_j мономов x^{ρ_j} можно именно $\frac{(\sum \beta_j)!}{\prod \beta_j!}$ способами). А коэффициент $\prod u_j^{\beta_j}$ в точности равен t_0^β по определению t_0.

□

Теорема 1.7.16 ([7]). *Фундаментальный член I-ряда для $G = G(2,n)$ (относительно обильной образующей группы Пикара $\mathcal{O}(H) = \mathcal{O}(1)$) равен*

$$I_H^G = \sum_{d \geqslant 0} \frac{t^d}{(d!)^2} \sum_{d \geqslant j_{n-3} \geqslant \ldots \geqslant j_1 \geqslant j_0 = 0} \frac{1}{(d-j_{n-3})! \prod_{i=2}^{n-2} \left((d-j_{i-1})!(j_{i-1}-j_{i-2})! j_{i-1}!\right)},$$

Это следствие гипотезы Хори–Вафы ([43]), описывающей полный I-ряд грассманиана $G(r,n)$, и (в случае $r = 2$) комбинаторного тождества между итерированной биномиальной суммой и однократной (формулы Бейли). Два доказательства гипотезы Хори–Вафы изложены в [7], и там же доказывается справедливость предыдущей формулы для фундаментального члена I-ряда.

Замечание 1.7.17. В [36] и [7] доказано больше — найден весь I-ряд, а не только фундаментальный член.

Теорема 1.7.14 даёт явные формулы для (фундаментальных членов) I-рядов торических поверхностей $\mathbb{P}^2 = T_{3.1}$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = T_{4.1}$, $\mathbb{F}_1 = T_{4.2}$, а также $S_7 = T_{5.1}$ и $S_6 = T_{6.4}$. и поверхностей являющихся полными пересечениями в проективных пространствах — S_4 (пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^4$) и S_3 (кубика в $\mathbb{P}^3$), то есть всех поверхностей дель Пеццо степеней $d = 9, 8, 7, 6, 4, 3$. Поверхность дель Пеццо степени 2 это гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1,1,1,2)$, а поверхность дель Пеццо степени 1 это гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1,1,2,3)$; их I-ряды можно вычислить с помощью теоремы 1.7.14 на разрешениях объемлющих торических пространств (гладкие гиперповерхности не проходят через особенности, см. также [76]).

Поверхности дель Пеццо S_5 степени 5 получаются как сечения грассманиана $G(2,5)$ подпространствами коразмерности 4 (в плюккеровом вложении).

Таким образом, фундаментальный член I-ряда для S_5 относительно H с точностью до перенормировки получается применением квантовой формулы Лефшеца (1.7.3) к фундаментальному члену I-ряда $G(2,5)$ (1.7.16):

$$I_H^{S_5,reg}(t) = e^{\alpha t} \sum_{d\geqslant 0} t^d (d!)^5 I_H^{G(2,5)}[d],$$

где $I_H^{G(2,5)}[d]$ — коэффициент $I_H^{G(2,5)}$ при мономе t^d.

Выпишем явные формулы для фундаментальных членов I-рядов поверхностей дель Пеццо (с точностью до перенормировки).

$$I^{\mathbb{P}^2,reg}_{-K} = \sum \frac{(3n)!}{n!^3} t^{3n} \tag{1.7.18}$$

$$I^{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1,reg}_{-K} = \sum \frac{(2n)!^2}{n!^4} t^{2n} \tag{1.7.19}$$

$$I^{\mathbb{F}_1,reg}_{-K,t_0(u,v)} = \Phi_{x+y+\frac{v}{u}xy+ux^{-1}y^{-1}}(t) = \sum_{n,m\geqslant 0} \frac{(3n+2m)!}{(n+m)!m!n!^2} u^n v^m t^{3n+2m} \tag{1.7.20}$$

$$I^{S_7,reg}_{-K,t_0(u_1,u_2,v)} = \Phi_{x^{-1}+y^{-1}+u_1x+u_2y+vxy}(t) = \sum_{a,b,c\geqslant 0} \frac{(3c+2a+2b)!}{a!b!c!(a+c)!(b+c)!} u_1^a u_2^b v^c t^{3c+2a+2b} \tag{1.7.21}$$

$$I^{S_6,reg}_{-K} = \sum_{a,b,c\geqslant 0} \frac{(a+b+c)!^2}{(a!b!c!)^2} t^{a+b+c} = \sum_n t^n \sum_{k=0}^n \frac{n!^2 2k!}{(n-k)!^2 k!^4} \tag{1.7.22}$$

$$I^{S_4,reg}_{-K} = \sum \frac{(2n)!^2}{n!^4} t^n \tag{1.7.23}$$

$$I^{S_3,reg}_{-K} = \sum \frac{(3n)!}{n!^3} t^n \tag{1.7.24}$$

$$I^{S_2,reg}_{-K} = \sum \frac{(4n)!}{(2n)!n!^2} t^n \tag{1.7.25}$$

$$I^{S_1,reg}_{-K} = \sum \frac{(6n)!}{(3n)!(2n)!n!} t^n \tag{1.7.26}$$

$$\begin{aligned} I^{S_5,reg}_{-K} &= \sum_{a,b,c\geqslant 0} \frac{(a+b+c)!^3}{a!^2 b! c!^2 (a+b)!(b+c)!} t^{a+b+c} = \\ &= \sum_{n\geqslant 0} t^n \sum_{k=0}^n \frac{n!(n+k)!}{k!^3 (n-k)!^2} = \\ &= 1 + 3t + 19t^2 + 147t^3 + 1251t^4 + 11253t^5 + \ldots \end{aligned} \tag{1.7.27}$$

Замечание 1.7.28. Эти ответы согласуются с полученными другими методами: с явными вычислениями Краудера–Миранды в терминах линейных систем ([17]), с вычислениями Гётше–Пандхарипанде (см. [41], вкратце — они показали, что трёхточечные инварианты Громова–Виттена на раздутии поверхности дель Пеццо S восстанавливаются из инвариантов Громова–Виттена S с помощью уравнений ассоциативности, и явно восстановили), с предсказаниями Концевича–Манина об их свойствах ([58]).

1.8 Многообразия Грассмана и их спектры

Покажем, что собственные числа оператора квантового умножения на класс Шуберта являются значениями соответствующей этому классу симметрической функции на наборах корней из единицы.

Пусть $G = G(l, N)$. Через S обозначим тавтологическое подрасслоение на G. Обозначим через Ω_λ класс Шуберта в $H^\bullet(G, \mathbb{Z})$, соответствующий разбиению λ. Группа Пикара у многообразий Грассмана изоморфна $\mathbb{Z}$, трехточечный инвариант Громова–Виттена $I_d(\Omega_\lambda, \Omega_\mu, \Omega_\nu)$ считает кривые степени d, а кольцо коэффициентов A изоморфно $\mathbb{Q}[t]$.

Пусть ζ — первообразный корень степени N из $(-1)^{l+1}$.

Положим $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $k = N - l$. Пусть $\mathcal{U}$ — (градуированное) кольцо симметрических функций.

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots].$$

Здесь e_i есть i–ая элементарная симметрическая функция. Пусть h_i — i–ая полная симметрическая функция. Полагая $E(t) = \sum e_i t^i$, $H(t) = \sum h_i t^i$, имеем $E(-t)H(t) = 1$. Результат применения симметрической функции σ к набору аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots$ будем обозначать $\sigma(x_1, \dots, x_n)$.

Положим еще $\mathcal{U}' = \mathcal{U}/(e_{l+1}, e_{l+2}, \dots)$, $\mathcal{U}_\mathbb{Q} = \mathcal{U} \otimes \mathbb{Q}; \mathcal{U}'_\mathbb{Q} = \mathcal{U}' \otimes \mathbb{Q}$. Наконец, пусть $\mathcal{U}'_K = \mathcal{U}'_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} K$

Теорема 1.8.1 ([81]). *Определим гомоморфизм колец* $ST : \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}[t] \longrightarrow QH(G)$ *так:*

$$ST(t) = t,$$

$$ST(e_i) = c_i(S^*).$$

Тогда ST *— эпиморфизм, и*

$$Ker\ ST = (e_{l+1}, e_{l+2}, \ldots ; h_{N-l+1}, \ldots , h_{N-1}, h_N + (-1)^l t).$$

Образ при ST от функции Шура S_λ соответствующей разбиению λ равен Ω_λ.

Через $QH(G, \mathbb{Q}, 1)$ мы обозначаем специализацию кольца $QH(G)$ при $t = 1$. Положим $I_1 = (h_{N-l+1}, \ldots , h_{N-1}, h_N + (-1)^l) \subset \mathcal{U}'_{\mathbb{Q}}$, тогда разумеется $QH(G, \mathbb{Q}, 1) = \mathcal{U}'_{\mathbb{Q}}/I_1$. Аналогично определим K-алгебру $QH(G, K, 1) = QH(G, \mathbb{Q}, 1) \otimes_{\mathbb{Q}} K$ и идеал $I_1^K = I_1 \otimes_{\mathbb{Q}} K$.

Обозначим через $\theta_1, \ldots , \theta_N$ различные корни из 1 степени N (все они являются некоторыми степенями ζ, а потому лежат в K).

Пусть $J = j_1 j_2 \ldots j_l$ — мультииндекс, нумерующий l–ки различных корней степени N из 1 , так что $j_1 < \cdots < j_l, j_k \in \{1, \ldots , N\}$. Мы будем писать $\theta_J = \{\theta_{j_1}, \ldots , \theta_{j_l}\}$ и $\sigma(\zeta\theta_J) = \sigma(\zeta\theta_{j_1}, \ldots , \zeta\theta_{j_l})$. Положим $\theta_{\bar{J}} = \{\theta_1, \ldots , \theta_N\} \setminus \{\theta_{j_1}, \ldots , \theta_{j_l}\}$. Пусть $\phi_J : \mathcal{U}'_K \longrightarrow K$ — гомоморфизм, определенный условием $\phi_J(\sigma) = \sigma(\zeta\theta_J)$.

Обозначим Ker ϕ_J через I_J.

Положим $\phi = \bigoplus \phi_J$.

Лемма 1.8.2. *Если* $J \neq J'$, *то* $I_J \neq I_{J'}$.

Доказательство. В самом деле, если K-точки на $\mathbb{A}^l_K = \operatorname{Spec} \mathcal{U}'_K$, соответствующие идеалам I_J и $I_{J'}$, совпадают, то совпадают и их координаты, то есть значения симметрических функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ на наборах θ_J и $\theta_{J'}$. Значит, совпадают и сами наборы. $\square$

Зафиксируем J.

Лемма 1.8.3. *Имеем вложение идеалов $I_1^K \subset I_J$.*

Доказательство. В самом деле,

$$(\sum_{i=0}^{l} e_i(\theta_J)(-t)^i)(\sum_{i=0}^{k} e_i(\theta_{\bar{J}})(-t)^i) = 1 - t^N.$$

С другой стороны, из $E(-t)H(t) = 1$ получаем

$$(\sum_{i=0}^{l} e_i(\theta_J)(-t)^i)(\sum_{i=0}^{\infty} h_i(\theta_J)t^i) = 1.$$

Значит,

$$(\sum_{i=0}^{k} e_i(\theta_{\bar{J}})(-t)^i) =$$

$$= (\sum_{i=0}^{l} e_i(\theta_J)(-t)^i)(\sum_{i=0}^{k} e_i(\theta_{\bar{J}})(-t)^i)(\sum_{i=0}^{\infty} h_i(\theta_J)t^i) =$$

$$= (1 - t^N)(\sum_{i=0}^{\infty} h_i(\theta_J)t^i). \quad (1.8.4)$$

Сравнивая коэффициенты при t^i слева и справа, находим $h_i(\theta_J) = 0$ для $i = k+1, \ldots, N-1$, и $h_N(\theta_J) - 1 = 0$. Соответственно, $h_i(\zeta\theta_J) = 0$ $i = k+1, \ldots, N-1$, и $h_N(\zeta\theta_J) = \zeta^N = (-1)^{l+1}$. $\square$

Следствие 1.8.5. *Имеем вложение идеалов $I_1^K \subset Ker\ \phi$.*

Следствие 1.8.6. *Гомоморфизм ϕ пропускается через гомоморфизм конечномерных коммутативных алгебр $\psi : QH(G, K, 1) \longrightarrow \bigoplus_J K$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}'_K \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & \bigoplus_J K \\
& QH(G,K,1) = \mathcal{U}'_K/I_1^K \arrow[ur, dashed, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

Теорема 1.8.7. *Гомоморфизм ψ является изоморфизмом.*

Доказательство. Нам следует установить равенство $\mathrm{Ker}\ \phi = I_1^K$. По Лемме 1.8.3 имеем вложение $I_1^K \subset \mathrm{Ker}\ \phi$. Ясно, что $\mathrm{Ker}\ \phi = \bigcap_J I_J$. Идеал $\mathrm{Ker}\ \phi$, является пересечением различных (по Лемме 1.8.2) максимальных идеалов I_J. Как K-векторное пространство в кольце $\mathcal{U}'_K$, каждый из них имеет коразмерность равную 1. Максимальные идеалы взаимно просты если различны, следовательно, отображение ϕ сюръективно, а их пересечение имеет коразмерность над K, равную их числу, т.е. $\binom{N}{l}$.

С другой стороны, коразмерность идеала I_1^K равна размерности факторкольца $\mathcal{U}'_K/I_1^K$. Согласно теореме Зиберта–Тиана (1.8.1), это кольцо изоморфно кольцу квантовых когомологий, которое является свободным модулем ранга $\dim_K QH(G,K,1) = \dim H^{\bullet}(G,K) = \binom{N}{l}$ над K. Следовательно, идеалы $\mathrm{Ker}\ \phi$ и I_1^K совпадают. $\square$

Следствие 1.8.8. *Алгебра $\mathcal{U}'_K/I_1^K$ полупроста. Она является прямой суммой своих простых минимальных идеалов, каждый из которых изоморфен K.*

Следствие 1.8.9. *Алгебра $\mathcal{U}'_{\mathbb{Q}}/I_1$ полупроста. Собственные числа умножений на классы Шуберта лежат в K (и равны $S_\lambda(\zeta\theta_J)$).*

Гипотеза 1.8.10. *Пусть теперь G — неприводимая компонента грассманиана максимальных изотропных плоскостей в четномерном простран-*

стве, снабженном невырожденной квадратичной формой, или грассманиан лагранжевых плоскостей в пространстве с симплектической формой. Тогда собственные числа оператора умножения на класс дивизора, действующего в пространстве $QH(G, \mathbb{Q}, 1)$, *определены над круговым расширением* $\mathbb{Q}$.

Замечание 1.8.11. Пусть G — обобщенный грассманиан, то есть фактор (классической) простой группы по максимальной параболической подгруппе. Вообще говоря, собственные числа оператора умножения на класс дивизора не обязательно будут определены над круговыми полями.

Пример 1.8.12. Минимальный пример однородного многообразия, спектр которого не определён над круговым полем, такой: выберем в диаграмме Дынкина B_4 третий слева корень, и рассмотрим соответствующее многообразие X — фактор $SO(9)$ по параболической подгруппе, соответствующей выбранному корню (грассманиан изотропных трёхмерных пространств в девятимерном пространстве).

Вычислим оператор $\star H$ квантового умножения на образующую группы Пикара $\mathrm{Pic}(X)$.

Предложение 1.8.13. *Характеристический многочлен оператора* $H\star$ *равен*

$$x^{32} - 2^4 \cdot 23tx^{27} - 2^6 \cdot 563t^2x^{22} + 2^7 \cdot 37 \cdot 311t^3x^{17} - \\ - 2^{13} \cdot 2417t^4x^{12} + 2^{16} \cdot 3^3 \cdot 29t^5x^7 + 2^{12} \cdot 3^8t^6x^2. \quad (1.8.14)$$

Доказательство. Воспользуемся квантовой формулой Шевалле ([32]). □

Поделив на двукратный нуль и сделав замену $z = 4\frac{x^5}{t}$, получим многочлен, пропорциональный

$$(z-1)(z+27)(z^4-118z^3+843z^2-2090z-243)$$

Последний множитель имеет неабелеву группу Галуа (а именно полную симметрическую группу S_4), следовательно, по теореме Кронекера–Вебера поле его разложения не является подполем в круговом поле.

Глава 2

Торические поверхности дель Пеццо и пучки эллиптических кривых с низким ветвлением

Для поверхностей дель Пеццо степени d в работе [1] (и предшествовавших ей работах, таких как [86]) построены зеркально-симметричные модели Ландау–Гинзбурга для достаточно общего выбора симплектической формы. Построенные таким образом модели имеют следующую комплексную структуру: особый слой над бесконечностью — это колесо из d кривых, и кроме этого особого слоя есть ещё $12 - d$ простых особых слоев. В этой главе мы рассмотрим противоположный случай — зеркально симметричные поверхностям дель Пеццо слабые модели Ландау–Гинзбурга, в которых простые особые слои склеиваются в 3 (минимальное возможное количество) вырожденных слоя, соответствующие естественному выбору симплектической формы в антиканоническом классе. Для этих моделей мы проверим гипотезу зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа.

2.1 Эллиптические поверхности.

Впервые систематическое изложение теории эллиптических поверхностей было дано Кодаирой в работе [55]. Напомним основные результаты.

Обозначим через t координату на $\mathbb{A}^1$. Тогда *j-инвариант* $j(t)$ эллиптической поверхности над $\mathbb{P}^1$ — это j-инвариант общего слоя эллиптической поверхности над $\mathbb{P}^1$, то есть j-инвариант эллиптической кривой над полем функций $\mathbb{C}(t)$. Будем говорить что эллиптическая поверхность *изотривиальна*, если $j(t)$ — константа (то есть j — отображение в точку, все неособые слои изоморфны над $\mathbb{C}$). Будем говорить что эллиптическая поверхность *якобиева*, если она имеет сечение (якобиан произвольной эллиптической поверхности — якобиева эллиптическая поверхность). Если E_0 — произвольная эллиптическая поверхность над кривой C, разрешив её особенности, а затем стянув все (-1)-кривые в компонентах слоёв, получим *модель Нерона* E — минимальную неособую модель среди эллиптических якобиевых поверхностей над C ([72]). Пусть E' — поверхность полученная из модели Нерона E якобиевой эллиптической поверхности стягиванием всех компонент слоёв не пересекающих нулевое сечение (*модель Вейерштрасса*). Поверхность E' имеет дювалевские особенности, а стягивание $E \to E'$ — минимальное (крепантное) разрешение особенностей.

Напомним, что если эллиптическая поверхность E' задана в вейерштрассовой нормальной форме

$$y^2 = x^3 + Ax + B,$$

то её j-инвариант равен

$$j = 1728\frac{4A^3}{27B^2 + 4A^3},$$

а *дискриминант*

$$\Delta = 27B^2 + 4A^3.$$

Глобально, дискриминант Δ это дивизор на кривой C. Обозначим $J = \frac{j}{1728}$, а $\omega_E = \frac{dx}{y}$ — *дифференциал Нерона.* Пусть $c \in C$ — точка на базе, обозначим $a = \operatorname{ord}_c A, b = \operatorname{ord}_c B, \delta = \operatorname{ord}_c \Delta$, $e = e_J(c)$ — индекс ветвления отображения J в точке c.

Теорема 2.1.1 ([55]). *Все возможные слои модели Нерона над точкой c перечислены в следующей таблице (I_0 — неособые, I_n —* полустабильные*).*

Тип особого слоя E_c определяется локальной монодромией локальной системы $R^1t_*(\mathbb{Z}_E)$ вокруг точки c. Пусть $I_{[p,q]} = \begin{pmatrix} (1-pq) & p^2 \\ -q^2 & (1+pq) \end{pmatrix}$ — симплектическое отражение относительно вектора $[p,q]$. Обозначим $I_A = I_{[0,1]}, I_B = I_{[-1,1]}, I_C = I_{[1,1]}$.

обозначение	a	b	δ	J	$1+e_J(c)$	особенность E'	монодромия T	$Tr(T)$
$I_0(G)$	0	0	0	G	1	—	1	2
$I_0(0)$	$a \geqslant 1$	0	0	0	$3a$	—	1	2
$I_0(1)$	0	$b \geqslant 1$	0	1	$2b$	—	1	2
$I_0^*(G)$	2	3	6	G	1	D_4	A^4BC	-2
$I_0^*(0)$	$a \geqslant 3$	3	6	0	$3a-6$	D_4	A^4BC	-2
$I_0^*(1)$	2	$b \geqslant 4$	6	1	$2b-6$	D_4	A^4BC	-2
$I_n, n \geqslant 1$	0	0	n	∞	n	A_{n-1}	A^n	2
$I_n^*, n \geqslant 1$	2	3	$n+6$	∞	n	D_{n+4}	$A^{n+4}BC$	-2

II	$a \geqslant 1$	1	2	0	$3a-2$	—	AC	1
III	1	$b \geqslant 2$	3	1	$2b-3$	A_1	A^2C	0
IV	$a \geqslant 2$	2	4	0	$3a-4$	A_2	A^3C	-1
IV^*	$a \geqslant 3$	4	8	0	$3a-8$	E_6	A^5BC^2	-1
III^*	3	$b \geqslant 5$	9	1	$2b-9$	E_7	A^6BC^2	0
II^*	$a \geqslant 4$	5	10	0	$3a-10$	E_8	A^7BC^2	1

Будем говорить что у эллиптической поверхности полустабильная редукция в точке c (или, что слой над c полустабильный), если особый слой над c имеет тип I_n. Будем говорить, что эллиптическая поверхность полустабильна, если все её особые слои имеют полустабильную редукцию. Пусть $r(c)$ — ранг группы порождённой лежащими в слое над c исключительными дивизорами отображения $E \to E'$ (то есть, ранг системы Дынкина ассоциированной с дювалевской особенностью модели Вейерштрасса).

Разобрав все случаи в таблице докажем следующее

Утверждение 2.1.2. *1. Топологическая эйлерова характеристика приведённого слоя E над c равна δ,*

2. $r(c) = \delta \iff$ слой над c гладкий,

3. $r(c) = \delta - 1 \iff$ слой над c полустабильный,

4. в остальных случаях $r(c) = \delta - 2$.

С другой стороны, топологическая эйлерова характеристика тотального пространства E (равная $12\chi(E, \mathcal{O}_E)$ по формуле Нётера) равна сумме топологических эйлеровых характеристик особых слоёв (гладкие слои —

эллиптические кривые, имеют топологическую эйлерову характеристику равную 0), поэтому

$$\deg\Delta = \sum_c \delta_c = \sum_c \chi_{top}(E_c) = \chi_{top}(E) = 12\chi(E, \mathcal{O}_E). \qquad (2.1.3)$$

Пусть $\Phi(E)$ — *группа Морделла–Вейля*, то есть группа всех сечений E над C. Тогда группа Пикара E порождена сечениями и неприводимыми компонентами слоёв (см., например [80], [85] или [65]), точное выражение этого разложения даёт формула Шиоды–Тейта

$$\rho(E) = \operatorname{rk}\Phi(E) + 2 + \sum_c r(c).$$

Эллиптическая поверхность E называется *экстремальной*, если $h^{1,1}(E) = \rho(E)$ (для рациональной поверхности это условие выполнено автоматически) и группа Морделла–Вейля $\Phi(E)$ конечна. Например, экстремальными являются рациональные полустабильные поверхности, если у них 4 особых слоя.

Если поверхность E рациональная, то $\rho(E) = 10, \chi_{top}(E) = 12$.

С подгруппой конечного индекса $G \subset PSL(2,\mathbb{Z})$ связана модулярная эллиптическая поверхность Шиоды $S(G)$ — тотальное пространство универсальной эллиптической кривой над модулярной кривой $X(G) = \overline{\mathcal{H}/G}$, где $\mathcal{H}$ — верхняя полуплоскость ([80]).

Следующая теорема была доказана Бовилем.

Теорема 2.1.4 ([11],[12]). *У неизотривиальной эллиптической поверхности не менее трёх особых слоёв.*

Пусть S — неизотривиальная эллиптическая поверхность над полной кривой C со всюду полустабильной редукцией. Тогда

1. *У S не менее четырёх особых слоёв.*

2. *Если у S ровно четыре особых слоя, то кривая $C \simeq \mathbb{P}^1$, а сама поверхность S рациональна, якобиева, экстремальная, и изоморфна (над $\mathbb{C}$) одной из 6 эллиптических поверхностей Шиоды $S(G)$, перечисленных в следующей таблице.*

тип	G	уравнение (t — координата на C)	j-инвариант
$E_{(9111)}$	$\Gamma_0(9) \cap \Gamma_1(3)$	$X^2Y + Y^2Z + Z^2X + tXYZ = 0$	$j_3 = \frac{t^3(t^3-24)^3}{t^3-27}$
$E_{(8211)}$	$\Gamma_0(8) \cap \Gamma_1(4)$	$(X+Y)(XY - Z^2) + tXYZ = 0$	$j_4 = \frac{(t^4-16t^2+16)^3}{t^2(t^2-16)}$
$E_{(6321)}$	$\Gamma_1(6)$	$(X+Y)(Y+Z)(Z+X) + tXYZ = 0$	$j_6 = \frac{t^3(t^3-24t-48)^3}{(t-6)(t+3)^2(t+2)^3}$
$E_{(5511)}$	$\Gamma_1(5)$	$X(X-Z)(Y-Z) + tYZ(X-Y) = 0$	$j_7 = \frac{(t^4-40t^2-120t-80)^3}{(t+3)^5(t^2-5t-25)}$
$E_{(4422)}$	$\Gamma_1(4) \cap \Gamma_2(2)$	$X(X^2 + Z^2 + 2ZY) + tZ(X^2 - Y^2) = 0$	$j_8 = \frac{(t^4-16t^2+256)^3}{t^4(t-4)^2(t+4)^2}$
$E_{(3333)}$	$\Gamma_2(3)$	$(X^3 + Y^3 + Z^3) + tXYZ = 0$	$j_9 = \frac{t^3(t+6)^3(t^2-6t+36)^3}{(t-3)^3(t^2+3t+9)^3}$

Во всех этих случаях кривая $C = X(G)$ имеет род 0. Тип — это упорядоченный набор индексов ветвления j над ∞, то есть поверхность $E_{(efgh)}$ имеет 4 особых слоя-колеса I_e, I_f, I_g и I_h. Во всех бовилевских случаях получается, что группа Морделла–Вейля состоит из кручения, и оно имеет порядок $\sqrt{(efgh)}$.

Замечание 2.1.5. Пусть $(efgh)$ — одна из шести четвёрок чисел соответствующая бовилевской поверхности. Выберем одно из этих чисел и обозначим его d, а остальные три (abc). В работе [50] описаны все трёхблочные полные исключительные наборы в производной категории когерентных пучков на поверхности дель Пеццо степени d — ранги исключительных пучков в каждом блоке постоянны (обозначим их x, y, z, а количества исключительных пучков в блоках обозначим a, b, c), тогда эти числа удовлетворяют уравнению $ax^2 + by^2 + cz^2 = \sqrt{(abcd)}xyz$. Соответствующие наборы $d; abc$ в точности совпадают с наборами $(d; abc)$ которые можно получить из поверхностей Бовиля (см. также 2.3).

В работе [65] Миранда и Перссон нашли все экстремальные рациональные якобиевы эллиптические поверхности. Из формулы Шиоды–Тейта, теоремы Бовиля, утверждения 2.1.2 и 2.1.3 получается, что у такой поверхности E не более четырёх особых слоев, причём если особых слоя ровно четыре, то поверхность E полустабильна, а если особых слоёв меньше трёх, то поверхность E изотривиальна. Если же у экстремальной поверхности E три особых слоя, то ровно один из них не полустабилен.

Предложение 2.1.6 ([65]). *Экстремальных эллиптических поверхностей с тремя особыми слоями всего шесть, типы особых слоёв и вейерштрассовы нормальные формы этих поверхностей перечислены в следующей таблице.*

Пусть $(u : v)$ — однородные координаты на базе $\mathbb{P}^1$, $t = \frac{u}{v}$, A и B — однородные многочлены от $(u : v)$ степеней 4 и 6, соответственно.

тип	A	B	J	$\lvert\Phi(E)\rvert$
$II^*I_1I_1$	$-3u^4$	$2u^5v$	$\frac{u^2}{u^2-v^2}$	1
$III^*I_2I_1$	$-uv^3$	$v^5(u-v)$	$\frac{4u^3}{(u-3v)^2(4u-3v)}$	2

$IV^*I_3I_1$	$v^3(24u-27v)$	$v^4(16u^2-72uv+54v^2)$	$\frac{v(24u-27v)^3}{6427u^3(u-v)}$	3
$I_1^*I_4I_1$	$-3(u^2-3v^2)(u-2v)^2$	$u(2u^2-9v^2)(u-2v)^3$	$\frac{4(u^2-3v^2)^3}{27v^4(u^2-4v^2)}$	4
$I_4^*I_1I_1$	$-3v^2(u^2-3v^2)$	$uv^3(2u^2-9v^2)$	$\frac{4(u^2-3v^2)^3}{27v^4(u^2-4v^2)}$	2
$I_2^*I_2I_2$	$-3uv(u-v)^2$	$(u-v)^3(u^3+v^3)$	$\frac{-4u^3v^3}{(u^3-v^3)^2}$	4

Замечание 2.1.7. Последние три поверхности изогенны.

2.2 Модели Ландау–Гинзбурга для поверхностей дель Пеццо.

Напомним (см. 1.6.1), что существует 16 рефлексивных многоугольников Δ_0. Они соответствуют 16 торическим поверхностям дель Пеццо S_0 с дюваливескими особенностями.

Рассмотрим многочлен Лорана $f = \sum u_m x^m$, многоугольник Ньютона которого совпадает с многоугольником поверхности S_0. Он задаёт пучок аффинных кривых $Z_s = \{x \in \mathbb{T} : f(x) = s\}$ геометрического рода 1 на торе $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{C}^*)^2$. Рассмотрим его как эллиптическую поверхность над $\mathbb{A}^1$.

Замечание 2.2.1. На пространстве всех многочленов Лорана действуют две группы — тор $\mathbb{T}$ заменами координат на себе:

$$t : \sum u_m x^m \mapsto \sum (u_m \cdot t^m) x^m,$$

и группа Aff^1 аффинных преобразований образа $f \to a \cdot f + b$. Ряды свободных членов Φ_f, Φ_f^{nr} инвариантны относительно действия тора $\mathbb{T}$, и эквивариантны относительно действия Aff^1 (например, на Φ_f^{nr}, действие продолжается так: $\Phi_f^{nr}(t) \to e^{tb}\Phi_f^{nr}(at)$).

Пространство многочленов Лорана с носителем содержащимся в $\Delta\backslash 0$ можно отождествить с пространством $\mathbb{T}$-инвариантных дивизоров на S_0 с коэффициентами в $\mathbb{C}$. Это отождествление называется *дивизориально-мономиальным соответствием.* Дивизору $\sum a_m D_m$ соответствует многочлен $\sum a_m x^m$. В случае особого S_0 воспользуемся дивизориально-мономиальным соответствием для крепантного разрешения S_0'. Действия алгебры Ли тора T на многочленах Лорана соответствует сдвигам на главные дивизоры. Многочленам Лорана с носителем совпадающим с $\Delta\backslash 0$ соответствуют T-инвариантные дивизоры все компоненты которых отличны от 0; такие дивизоры можно рассматривать как элементы $Div(S_0) \otimes \mathbb{C}^*$, и записывать в виде $exp(2\pi i \sum a_m D_m)$ (дивизор $\sum a_m D_m$ определён однозначно с точностью до целого). Действия самого тора T на таких многочленах Лорана соответствует сдвигам логарифма $\sum a_m D_m$ на главные дивизоры.

Пример 2.2.2 (Проективная плоскость)**.** Рассмотрим общий многочлен Лорана

$$f_{3.1}^{gen} = a_x x + a_y y + a_z x^{-1} y^{-1}$$

Он соответствует главному дивизору тогда и только тогда, когда $a_x \cdot a_y \cdot a_z = 1$. С точностью до главного дивизора многочлен $f_{3.1}^{gen}$ эквивалентен многочлену $f_{3.1} = x + y + a \cdot x^{-1} y^{-1}$.

Лемма 2.2.3. *Поверхность дель Пеццо S степени $d \geqslant 3$ квантово минимальна всегда, за исключением двух случаев $S = \mathbb{F}_1$ и $d = 7$.*

Доказательство. Это утверждение проверяется явно (например, с помощью формул [17] или [41]). $\square$

Как будет видно далее, поверхности $\mathbb{F}_1$ и S_7 оказываются квантово минимальными относительно некоторого нетривиального параметра t_0.

Обозначим модель Нерона эллиптической поверхности заданной многочленом f через E_f.

Бирациональные преобразования эллиптических поверхностей являются изоморфизмами над открытым множеством на базе, поэтому, естественно, на уравнение Пикара–Фукса и периоды не влияют.

С эллиптическими поверхностями связано два типа накрытий — изогении и замены базы. Оба случаях изоморфно отображают гомологии слоёв над $\mathbb{Q}$. Уравнение Пикара–Фукса у эллиптической поверхности и изогенной ей совпадают: по формуле проекции, период на накрытии (интеграл обратного образа дифференциальной формы ω по собственному прообразу 1-цикла γ) равен периоду на базе накрытия ($\int_\gamma \omega$) умноженному на степень накрытия.

При замене базы $\pi : C' \to C$ уравнение Пикара–Фукса семейства $\pi^*(E) \to C'$ получается обратным образом уравнения Пикара–Фукса для семейства $E \to C$, а период $\Phi' : c' \to \int_{\gamma \in H_1(\pi^*(E)_{c'}, \mathbb{Z})} \omega_E$ совпадает с $c' \to \frac{\omega'_E}{\pi^*\omega_E} \int_{\gamma \in H_1(E_{\pi(c)}, \mathbb{Z})} \omega_E$.

В следующей теореме описаны слабые модели Ландау–Гинзбурга f для поверхностей дель Пеццо степени $d \geqslant 3$ относительно антиканонического класса (с симплектической формой в некоторых кратностях антиканонического класса) со значением параметра t_0 (параметр t_0 равен 1 для поверхностей, отличных от $\mathbb{F}_1$ и S_7). Для этого мы представляем такую поверхность дель Пеццо S как сглаживание (см. 1.6.3) торической поверхности S_0 с дювалевскими особенностями (они перечислены в 1.6.7), и среди всех многочленов Лорана, многоугольник Ньютона которых совпадает с многоугольником поверхности S_0, находим многочлен Лорана f с тремя критическими значениями (они и ∞ будут особыми слоями эллиптической поверхности E_f). Разным вырождениям S соответствуют разные многогранники Ньютона, но эллиптические поверхности E_f оказываются бирационально эквивалентными над $\mathbb{P}^1$ с точностью до изогении. В случае квантово минимальных поверхностей Дель Пеццо, теорема 2.2.4 является двумерным аналогом *соответствия Голышева* ([37]) между трёхмерными многообразиями Фано основной серии (они автоматически квантово минимальны) и модулярными семействами Куги–Сато поверхностей $K3$.

Теорема 2.2.4. *1) Пусть поверхность дель Пеццо S степени d является сглаживанием торической поверхности S_0 с дювалевскими особенностями, т.ч. $S_0 \simeq T_{12-d.n}$, где поверхности $T_{12-d.n}$ описаны в предложении 1.6.7, причем $d \neq 5, 12-d.n \neq 4.2$ [1]. Многочлены Лорана f, перечисленные в следующей таблице, являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга для S относительно кратного антиканонического дивизора $-kK_S$.*

2) Каждая из найденных слабых моделей Ландау–Гинзбурга (кроме случаев $d = 3, k = 1$ и $d = 4, k = 1$) компактифицируется до поверхности изогенной одной из шести эллиптических поверхностей Бовиля, перечисленных в теореме 2.1.4. В таблице выписаны значения j-инварианта поверхности E_f однозначно определяющие тип такой компактификации.

$12-d$.*номер*	k	*многочлен* f	j-*инвариант*

[1] То есть, поверхность S — любая поверхность дель Пеццо степени $d \geqslant 3$ отличная от поверхностей $\mathbb{F}_1$ и S_7. В этом случае поверхность S квантово минимальна.

3.1	1	$x+y+x^{-1}y^{-1}$	j_3
4.1	1	$x+y+x^{-1}+y^{-1}$	j_4
4.3	1	$xy+2x+xy^{-1}+x^{-1}$	j_4
6.1	1	$3+xy+2y+x^{-1}y+3x^{-1}+3x^{-1}y^{-1}+x^{-1}y^{-2}$	j_6
6.2	1	$3+xy+2x+2y+xy^{-1}+yx^{-1}+x^{-1}$	j_6
6.3	1	$3+xy+2y+yx^{-1}+x+x^{-1}+y^{-1}$	j_6
6.4	1	$3+x+y+x^{-1}+y^{-1}+xy+x^{-1}y^{-1}$	j_6
7.1	1	$3+xy+2y+x^{-1}y+3x^{-1}+3x^{-1}y^{-1}+y^{-1}+x^{-1}y^{-2}$	j_7
7.2	1	$3+xy+2x+2y+xy^{-1}+yx^{-1}+x^{-1}+y^{-1}$	j_7
8.1	2	$y(x^{-2}+2+x^2)+y^{-1}$	j_8
8.1b	1	$y(x^{-2}+4x^{-1}+6+4x+x^2)+2(x^{-1}+3+x)+y^{-1}$	j_{8b}
8.2	2	$x^2y^{-1}+3x-2xy^{-1}+3y+y^{-1}+y^2x^{-1}+2yx^{-1}+x^{-1}$	j_8
8.3	2	$(x+x^{-1})(y+y^{-1})$	j_8
8.3b	1	$(x+2+x^{-1})(y+2+y^{-1})$	j_{8b}
9.1	3	$x^2y^{-1}+x^{-1}y^2+x^{-1}y^{-1}$	j_9
9.1b	1	$6+3(x+y+xy+x^{-1}+y^{-1}+x^{-1}y^{-1})+x^2y^{-1}+x^{-1}y^2+x^{-1}y^{-1}$	j_{9b}

$j_{8b}=\frac{t^2-16t+16)^3}{t(t-16)}$ $j_{9b}=\frac{t(t-24)^3}{t-27}$

Поверхность $E_{8.1b}$ *и поверхность* $E_{8.3b}$ *бирационально эквивалентны*

$E_{I_1^* I_4 I_1}$, поверхность $E_{9.1b}$ бирационально эквивалентна $E_{IV^* I_3 I_1}$.

3) Пусть поверхность дель Пеццо S совпадает с $T_{4.2} \simeq \mathbb{F}_1$ или с $T_{5.1}$[2] *В этих случаях торическое вырождение поверхности S с дювалевскими особенностями либо тривиально, либо совпадает с $T_{5.2}$ (если $d = 5$). Существует значение параметра t_0, относительно которого поверхность S квантово минимальна. В следующей таблице выписаны слабые модели Ландау–Гинзбурга для S относительно параметра t_0. В таблице выписаны значения j-инварианта для f. Эллиптические поверхности $E_{f_{5.1}}$ и $E_{f_{5.2}}$ бирациональны над $\mathbb{P}^1$.*

d.номер	k	*многочлен f*	*j-инвариант*
4.2	1	$\frac{1}{2}(4x + 4y + 3xy - x^{-1}y^{-1})$	$j_{4.2}$
5.1	1	$x + y + 3x^{-1} + 3y^{-1} + 2x^{-1}y^{-1}$	j_5
5.2	1	$\frac{1}{3}(x^{-1}(y^{-1} + 2 + y) + 2y^{-1} + 27x)$	j_5

$$j_{4.2} = -\frac{(t^3 - 3t^2 + 15t + 3)^3(t + 3)}{(3t^2 - 10t + 51)}$$

$$j_5 = \frac{(t^3 - 6t^2 - 12t + 24)^3(t + 6)}{(2t - 15)(2 + 3t)^3}$$

Поверхность $E_{4.2}$ имеет особые слои $II, I_8 I_1 I_1$, а $E_{5.1}$ и $E_{5.2}$ — $II, I_7 I_2 I_1$.

Замечание 2.2.5. 1. Между эллиптическими поверхностями 3.1 и 9.1 есть 3-изогения $(x', y') = (x^{-1}y^2, x^2y^{-1})$.

2. Между эллиптическими поверхностями 4.1 и 8.3 есть 2-изогения $(x', y') = (xy, xy^{-1})$.

3. Между эллиптическими поверхностями 4.3 и 8.1 есть 2-изогения $(x', y') = (x^2, y)$.

[2] То есть, S не квантово минимальная.

Замечание 2.2.6. 1. Поверхность $E_{9.1}$ получается из поверхности $E_{9.1b} = E_{IV^* I_3 I_1}$ кубической заменой базы, вполне разветвлённой над IV^* и I_3.

2. Поверхность $E_{3.1}$ получается из поверхности $E_{9.1b} = E_{IV^* I_3 I_1}$ кубической заменой базы, вполне разветвлённой над IV^* и I_1.

3. Поверхность $E_{8.3}$ получается из поверхности $E_{8.3b} = E_{I_1^* I_4 I_1}$ квадратичной заменой базы, разветвлённой в I_1^* и I_4.

Формальное доказательство теоремы 2.2.4 заключается в непосредственной проверке утверждений теоремы в каждом из случаев.

Прежде чем приступить к этой несложной проверке, объясним, каким образом был найден ответ — многочлены $f_{k.n}$. Метод их нахождения (и в первом — квантово минимальном случае, и во втором) в сущности тот же, что и метод доказательства Бовиля. Наш случай даже проще общего — заранее известно, что поверхность рациональна и якобиева.

Требование малого количества особых слоев ограничивает возможные значения j-инварианта. Действительно, посмотрим на j-инвариант как на отображение $J : C \simeq \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Все слои над точками в прообразе $J^{-1}(\infty)$ — заведомо особые. Предположим сначала, что многочлены $\Delta = 27B^2 + 4A^3$, $4A^3$ и $27B^2$ взаимно простые (то есть эллиптическая поверхность полустабильна). В этом случае слой $J^{-1}(0)$ состоит не более чем из $\deg A$ точек, а слой $J^{-1}(1)$ состоит не более чем из $\deg B$ точек.

Пусть $\deg A = 2d, \deg B = 3d, \deg J = 6d$. По формуле Гурвица существует не менее $d + 2$ различных точек на базе C с J-инвариантом ∞, причём если выполняется равенство, то многочлены A и B не имеют кратных корней, а отображение J неразветвленное над $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Такие отображения (*функции Белого*) находятся во взаимно-однозначном соответствии с транзитивными представлениями фундаментальной группы в группе перестановок $6d$ элементов общего слоя отображения J, т.е. с гомоморфизмами $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathfrak{S}_{6d}$, и тривалентными вложенными графами Γ на сфере $\mathbb{P}^1$ (такой граф получается как прообраз отрезка, соединяющего 0 и 1).

Каждая точка $t \in J^{-1}(\infty)$ лежит в отдельной грани, и валентность n грани совпадает с индексом ветвления $1 + e_J(t) = n$; полустабильный слой над t — это колесо I_n из n прямых. Шесть бовилевских поверхностей соответствуют шести функциям Белого степени 12. Если эллиптическая поверхность задана пучком плоских кубик, степень дискриминанта Δ равна 12 (2.1.3 показывает, что степень Δ всегда равна $12\chi(E, \mathcal{O}_E)$).

Предположим теперь, что многочлены $\Delta = 27B^2 + 4A^3$, $4A^3$ и $27B^2$ не взаимно простые (не полустабильный случай). Рассмотрим наиболее общий случай $\deg(A, B) = 1$, $A(t) = A_1A_2A_3(t-u)$, $B(l) = B_1B_2B_3B_4B_5(t-u)$. Тогда J-инвариант — это функция степени 10 с индексами ветвления $(3,3,3,1)$ над 0, $(2,2,2,2,2)$ над 1 и (n_1, n_2, n_3) над ∞. В этом случае у эллиптической поверхности четыре особых слоя: три полустабильных слоя $I_{n_1}, I_{n_2}, I_{n_3}$, и один слой типа II над u; у графа Γ три вершины тривалентные (они соответствуют неособым слоям с $J = 1$), а одна вершина одновалентная (над ней и висит неполустабильный слой типа II). Существует всего 4 таких графа; соответствующие наборы индексов ветвления над ∞ такие: $(8,1,1)$ (этот граф соответствует функции $j_{4.2}$), $(7,2,1)$ (а этот набор соответствует функции j_5), $(5,4,1)$ и $(5,3,2)$.

Поскольку j-инвариант поверхности E_f является рациональной функцией от коэффициентов многочлена Лорана f, нам нужно найти такую подстановку коэффициентов в многочлены $f_{d.n}$, чтобы j-инвариант эллиптической поверхности E_f стал бы равен определённой наперёд заданной функции j_i Оказывается, что такая подстановка всегда существует, но никакого объяснения, почему для не квантово минимальных поверхностей она должна существовать, нам не известно.

Предложение 2.2.7. *Функции j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8, j_9, $j_{4.2}$ являются функциями Белого.*

Доказательство. Легко проверить, что их ветвление над 0, 1728 и ∞ именно такое, как было указано ранее. По формуле Гурвица в других точках отображение j неразветвленное. $\square$

Предложение 2.2.8. *Для многочленов f из таблиц в теореме 2.2.4 j-инварианты эллиптических поверхностей E_f совпадают с указанными в таблице.*

Это несложное вычисление — все указанные эллиптические поверхности приводятся к вейерштрассовой нормальной форме.

Пример 2.2.9. Разберём, например, случай $f = x+y+\frac{1}{xy}$. Кривая задана уравнением $x^2y + y^2x + 1 - txy = 0$. Отображение $(x, y) \to x$ является в общей точке E двулистным отображением на $\mathbb{P}^1$:

$$y^2 + y(x-t) + x^{-1} = 0.$$

Сделаем замену $(x, y) \to (x, y + \frac{(x-t)}{2})$, в новых координатах E задаётся $y^2 - \frac{(x-t)^2}{4} + x^{-1} = 0$, после замены $(x, y) \to (-x^{-1}, yx^{-1})$ получим кривую заданную уравнением $y^2 = x^3 + \frac{(tx+1)^2}{4}$, после линейной замены $x \to x + \frac{t^2}{12}$

получим вейерштрассову форму $y^2 = x^3 + Ax + B$, где $A = \frac{t(24-t^3)}{48}, B = \frac{t^6-36t^3+216}{864}$. Соответственно, $\Delta = 4A^3 + 27B^2 = \frac{27-t^3}{16}$ и $j = 1728\frac{4A^3}{\Delta} = \frac{t^3(t^3-24)^3}{t^3-27}$.

Вычислив аналогичным образом вейерштрассовы нормальные формы для всех указанных эллиптических поверхностей, убедимся что верно

Утверждение 2.2.10. *При фиксированном $d \neq 4$ все эллиптические поверхности $E_{f_{12-d.n}}$ бирационально эквивалентны (как эллиптические поверхности). Поверхности $E_{f_{8.1b}}$,$E_{f_{8.3b}}$ и $E_{I_1^* I_4 I_1}$ бирационально эквивалентны. Поверхности $E_{f_{9.1b}}$ и $E_{IV^* I_3 I_1}$ бирационально эквивалентны.*

Таким образом, мы доказали утверждение 2.2.4-2.

Замечание 2.2.11. Для бовилевских случаев достаточно было выяснить что степень отображения J равна 12. Это эквивалентно тому, что дискриминант Δ взаимно прост с A и взаимно прост с B, то есть поверхность E полустабильна.

Предложение 2.2.12. *При $d < 8$, то $\Phi_{f_{12-d.n}} = \Phi_{f_{12-d.m}}$ для всех n.*

Доказательство. Поскольку вейерштрассовы нормальные формы эллиптических поверхностей $E_{f_{12-d.m}}$ и $E_{f_{12-d.n}}$ совпадают, оба этих ряда являются решением одного и того же уравнения Пикара–Фукса, а уравнение Пикара–Фукса имеет единственное решение в $\mathbb{C}[[t]]$. $\square$

Доказательство теоремы 2.2.4.

Случай 2.2.13 (Случай не квантово минимальных поверхностей (2.2.4-3).)**.** Торические поверхности $S = T_{4.2}$ и $S = T_{5.1}$ неособые. В этом случае можно применить 1.7.15. Заключаем, что любой многочлен Лорана f с

$\Delta(f) = \Delta(S)$ является слабой моделью Ландау–Гинзбурга S относительно некоторого параметра $t_0(f)$.

Теперь рассмотрим поверхность $S = T_{5.2}$. Ряд свободных членов у $f_{5.2}$ совпадает с рядом свободных членов у $f_{5.1}$ (см. 2.2.12), а следовательно, и с I-рядом гладкой поверхности дель Пеццо степени 7 относительно того же параметра t_0. Поэтому $f_{5.2}$ является слабой моделью Ландау–Гинзбурга для S_7 с тем же параметром $t_0 = t_0(f_{5.1})$, что и $f_{5.1}$.

Осталось проверить что для каждого $d \neq 7$ хотя бы у одного многочлена $f_{12-d.n}$ $(12 - d.n \neq 4.2)$ ряд свободных членов $\Phi_{f_{12-d.n}}$ совпадает с $I^{S_d,reg}$.

Случай 2.2.14 $(12 - d = 3, 4, 6)$**.** Если $12 - d < 7$, то среди поверхностей $T_{12-d.n}$ есть одна гладкая (а именно $T_{3.1}$, $T_{4.1}$, $T_{6.4}$). Для соответствующего ей многочлена Лорана $f_{12-d.n}$ равенство ряда свободных членов I-ряду уже установлено (см. 1.7.15). Ряды свободных членов для $f_{12-d.n}$, при тех n, когда $T_{12-d.n}$ не является гладкой поверхностью, равны рядам свободных членов для гладкой $T_{12-d.k}$ по 2.2.12.

Случай 2.2.15 $(12 - d = 8, 9, k > 1)$**.** Если $12 - d = 8, 9$ эллиптические поверхности $E_{9.1}$, $E_{8.3}$ изогенны эллиптическим поверхностям $E_{3.1}$ и $E_{4.1}$. Следовательно (2.2) у них одинаковые уравнения Пикара–Фукса и их решения (с точностью до изогении $t \mapsto t^r$). Очевидно, что $\Phi_{f_{9.1}} = \Phi_{f_{3.1}}$ и $\Phi_{f_{8.3}} = \Phi_{f_{4.1}}$ (свободный член многочлена Лорана не меняется при мономиальной замене переменных). Для остальных случаев степени 8 воспользуемся тем же соображением 2.2.12.

Случай 2.2.16 $(12 - d = 8, 9, k = 1)$**.** Многочлены Лорана $f_{9.1b}$, $f_{8.1b}$ и $f_{8.3b}$ (с точностью до замены координат 2.2.5, 2.2.6) это степени многочленов

Лорана $f_{3.1}$, $f_{4.3}$ и $f_{4.1}$, поэтому

$$\Phi_{f_{9.1b}}(t^3) = \Phi_{f_{3.1}}(t), \Phi_{f_{8.1b}}(t^2) = \Phi_{f_{4.3}}(t), \Phi_{f_{8.3b}}(t^2) = \Phi_{f_{4.1}}(t).$$

Осталось сравнить ряды свободных членов в случаях 7.1, 7.2 и I-ряд для линейного сечения грассманиана $G(2,5)$.

Поскольку ряды свободных членов Φ_{f_1} и Φ_{f_2} удовлетворяют дифференциальным уравнениям Пикара–Фукса L_1 и L_2, степень по D и степень по t у которых ограничены $\deg_D$ и $\deg_t$ [3], то если два ряда свободных членов равны по модулю $(\deg_D + 2)(\deg_t + 2)$, то совпадают и коэффициенты l_{ij}^k уравнений $L_k = \sum_{i=0}^{\deg t} t^i \sum_{j=0}^{\deg_D} D^j l_{ij}^k$, и начальные условия, а следовательно совпадают и Φ_{f_1} и Φ_{f_2}.

$\square$

2.2.1 Модели Хори–Вафы.

В [43] предложен метод построения зеркально симметричных моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в торических многообразиях. Поскольку все поверхности дель Пеццо являются полными пересечениями в торических многообразиях (в случае S_5 — в торическом вырождении многообразия Грассмана $G(2,5)$, см. [8],[9], S_2, S_1 — во взвешенных проективных пространствах), можно сравнить получившийся выше ответ с ответом полученным по рецепту Хори–Вафы.

Напомним, что полному пересечению l гиперповерхностей степеней $d_1, \ldots, d_l$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(a_1 \ldots a_n)$ сопоставля-

[3] Степень $\deg_t$ это количество особых слоёв отображения f (то есть количество точек в спектре), а степень $\deg_D$ это ранг неприводимой относительно связности Гаусса–Манина компоненты в подсистеме трансцендентных циклов в локальной системе $R^{n-1}f_!\mathbb{C}$.

ется пространство $M = \left\{x_1, \ldots, x_n \in (\mathbb{C}^*)^n : \prod_{i=1}^n x_i^{a_i} = t_0, \sum_{j=1}^{k_r} x_{i_j^{(r)}} = 1\right\}$ (индексы $i_1^{(r)}, \ldots, i_{k_r}^{(r)}$ выбраны таким образом, что все они попарно различны, и для всех $r = 1, \ldots, l$ выполнено равенство $\sum_{j=1}^{k_r} a_{i_j^{(r)}} = d_r$), и функция $w : M \to \mathbb{C}$ равная $w = \sum_{i=1}^n x_i$.

Пример 2.2.17. Поверхности дель Пеццо степени 4 сопоставлен тор $\mathbb{T}$ с координатами y, x_1, x_1', x_2, x_2', гиперповерхность $H = (yx_1x_1'x_2x_2' = t_0)$, две гиперповерхности $L_1 = (x_1 + x_1' = 1), L_2 = (x_2 + x_2' = 1)$, и функция $w = y + x_1 + x_1' + x_2 + x_2'$. Ограничение w на $L_1 \cap L_2$ равно $y + 2$. Поэтому $t_0(w-2)^{-1}$ ограниченное на $H \cap L_1 \cap L_2$ равно $x_1x_1'x_2x_2' = x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)$ (x_1, x_2 являются на $H \cap L_1 \cap L_2$ координатами).

Аналогичным образом, поверхностям дель Пеццо степени $d \leqslant 4$ сопоставляются пучки кривых на двумерном торе $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y, x^{-1}, y^{-1}]$. Их уравнения перечислены в следующей таблице (с точностью до сдвига).

d	уравнение ($t = \frac{w-const}{t_0}$)	особенности
$d = 4, S_4 = X_{2,2} \subset \mathbb{P}^4$	$1 - t \cdot xy(1-x)(1-y) = 0$	$I_1^* I_4 I_1$
$d = 3, S_3 = X_3 \subset \mathbb{P}^3$	$1 - t \cdot xy(1-x-y) = 0$	$IV^* I_3 I_1$
$d = 2, S_2 = X_4 \subset \mathbb{P}(1112)$	$1 - t \cdot xy^2(1-x-y) = 0$	$III^* I_2 I_1$
$d = 1, S_1 = X_6 \subset \mathbb{P}(1123)$	$1 - t \cdot x^2y^3(1-x-y) - t = 0$	$II^* I_1 I_1$

Все эти кривые эллиптические над $\mathbb{C}(t)$, у них можно явно вычислить вейерштрассову нормальную форму, и следовательно найти типы особых слоёв модели Нерона; они перечислены в последнем столбце предыдущей таблицы.

Предложение 2.2.18. *Модели Хори–Вафы для поверхностей дель Пеццо* *степени $d \leqslant 4$ бирациональны первым четырём поверхностям Миранды–Перссона (2.1.6). В частности, для случаев $d = 3, 4$ они имеют такое же уравнение Пикара–Фукса, и такую же модель Нерона, как и пучки $f_{8.1}, f_{9.1}$.*

В этом можно убедиться и построив изогению между ними.

Пример 2.2.19. В обозначениях примера 2.2.17, сделаем замену $x_i = \frac{z_i}{u_i}, x_i' = \frac{z_i'}{u_i}; u_i = (z_i + z_i')$ (то есть домножим исходный пучок на двумерный тор $T_2 = (\mathbb{C}^*)^2$ с координатами $u_i \neq 0$). Прообраз $\tilde{H}$ задаётся уравнением $yz_1z_1'z_2z_2' = t_0u_1^2u_2^2$. Действие T_2 продолжается до действия на всём $\tilde{H}$: $(y, z_1, z_2, z_1', z_2', u_1, u_2) \to (y, v_1z_1, v_2z_2, v_1z_1', v_2z_2', v_1u_1, v_2u_2)$. Гиперповерхности L_i задаются уравнениями $u_i = 1$, орбиты тора T_2 пересекаются с $L_1 \cap L_2$ по 1 точке. Рассмотрим M_2 — сечение H гиперповерхностями N_i заданными как $z_iz_i' = 1$. Орбиты тора T_2 пересекаются с $N_1 \cap N_2$ по 4 точкам, и M_2 является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-изогенным M. На M_2 функция $w = y + 2$ с точностью до линейной замены равна $\frac{u_1^2u_2^2}{z_1z_1'z_2z_2'} = (z_1 + z_1^{-1})^2(z_2 + z_2^{-1})^2$, а это и есть $f_{4.3}^2$, изогенная $f_{8.1}$.

2.3 Монодромия

В этом разделе мы проиллюстрируем замечание 2.1.5, показав что для построенных в предыдущем разделе моделей Ландау–Гинзбурга верна гипотеза об исключительном наборе и исчезающих циклах.

Напомним, что когерентный пучок $\mathcal{E}$ на алгебраическом многообразии X называется *исключительным*, если $Hom(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathbb{C}$ и $Ext^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$ для всех $i > 0$.

Набор исключительных пучков $E_1, \dots, E_n$ называется *исключительным набором*, если для всех $i < j$ выполнено $Ext^\bullet(E_j, E_i) = 0$.

Исключительный набор называется *полным*, если он порождает всю ограниченную производную категорию $\mathcal{D}^b(X)$ когерентных пучков на X. Аналогичным образом определяются исключительные наборы произвольных элементов категории $\mathcal{D}^b(X)$.

Для пары когерентных пучков $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ на алгебраическом многообразии X, обозначим альтерированную сумму через

$$\chi(E, F) = \sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

Она задаёт билинейную форму на $K_0(X)$ (всюду далее символом $K_0(X)$ обозначается $K_0(X)/tors$).

Набор $e_1, \dots, e_n$ элементов $K_0(X)$ называется *полуортонормированным* (относительно формы χ) если для всех $i < j$ выполнено $\chi(e_j, e_i) = 0$ и для всех i выполнено $\chi(e_i, e_i) = 1$.

Если $E_1, \dots, E_n$ — полный исключительный набор в $\mathcal{D}^b(X)$, то его образ $e_1, \dots, e_n$ в $K_0(X)$ это полуортонормированный базис. Положим $A_{ij} = \chi(e_i, e_j)$.

Обозначим через χ_- кососимметризацию формы χ:

$$\chi_-(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) - \chi(\mathcal{F}, \mathcal{E}).$$

С каждым элементом e_i ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$ связано симплектическое отражение $I_i(v) = v - \chi_-(v, e_i)e_i$.

Имеем $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = A^{-1}A^t$. По двойственности Серра $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = (-1)^{\dim X}\chi(\mathcal{F}, \mathcal{E} \otimes K_X)$, поэтому для всех x, y выполнено равенство $x^tAy = y^tA(A^{-1}A^t)x$, следовательно умножение на $K_X[\dim X]$ в базисе $e_1, \dots, e_n$

пространства $K_0(X)$ задаётся матрицей $A^{-1}A^t$, то есть представляется как произведение симплектических отражений $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$.

Если $\mathcal{E}$ — исключительный объект $\mathcal{D}^b(X)$, для всех объектов $\mathcal{F}$ определён канонический морфизм $can : \mathrm{RHom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. Он дополняется до точного треугольника

$$L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}[-1] \to \mathrm{RHom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}.$$

Объект $L_{\mathcal{E}}\mathcal{F}$ называется *левой перестройкой* $\mathcal{F}$ относительно $\mathcal{E}$. Аналогично определяется правая перестройка. Перестройка $L_{\mathcal{E}}$ переводит правый ортогонал к $\mathcal{E}$ в левый ортогонал к $\mathcal{E}$. Перестройка относительно исключительного набора определяется как последовательная композиция перестроек относительно всех элементов.

Преобразование $x, y \to I_x y, x$ $(x, y \to y, I_y x)$ называется левой (правой) *перестройкой* относительно x (y). Перестройке L_E соответствует отражение I_e.

Пусть X — чётномерное многообразие с полным исключительным набором $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Рассмотрим линейное пространство

$$V = K_0(X) \otimes \mathbb{Q}/\mathrm{Ker}\ \chi_-,$$

с невырожденной кососимметрической формой χ_-. Пусть $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — упорядоченный набор точек на $\mathbb{A}^1$, а $U = \mathbb{A}^1 \backslash x$. Выберем точку $x_0 \in U$, и набор простых не пересекающихся петель $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \pi_1(U, x_0)$ охватывающих точки $x_1, \ldots, x_n$ соответственно (а $\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n$ — петля вокруг бесконечности). Определим представление $\phi_{E,x} : \pi_1(U) \to Sp(V, \chi_-)$ на образующих γ_i:

$$\phi_{E,x}(\gamma_i) = I_i.$$

Обозначим локальную систему, соответствующую представлению ϕ, через $\mathcal{L}_{E,x}$. Пусть (M, w) — модель Ландау–Гинзбурга (гомологически) зеркально симметричная к X. Гипотеза сформулированная Дубровиным (см раздел 5 в [22]) включает в себя следующее

Утверждение 2.3.1. *Локальная система $\mathcal{L}_{E,x}$ совпадает с $R^{\dim X} w_* \mathbb{Z}$.*

Далее мы проверим, что построенные в предыдущем разделе слабые модели Ландау–Гинзбурга удовлетворяют описанному в гипотезе условию.

Для обратимого пучка $\mathcal{L}$ на поверхности S, обозначим его антиканоническую степень $d(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}) \cdot (-K_S)$ через $d(\mathcal{L})$, а ранг $r(\mathcal{L}) = 1$ через $r(\mathcal{L})$. Продолжим функции r и d по линейности на группу $K_0(S)$.

На поверхности S кососимметрическая форма χ_- зависит только от рангов и степеней и явно выражается как

$$\chi_-(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = r(\mathcal{E}) d(\mathcal{F}) - r(\mathcal{F}) d(\mathcal{E}).$$

Исключительный набор $\mathcal{E} = E_1, \ldots, E_n$ называется *блоком*, если $Ext^{\bullet}(E_i, E_j) = 0$ для всех $i \neq j$. Левый перенос пучка F через блок определяется как $L_{\mathcal{E}} F = L_{E_1} \ldots L_{E_n} F$. Если пара блоков $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ полуортогональна ($Rhom(F_i, E_j) = 0$), то полуортогональна и пара блоков $(L_{\mathcal{E}} \mathcal{F}, \mathcal{E})$. Аналогично определяется блочная перестройка набора (возможно, совпадающих) векторов V.

Пусть $E_1, \ldots, E_a, F_1, \ldots, F_b, G_1 \ldots, G_c$ — полный *трёхблочный* исключительный набор на поверхности дель Пеццо степени d (то есть, наборы E_i, F_j и G_k являются блоками). В [50] описаны все такие наборы. Напомним основные свойства.

Предложение 2.3.2 ([50]). *1. На поверхности дель Пеццо S, все исключительные объекты в $\mathcal{D}^b(S)$ представляются сдвинутыми локально свободными пучками. Локально свободный исключительный пучок однозначно определяется его образом в $K_0(S)$.*

2. *Внутри каждого блока, ранги и степени исключительных пучков из набора совпадают ($r(E_i) = r(E_j), d(E_i) = d(E_j)$). Обозначим эти числа через $x = r(E), y = r(F), z = r(G)$ и $d(E), d(F), d(G)$. Это условие означает, что образы E_i, F_j и G_k совпадают в $V = K_0(S)/Ker(\chi_-)$. Обозначим их через e, f, g.*

3. *Значения $\chi(E_i, F_j)$, $\chi(E_i, G_k)$, $\chi(F_i, G_k)$ не зависят от i, j, k. Обозначим их $\chi(E, F)$, $\chi(E, F)$ и $\chi(F, G)$.*

4. *Число $a+b+c$ это количество элементов в базисе $e_1, \ldots, g_c$ в векторном пространстве $K_0(S) \otimes \mathbb{Q}$, следовательно $a + b + c = \operatorname{rk} K_0(S) = 2 + \rho(S)$. Поэтому, по формуле Нётера:*

$$a + b + c + d = 12. \tag{2.3.3}$$

5. *Число $abcd$ является полным квадратом. Пусть $q \in \mathbb{Z}_+$ — положительный корень*

$$q^2 = abcd \tag{2.3.4}$$

6. *Ранги исключительных пучков в блоках и их количества удовлетворяют обобщённому уравнению Маркова:*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = qxyz \tag{2.3.5}$$

7. *Матрица A_{ij} явно выражается через a, b, c, x, y, z:*

$$\chi(E,F) = \chi_-(e,f) = \frac{zdc}{q} \tag{2.3.6}$$

$$\chi(F,G) = \chi_-(f,g) = \frac{xda}{q} \tag{2.3.7}$$

$$\chi(E,G) = \chi_-(e,g) =$$

$$= xz(\frac{\chi_-(E,F)}{xy} + \frac{\chi_-(F,G)}{yz}) =$$

$$= dxz - \frac{ydb}{q}$$

8. *Для каждого решения уравнения 2.3.5 в натуральных числах x, y, z существует трёхблочный исключительный набор с соответствующими рангами.*

9. *Любой полный трёхблочный набор получается блочными перестройками из минимального (набора с минимальным возможным значением $x + y + z$).*

10. *На поверхности $\mathbb{F}_1$ (и на поверхности S_7) трёхблочных полных исключительных наборов нет. А на всех остальных поверхностях дель Пеццо — есть.*

Таким образом, если зафиксированы ранги x, y, z и степень одного из блоков (например, $d(E)$), то степени $d(F)$ и $d(G)$ однозначно определяются из 2.3.6 и 2.3.7. Если одновременно умножить все элементы трёхблочного исключительного набора на обратимый пучок степени d', то получим эквивалентный трёхблочный исключительный набор с инвариантами

$(x, d(E)+d'x), (y, d(F)+d'y), (z, d(G)+d'z))$ отличающимися на симплектоморфизм $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d' & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому будем считать, что $d(e) = 0$ (мы выберем упорядочения так, чтобы E_i были линейными расслоениями).

Кроме того, заметим что произведение последовательных симплектических отражений относительно всех элементов полного исключительного набора соответствует операции умножения на канонический класс $\otimes K_S$. В базисе r, deg эта операция равна $I_{[0,1]}^{-d}$; обозначим $h = [0,1] \in V$. Среди всех решений уравнения 2.3.5 есть одно с минимальным значением $x+y+z$. В следующей таблице перечислены минимальные решения (в случаях $5,5,1$ и $5,1,1$ минимальных решений два, но мы ограничимся одним), и соответствующие им тройки векторов $e = [x, d(E)]$, $f = [y, d(F)]$, $g = [z, d(G)]$.

d	$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 = q \cdot x \cdot y \cdot z$	e, f, g
9	$1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,3], [1,6]$
8	$2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 = 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,2], [1,6]$
6	$3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,1], [1,4]$
5	$5 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$	$[1,0], [1,2], [2,9]$
4	$4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,1], [1,3]$
3	$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$	$[1,0], [1,1], [1,2]$
3	$6 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$	$[1,0], [1,1], [2,5]$
2	$8 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2$	$[1,0], [2,1], [2,3]$
2	$6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2 = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3$	$[1,0], [1,1], [3,5]$
2	$4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$	$[1,0], [1,1], [2,3]$
1	$9 \cdot 1^2 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^2 = 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$	$[1,0], [3,1], [3,2]$
1	$8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 4^2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4$	$[1,0], [2,1], [4,3]$

1	$6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$	$[1,0],[2,1],[3,2]$
1	$5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 1 \cdot 5^2 = 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5$	$[1,0],[2,1],[5,3]$

Все симплектические отражения I_{e_i} сопряжены в группе $GL(2,\mathbb{Z})$. Между векторами e, f, g, h выполнено соотношение

$$(I_e^a) \cdot (I_f^b) \cdot (I_g^c) \cdot (I_h^d) = 1 \tag{2.3.8}$$

В статьях [29] и [30] объясняется, что соотношения подобные 2.3.8, с точностью до отношения эквивалентности заданного одновременными сопряжениями в $GL(2,\mathbb{Z})$ (выбором базиса) и блочными перестройками, взаимно-однозначно соответствуют выбору порядка особых слоёв на некоторой (топологической) эллиптической поверхности, причём элементы I_e^a, I_f^b,... равны (глобальным) монодромиям вокруг особых слоёв типов I_a, I_b,....

Кроме того, деформации особых слоёв в наборы более простых, соответствуют распадениям элементов типа I_e^a в произведения меньших групп. В частности, особый слой типа I_a с монодромией I_e^a (все a исчезающих циклов лежат в одном гомологическом классе e) деформируется в a особых слоёв типа I_1 с монодромией I_e.

Таким образом, для деформаций построенных в разделе 2.2 слабых моделей Ландау–Гинзбурга соответствующих бовилевским поверхностям выполнено утверждение 2.3.1.

Стоит отметить, что этот подход можно бы было использовать и для определения моделей Ландау–Гинзбурга. Если на поверхности дель Пеццо S степени d есть трёхблочный полный исключительный набор (а такой набор есть на всех поверхностях дель Пеццо кроме $\mathbb{F}_1$ и S_7), то по нему можно построить 4 примитивных вектора e, f, g, h в двумерной решётке $\Lambda = K_0(S)/\chi_-$, где векторы e, f, g — это классы элементов блоков в Λ, а примитивный вектор h определяется тем условием, что умножение на антиканоническое линейное расслоение является d-ой степенью отражения относительно вектора h. Отражения относительно векторов e, f, g, h удовлетворяют соотношению $I_e^a I_f^b I_g^c I_h^d = 1$.

Этому соотношению однозначно соответствует топологическая эллиптическая поверхность с 4 особыми слоями типов I_a, I_b, I_c, I_d. А по теореме Бовиля такая алгебраическая поверхность единственная.

Глава 3

Малые торические вырождения трёхмерных многообразий Фано

3.1 Введение

В этой главе показано, какие гладкие трёхмерные многообразия Фано вырождаются в торические многообразия Фано с обыкновенными двойными особенностями.

Мы рассматриваем *малые торические вырождения* трёхмерных многообразий Фано, то есть вырождения гладких трёхмерных многообразий Фано в торические многообразия Фано с обыкновенными двойными точками (см. опр. 1.5.1, 1.5.28). Такие вырождения имеют приложения в зеркальной симметрии. Зеркальная симметрия для гладких торических многообразий (и полных пересечений в них) была построена в [3] и [35].

Если у гладкого многообразия Фано Y имеется малое торическое вырождение X, то можно получить кандидата для зеркально симметричных партнеров Y используя торическую конструкцию, и, например, вычислить некоторые инварианты Громова–Виттена многообразия Y.

Так, используя торические вырождения многообразий Грассмана (построенные в [83, 84]) и многообразий частичных флагов (построенные в [39, 40, 62]), в работах [8, 9] были получены кандидаты в зеркальные партнеры к этим однородным многообразиям.

В [4] было введено понятие малого торического вырождения произвольного многообразия Фано, обобщающее примеры с многообразиями флагов, и там же был задан естественный вопрос ([4, Question 3.9]): «Какие трёхмерные неторические гладкие многообразия Фано допускают малые торические вырождения?»

3.2 Утверждение

Теорема 3.2.1. *Следующие семейства трёхмерных неторических гладких многообразий Фано, и только они, имеют малые торические вырождения (обозначения соотв. 1.1.3):*

1) 4 *семейства многообразий с группой Пикара* $\mathbb{Z}$*, а именно* Q*,* V_4*,* V_5*,*V_{22}*;*

2) 16 *семейств многообразий с группой Пикара* $\mathbb{Z}^2$*, а именно* $V_{2.n}$*, где* $n = 12, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32$*;*

3) 16 *семейств многообразий с группой Пикара* $\mathbb{Z}^3$*, а именно* $V_{3.n}$*, где* $n = 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$*;*

4) 8 *семейств многообразий с группой Пикара* $\mathbb{Z}^4$*, а именно* $V_{4.n}$*, где* $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$*.*

Все такие вырождения перечислены в разделе 3.4.

Замечание 3.2.2. Апостериори получается, что все гладкие трёхмерные многообразия Фано Y, допускающие малое торическое вырождение, удовлетворяют следующим условиям:

1. Y рационально (см. например [48]),

2. $\rho(Y) \leqslant 4$ (напомним, что у многообразия Фано $\rho(Y) = h^{1,1}(Y)$)

3. $\deg(Y) = (-K_Y)^3 \geqslant 20$,

4. $b(Y) = h^{1,2}(Y) \leqslant 3$,

5. $b(Y) = 3$ в единственном случае многообразия $V_{2.12}$,

6. $b(Y) = 2$ лишь в двух случаях семейств многообразий V_4 и $V_{2.19}$.

3.3 Доказательство

Будем говорить, что гладкое трёхмерное многообразие Фано Y определяется инвариантами $(\rho, r, \deg, b)$, если для всякого гладкого трёхмерного многообразия Фано Y' из равенств $\rho(Y') = \rho(Y)$, $r(Y') = r(Y)$, $\deg(Y') = \deg(Y)$, $b(Y') = b(Y)$ следует, что Y и Y' лежат в одном семействе. Согласно [68] из 105 семейств трёхмерных гладких многообразий Фано не определяются инвариантами $\rho, r, \deg, b$ только 19.

Лемма 3.3.1. *Для всякого трёхмерного нодального многообразия Фано X существует единственное с точностью до деформаций гладкое многообразие Фано Y, т.ч. Y — сглаживание X.*

Доказательство. У X есть сглаживание — гладкое многообразие Фано Y (1.5.26).

Основные инварианты многообразия Y (см. 1.6.4) явно выражаются через инварианты многообразия X (1.5.32, 1.5.35).

Деформационный класс многообразия Y однозначно определяется его основными инвариантами (1.6.5).

□

Следствие 3.3.2. *Пусть Y определяется инвариантами $(\rho, r, \deg, b)$. Тогда трёхмерное нодальное многообразие Фано X является вырождением Y тогда и только тогда когда $\rho(X) = \rho, r(X) = r, \deg(X) = \deg, b(X) = b$. Если же Y не определяется своими инвариантами $(\rho, r, \deg, b)$, то X является вырождением Y тогда и только тогда, когда $\rho(X) = \rho, r(X) = r, \deg(X) = \deg, b(X) = b, d(X) = d$.*

Отметим, что доказательство леммы 3.3.1 работает не только для торических многообразий, но для любых нодальных трёхмерных многообразий Фано (и на случай терминальных горенштейновых особенностей тоже несложно обобщается). Далее мы ограничимся случаем нодальных торических многообразий Фано X [1].

Всего нодальных торических трёхмерных многообразий Фано 100, но 18 из них неособые, и деформацией других неособых многообразий Фано не являются (1.6.5).

Итак, вычислим инварианты сглаживания Y торического нодального многообразия Фано X.

Обозначим символом $\pi : \tilde{X} \to X$ некоторое $MPCP$-разрешение многообразия X (см. 1.4.43), а символом $p(X)$ — количество обыкновенных двойных особенностей на X.

Доказательство. Предположим, что гладкое трёхмерное многообразие

[1] Из-за особенной простоты вычислений, и большего количества приложений. В разделе 3.5 об этом сказано подробнее.

Фано Y вырождается в X.

Как показано в 1.5.32, оснащённые группы Пикара многообразий X и Y изоморфны.

Таким образом, многообразия X и Y, имеют одинаковое число Пикара, одинаковый индекс, одинаковую антиканоническую степень и одинаковый инвариант d. Введём обозначения

$$\rho(X) = \rho(Y) = \rho, \tag{3.3.3}$$

$$r(X) = r(Y) = r, \tag{3.3.4}$$

$$(-K_X)^3 = -(K_Y)^3 = \deg, \tag{3.3.5}$$

$$d(X) = d(Y) = d. \tag{3.3.6}$$

Поскольку многообразие $\tilde{X}$ торическое, $H^3(\tilde{X}, \mathbb{Q}) = 0$.

Соответственно (см. 1.5.33, 1.5.34, 1.5.35):

$$b(Y) = p(X) + \rho(X) - \rho(\tilde{X}) \tag{3.3.7}$$

Обозначим $b = p(X) + \rho(X) - \rho(\tilde{X})$.

Остаётся вычислить инварианты $\rho, r, \deg, b, d$ многообразия X (это делается в разделе 3.7), и найти в таблице [67] единственное семейство гладких многообразий Y с инвариантами $\rho(Y) = \rho, r(Y) = r, \deg(Y) = \deg, b(Y) = b, d(Y) = d$.

$\square$

Следующие соображения позволяют упростить вычисления.

Число Пикара особых нодальных торических многообразий Фано бывает равным 1, 2, 3 и 4 (см 1.6.3, [73] или таблицу в 3.4). Следовательно, гладкие неторические многообразия Фано с числом Пикара $\rho \geqslant 5$ (а именно:

неторическое многообразие степени 28 с $\rho = 5$ и произведения $\mathbb{P}^1 \times S_{d=11-\rho}$ прямой $\mathbb{P}^1$ на поверхность дель Пеццо S_d степени $d \leqslant 5$) малых торических вырождений не имеют.

Для 55 из 82 особых нодальных торических трёхмерных многообразий Фано X существует лишь одно семейство гладких многообразий Фано Y с инвариантами $(\rho, b, r, \deg)(Y) = (\rho, b, r, \deg)(X)$. Для этих многообразий нет необходимости вычислять инвариант $d(X)$, вычисление которого наиболее трудоёмко.

Исключение составляют следующие восемь наборов инвариантов $(\rho, r, \deg, b)$, которым соответствуют следующие 17 типов многообразий Фано:

ρ	deg	b, r	гладкие Y
2	30	$0, 1$	$V_{2.22}[-24], V_{2.24}[-21]$
2	46	$0, 1$	$V_{2.30}[-12], V_{2.31}[-13]$
3	36	$0, 1$	$V_{3.17}[28], V_{3.18}[26]$
3	38	$0, 1$	$V_{3.19}[24], V_{3.20}[28], V_{3.21}[22]$
3	42	$0, 1$	$V_{3.23}[20], V_{3.24}[22]$
4	32	$0, 1$	$V_{4.4}[-40], V_{4.5}[-39]$
2	54	$0, 2$	$V_{2.33}, V_{2.34}$
3	48	$0, 2$	$V_{3.27}, V_{3.28}$

Замечание 3.3.8. Многообразия $V_{2.33}, V_{2.34}, V_{3.27}, V_{3.28}$ сами являются торическими.

Замечание 3.3.9. В предыдущей таблице за каждым гладким многообразием Фано Y в квадратных скобках указан его инвариант $d(Y)$ (см. [68, предложение 7.35]).

3.4 Описание торических вырождений гладких трёхмерных многообразий Фано.

Как было отмечено в следствии 3.3.2, для определения возможных типов торических вырождений трёхмерных многообразий Фано X, надо для каждого трёхмерного нодального торического многообразия Фано X вычислить инварианты $\rho(X), r(X), \deg(X), b(X)$, и возможно $d(X)$. Для этих вычислений была использована комп. программа [2] алгоритм вычислений которой был основан на формулах 1.4.45,1.4.47, 1.4.48. Результаты вычислений приведены в следующей таблице.

В первых 4 столбцах выписаны трёхмерные многообразия Фано Y и их инварианты, вычисленные в работе [68]. В 5 столбце выписаны трёхмерные нодальные торические многообразия X, чьи инварианты совпадают с инвариантами соответствующего гладкого многообразия. В случае, когда многообразие Y не определяется инвариантами $(\rho, r, \deg, b)$, в этом столбце также указан подраздел раздела 3.7, в котором приведены вычисления инварианта $d(X)$, и значение $d(X)$. В случае, когда многообразие Y определяется своими имвариантами $(\rho, r, \deg, b)$, символу $W_{a.b}$ соответствует многообразие с номером $a.b$ в [73]:[3] Наконец, в последнем столбце указаны основные комбинаторные инварианты торического многообразия X — число вершин, число особых точек, и число всех неподвижных точек.

Замечание 3.4.1. Инварианты ρ, b, v, p связаны линейным соотношением

[2] http://www.mi.ras.ru/ galkin/work/NodalToric3foldPicard.gp.

[3] В полной версии, раздел 4.4, таблица на стр. 115–117.

1.5.35:

$$v - p = 3 + \rho - b$$

Замечание 3.4.2. Многообразия $V_{2.34}$, $V_{3.25}, V_{3.26}, V_{3.28}$, $V_{4.9}$ — гладкие торические многообразия, имеющие вырождения в особые торические нодальные многообразия. Остальные гладкие многообразия Фано приведённые в таблице-ответе в этом разделе — не торические.

Замечание 3.4.3. Многообразие Фано $V_{4.13}$ (степени 26) [4] малых торических вырождений не имеет.

Y	ρ	deg	b	идентификатор X	(v, p, f)
V_{22}	1	22	0	$W_{13.1}$	(13,9,13)
V_4	1	32	2	$W_{8.21}$	(8,6,6)
V_5	1	40	0	$W_{7.11}$	(7,3,7)
Q	1	54	0	$W_{5.1}$	(5,1,5)
$V_{2.12}$	2	20	3	$W_{14.1}$	(14,12,12)
$V_{2.17}$	2	24	1	$W_{12.1}$	(12,8,12)
$V_{2.19}$	2	26	2	$W_{11.5}$	(11,8,10)
$V_{2.20}$	2	26	0	$W_{11.3}$	(11,6,12)
$V_{2.20}$	2	26	0	$W_{11.6}$	(11,6,12)
$V_{2.21}$	2	28	0	$W_{10.10}$	(10,5,11)
$V_{2.21}$	2	28	0	$W_{10.13}$	(10,5,11)
$V_{2.21}$	2	28	0	$W_{11.1}$	(11,6,12)

[4]Это многообразие было пропущено в первой версии [66].

Y	ρ	deg	b	идентификатор X	(v,p,f)
$V_{2.23}$	2	30	1	$W_{9.2}$	(9,5,9)
$V_{2.22}$	2	30	0	3.7.2[−24]	(10,5,11)
$V_{2.22}$	2	30	0	3.7.1[−24]	(9,4,10)
$V_{2.24}$	2	30	0	3.7.3[−21]	(9,4,10)
$V_{2.25}$	2	32	1	$W_{8.20}$	(8,4,8)
$V_{2.25}$	2	32	1	$W_{9.1}$	(9,5,9)
$V_{2.26}$	2	34	0	$W_{10.3}$	(10,5,11)
$V_{2.26}$	2	34	0	$W_{8.12}$	(8,3,9)
$V_{2.26}$	2	34	0	$W_{9.4}$	(9,4,10)
$V_{2.27}$	2	38	0	$W_{7.10}$	(7,2,8)
$V_{2.27}$	2	38	0	$W_{8.18}$	(8,3,9)
$V_{2.27}$	2	38	0	$W_{8.19}$	(8,3,9)
$V_{2.28}$	2	40	1	$W_{7.13}$	(7,3,7)
$V_{2.29}$	2	40	0	$W_{7.12}$	(7,2,8)
$V_{2.29}$	2	40	0	$W_{8.6}$	(8,3,9)
$V_{2.30}$	2	46	0	3.7.4[−12]	(6,1,7)
$V_{2.31}$	2	46	0	3.7.5[−13]	(6,1,7)
$V_{2.31}$	2	46	0	3.7.6[−13]	(7,2,8)
$V_{2.32}$	2	48	0	$W_{6.4}$	(6,1,7)
$V_{2.34}$	2	54	0	$W_{6.1}$	(6,1,7)
$V_{3.7}$	3	24	1	$W_{12.2}$	(12,7,13)
$V_{3.10}$	3	26	0	$W_{11.4}$	(11,5,13)
$V_{3.11}$	3	28	1	$W_{10.4}$	(10,5,11)

Y	ρ	deg	b	идентификатор X	(v, p, f)
$V_{3.11}$	3	28	1	$W_{10.8}$	(10,5,11)
$V_{3.12}$	3	28	0	$W_{10.11}$	(10,4,12)
$V_{3.12}$	3	28	0	$W_{11.2}$	(11,5,13)
$V_{3.13}$	3	30	0	$W_{10.2}$	(10,4,12)
$V_{3.13}$	3	30	0	$W_{10.6}$	(10,4,12)
$V_{3.13}$	3	30	0	$W_{9.12}$	(9,3,11)
$V_{3.14}$	3	32	1	$W_{8.2}$	(8,3,9)
$V_{3.15}$	3	32	0	$W_{10.5}$	(10,4,12)
$V_{3.15}$	3	32	0	$W_{9.11}$	(9,3,11)
$V_{3.15}$	3	32	0	$W_{9.13}$	(9,3,11)
$V_{3.15}$	3	32	0	$W_{9.14}$	(9,3,11)
$V_{3.16}$	3	34	0	$W_{8.8}$	(8,2,10)
$V_{3.16}$	3	34	0	$W_{9.8}$	(9,3,11)
$V_{3.16}$	3	34	0	$W_{9.9}$	(9,3,11)
$V_{3.17}$	3	36	0	3.7.7[28]	(8,2,10)
$V_{3.17}$	3	36	0	3.7.8[28]	(8,2,10)
$V_{3.17}$	3	36	0	3.7.9[28]	(9,3,11)
$V_{3.18}$	3	36	0	3.7.10[26]	(8,2,10)
$V_{3.18}$	3	36	0	3.7.11[26]	(9,3,11)
$V_{3.19}$	3	38	0	3.7.12[24]	(7,1,9)
$V_{3.19}$	3	38	0	3.7.13[24]	(8,2,10)
$V_{3.20}$	3	38	0	3.7.14[28]	(7,1,9)
$V_{3.20}$	3	38	0	3.7.15[28]	(8,2,10)

Y	ρ	deg	b	идентификатор X	(v, p, f)
$V_{3.20}$	3	38	0	3.7.16[28]	(8,2,10)
$V_{3.20}$	3	38	0	3.7.17[28]	(9,3,11)
$V_{3.21}$	3	38	0	3.7.18[22]	(8,2,10)
$V_{3.22}$	3	40	0	$W_{7.2}$	(7,1,9)
$V_{3.23}$	3	42	0	3.7.19[20]	(7,1,9)
$V_{3.23}$	3	42	0	3.7.20[20]	(8,2,10)
$V_{3.24}$	3	42	0	3.7.21[22]	(7,1,9)
$V_{3.24}$	3	42	0	3.7.22[22]	(7,1,9)
$V_{3.24}$	3	42	0	3.7.23[22]	(8,2,10)
$V_{3.25}$	3	44	0	$W_{7.9}$	(7,1,9)
$V_{3.26}$	3	46	0	$W_{7.5}$	(7,1,9)
$V_{3.28}$	3	48	0	$W_{7.1}$	(7,1,9)
$V_{4.1}$	4	24	1	$W_{12.3}$	(12,6,14)
$V_{4.2}$	4	28	1	$W_{10.1}$	(10,4,12)
$V_{4.3}$	4	30	0	$W_{10.12}$	(10,3,13)
$V_{4.4}$	4	32	0	3.7.24[−40]	(9,2,12)
$V_{4.5}$	4	32	0	3.7.25[−39]	(9,2,12)
$V_{4.6}$	4	34	0	$W_{10.9}$	(10,3,13)
$V_{4.6}$	4	34	0	$W_{9.15}$	(9,2,12)
$V_{4.7}$	4	36	0	$W_{8.1}$	(8,1,11)
$V_{4.7}$	4	36	0	$W_{8.4}$	(8,1,11)
$V_{4.7}$	4	36	0	$W_{9.16}$	(9,2,12)
$V_{4.8}$	4	38	0	$W_{8.3}$	(8,1,11)

Y	ρ	deg	b	идентификатор X	(v, p, f)
$V_{4.9}$	4	40	0	$W_{8.14}$	(8,1,11)

Для трёхмерных гладких многообразий Фано не вошедших в таблицу малых торических вырождений не существует, так как ни одно из трёхмерных нодальных торических многообразий Фано не имеет тех же инвариантов.

3.5 Следствия

При сравнении простых численных инвариантов X и Y мы использовали классификацию гладких трёхмерных многообразий Фано.

В случае, если бы эта классификация не была заранее известной, мы могли бы её частично восстановить — доказать, что существуют гладкие многообразия Фано Y с инвариантами $\mathrm{Pic}_E(Y) = \mathrm{Pic}_E(X)$, и $b = b(X)$, где X — какое-то известное нам нодальное многообразие Фано (торическое, например).

Кроме этих „классических" инвариантов мы можем определить и некоторые другие.

Предложение 3.5.1. *У горенштейного торического многообразия Фано X с изолированными особенностями существует неособое антиканоническое сечение $S \in |-K_X|$, являющееся многообразием Калаби–Яу.*

Доказательство. Это простое следствие теоремы Бертини. □

Следствие 3.5.2. *У гладкого многообразия Фано Y являющегося сглаживанием горенштейнового торического многообразия Фано с изолиро-*

ванными особенностями существует гладкое антиканоническое сечение $S' \in |-K_Y|$.

Доказательство. Это следствие 3.5.1, 1.5.22 и 1.5.23. $\square$

Пусть $\phi : \tilde{X} \to X$ — какое-нибудь $MPCP$-разрешение.

Предложение 3.5.3. *I-ряд для Y ограниченный с* $\mathrm{Pic}(Y)$ *на S' равен I-ряду для $\tilde{X}$ ограниченному с* $\mathrm{Im}[\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\tilde{X})]$ *на* $\phi^{-1}(S) \simeq S$.

Доказательство. Согласно 3.5.1 общий элемент S антиканонической линейной системы $|-K_X|$ на трёхмерном нодальном торическом многообразии Фано X — это гладкая $K3$-поверхность S. Как показано в 1.5.22, гладкие антиканонические сечения многообразия X и его сглаживания Y лежат в одном деформационном классе. Группа Пикара $\mathrm{Pic}\, X$ изоморфна $\mathrm{Pic}\, Y$ (1.5.30). Пусть $\mathcal{H} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$. Тогда $I^{\tilde{X}\to S}_{\mathcal{H}_S,1} = I^{Y\to S'}_{\mathcal{H}_{S'},1}$. $\square$

Пример 3.5.4. Рассмотрим многочлен Лорана

$$f_1 = xyz + x + y + z + x^{-1} + y^{-1} + z^{-1},$$

его многогранник Ньютона $\Delta = \Delta(f)$, и соответствующее торическое многообразие $X = \mathbb{P}(\Delta^\vee)$. Явно X строится так: раздуем точку на многообразии $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; получим гладкое многообразие W, которое будет многообразием почти Фано, но не Фано — собственные прообразы трёх координатных прямых не пересекаются с $-K_W$; стянем их, получившееся многообразие Фано — это X, образы стянутых прямых — три обыкновенные двойные особенности, а W — $MPCP$-разрешение X. Три обыкновенные двойные особенности многообразия X соответствуют трём граням-параллелограммам (xyz, x, y, z^{-1}), (xyz, x, z, y^{-1}) и (xyz, y, z, x^{-1}).

Антиканоническая степень у X такая же, как у W в точке, то есть $\deg(X) = 2^3 \cdot 6 - 8 = 40$. Пусть Y — гладкое многообразие Фано, являющееся сглаживанием X.

Рассмотрим общий многочлен Лорана с многогранником Ньютона Δ:

$$f_a = \sum a_m x^m = a_{xyz}xyz + a_x x + a_y y + a_z z + \\ + a_{x^{-1}}x^{-1} + a_{y^{-1}}y^{-1} + a_{z^{-1}}z^{-1}.$$

Он соответствует дивизору $\sum b_m D_m \in \mathrm{Pic}(W) \otimes \mathbb{C}$, такому что $a_m = e^{2\pi i b_m}$. Такой дивизор является обратным образом дивизора Картье на X, если выполнены три линейных условия, соответствующие локальной главности в трёх нодальных точках

$$b_{xyz} + b_{x^{-1}} = b_y + b_z,$$

$$b_{xyz} + b_{y^{-1}} = b_x + b_y,$$

$$b_{xyz} + b_{z^{-1}} = b_x + b_z.$$

Главные дивизоры имеют вид

$$(b_x + b_y + b_z)xyz + b_x x + b_y y + b_z z - b_x x^{-1} - b_y y^{-1} - b_z z^{-1}.$$

Многообразие X имеет индекс 2, и образующая представляется дивизором $-D_{xyz} + D_{x^{-1}} + D_{y^{-1}} + D_{z^{-1}}$. С точностью до главных дивизоров, многочлен Лорана соответствующий α-кратной образующей $\mathrm{Pic}(X)$, имеет вид $f_t = t(xyz + x + y + z + x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}), t = e^{\pi i \alpha}$.

Согласно 1.7.15 $I^W_{-K_W,1}(t) = \Phi_{f+\alpha}(\tilde{t})$, то есть I-ряд для W равен Φ_{f_1} с точностью до перенормировки[5]. Вычислим Φ_{f_1}. Произведения мономов $\prod_{n_i}(x^{m_i})^{n_i}$ дают ненулевой вклад в ряд свободных членов, если $\sum n_i m_i =$

[5]Как мы увидим, индекс W и X равен 2, поэтому перенормировка тривиальна: $\alpha = 0, \tilde{t} = t$.

0; в нашем случае положим $n_{xyz}=d, n_x=a, n_y=b, n_z=c$. Тогда $n_{x^{-1}}=a+d, n_{y^{-1}}=b+d, n_{z^{-1}}=c+d$. Отсюда

$$\Phi_{f_1}=\sum_{a,b,c,d\geqslant 0}\frac{(2a+2b+2c+4d)!}{a!b!c!d!(a+d)!(b+d)!(c+d)!}t^{2a+2b+2c+4d}=$$
$$=1+6t^2+114t^4+2940t^6+87570t^8+\ldots \quad (3.5.5)$$

По 3.5.2 у многообразия Y общее антиканоническое сечение $S'\in|-K_Y|$ неособое. Применяя предложение 3.5.3, получим что ограниченный с Y регуляризованный I-ряд $I^{Y\to S'}_{-K_Y,1}$ для гладкого антиканонического сечения Y равен Φ_f.

Сравнив с 1.7.16, убеждаемся, что мы получили ограниченный с $G(2,5)$ регуляризованный I-ряд для поверхности $K3$, являющейся сечением $G(2,5)$ квадрикой и тремя гиперплоскостями.

Таким образом, мы вычислили I-ряд сглаживания Y многообразия X не пользуясь геометрией. На самом деле, легко видеть, что сглаживание многообразия X является многообразием V_5, так как это единственное трёхмерное многообразие Фано с $(\rho, r, \deg, b)=(1,2,40,0)$. Так как V_5 является сечением $G(2,5)$ тремя плоскостями, его I-ряд можно вычислить применив квантовую формулу Лефшеца 1.7.3 к I-ряду $G(2,5)$ выписанному в 1.7.16,1.7.27. Легко проверить, что после применения 1.7.3 к 1.7.16 получится 3.5.5.

3.6 Обобщения

К сожалению, сглаживанием нодальных торических многообразий являются только половина из трёхмерных многообразий Фано. В частности, единственное вырождающееся в нодальное торическое семейство многообразий Фано основной серии индекса 1 — это V_{22}. Отметим, что для нодальных торических многообразий, проективная нормальность и гладкость общего антиканонического сечения доказываются совсем просто, и можно показать, что эти свойства сохраняются при сглаживании (например, как в 1.5.22). Все сглаживания Y получились рациональными. Тем же методом можно получить более широкий класс сглаживаний, если кроме самих торических многообразий рассматривать ещё и полные пересечения в них (с горенштейновыми терминальными особенностями, например) — они тоже имеют сглаживания (1.5.27), верны аналогичные соотношения между инвариантами сглаживания и вырождения, для них тоже несложно вычислить когомологии ([19]), многочлен Гильберта, да и теория Громова–Виттена для полных пересечений в торических многообразиях изучена столь же хорошо, как и для самих торических многообразий. При этом бирациональный класс полного пересечения в торическом многообразии бывает уже произвольным. Многие из невырождающихся в нодальные торические многообразий сами являются обычными полными пересечениями во взвешенных проективных пространствах. Например, Батырев и Крёйзер нашли все нодальные полуантиканонические гиперповерхности в торических многообразиях Фано индекса 2: всего их около 160, из них 100 — это конусы над изучавшимися в этой главе торическими многообразиями, а оставшиеся 60 почти покрывают все невырождающиеся в нодальные торические многообразия Фано.

Другое направление обобщений — торические многообразия с произвольными горенштейновыми особенностями. Для пары нетерминальных горенштейновых торических трёхмерных многообразий Фано $\mathbb{P}(\Delta_{16}), \mathbb{P}(\Delta_{18})$ Пржиялковский показал ([74]), что некоторые многочлены Лорана f_{16}, f_{18} с носителями в соответствующих многогранниках Δ_{16}, Δ_{18} являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга для гладких трёхмерных многообразий Фано основной серии V_{16} и V_{18}; поэтому, не исключено что метод торических вырождений работает для более общего класса особенностей (возможно, для всех горенштейновых), хотя про сами пары $(\mathbb{P}(\Delta_{16}), V_{16})$ и $(\mathbb{P}(\Delta_{18}), V_{18})$ наверняка пока не известно являются ли они вырождениями.

3.7 Вычисление

Обозначение. Пусть M — целочисленная матрица размера $3 \times v$. Обозначим через $\Delta(M)$ многогранник, являющийся выпуклой оболочкой векторов-столбцов M. Пусть M выбрана так, что 0 лежит строго внутри $\Delta(M)$, и ни один из столбцов M не лежит в выпуклой оболочке остальных. Через $\mathbb{P}(M)$ обозначим торическое многообразие Фано, соответствующее многограннику $\Delta(M)$. Пусть D_i — инвариантные дивизоры Вейля, соответствующие i-ой вершине многогранника $\Delta(M)$, $G_1, \ldots, G_\rho$ — образующие группы $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(M))$.

Для вычисления инварианта d сначала мы находим всю оснащённую группу Пикара $\mathrm{Pic}_E(\mathbb{P}(M))$, затем вычисляем дискриминант. Чтобы вычислить $\mathrm{Pic}_E(\mathbb{P}(M))$ мы используем соображение 1.4.48 — вычисляем кольцо $H^\bullet(\tilde{T}(M))$, оснащённую группу Пикара $\mathrm{Pic}_E(\tilde{T}(M))$ $MPCP$-разрешения[6] $\phi : \tilde{T}(M) \to \mathbb{P}(M)$, затем получаем структуру оснащённой

[6]Мы берём произвольное максимальное крепантное разрешение, как объяснялось в 1.4.48, ответ получится одинаковый для проективного и непроективного разрешения.

решётки на $\mathrm{Pic}_E(\mathbb{P}(M))$ ограничением с $\mathrm{Pic}_E(\tilde{T}(M))$.

Многообразия с инвариантами $(\rho = 2, \deg = 30, b = 0)$

Случай 3.7.1 $(v = 9, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1 + D_4 + D_5 + D_8$, $G_2 = -D_1 + D_6 + D_9$.

$$int(aG_1 + bG_2, aG_1 + bG_2, aG_1 + bG_2) = (aG_1 + bG_2)^3 = a^3 + 6ba^2 - 2b^3$$

$$-K = G_1 + 2G_2$$

$$d = -24$$

Случай 3.7.2 $(v = 10, f = 11)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_7 + D_8 + D_9$, $G_2 = D_2 + D_3 + D_5 - D_6 + D_{10}$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = -2a^3 + 6ba^2 - 3b^3$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2$$

$$d = -24$$

Случай 3.7.3 $(v = 9, f = 10)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = -D_1 + 2D_3 + D_4 - D_7 + D_8$, $G_2 = D_1 + D_7 + D_9$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = 3ba^2 + 6b^2a$$

$$-K = G_1 + G_2$$

$$d = -21$$

Многообразия с инвариантами $(\rho = 2, \deg = 46, b = 0)$

Случай 3.7.4 $(v = 6, f = 7)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 - D_3$, $G_2 = D_3 + D_5$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = a^3 - 3ba^2 + 3b^2a + b^3$$

$$-K = G_1 + 3G_2$$

$$d = -12$$

Случай 3.7.5 ($v = 6, f = 7$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 - D_2$, $G_2 = D_2 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = a^3 - 3ba^2 + 2b^3$$

$$-K = G_1 + 3G_2$$

$$d = -13$$

Случай 3.7.6 ($v = 7, f = 8$).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_2 - D_3 + D_5$, $G_2 = D_3 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = -a^3 + 3b^2a$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2$$

$$d = -13$$

Многообразия с инвариантами $(\rho = 3, \deg = 36, b = 0)$

Случай 3.7.7 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_3 + D_5$, $G_3 = D_2 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b + 3c)a^2 + 6cba$$

$$-K = 2G_1 + G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 3.7.8 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 + D_5$, $G_2 = D_3 + D_7$, $G_3 = -D_3 + D_4 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b^2 - 3c^2)a + (3cb^2 - 6c^2b + 3c^3)$$

$$-K = 2G_1 + 3G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 3.7.9 $(v = 9, f = 11)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_3 + D_5 + D_8$, $G_3 = -D_5 + D_7 + D_9$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 3ba^2 + (6cb - 6c^2)a$$

$$-K = 2G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 3.7.10 $(v = 8, f = 10)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_2 + D_4$, $G_2 = D_5$, $G_3 = -D_2 + D_3 + D_7$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 + (3b + 3c)a^2 + (6cb - 3c^2)a + (-3c^2b + c^3)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 26$$

Случай 3.7.11 $(v = 9, f = 11)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_3 + D_4$, $G_2 = D_1 + D_3 + D_8$, $G_3 = -D_1 - D_3 + D_7 + D_9$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 2a^3 + 6ba^2 + (6b^2 - 6c^2)a + (b^3 - 3c^2b + 2c^3)$$

$$-K = 2G_1 + G_2 + G_3$$

$$d = 26$$

Многообразия с инвариантами $(\rho = 3, \deg = 38, b = 0)$

Случай 3.7.12 $(v = 7, f = 9)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_2$, $G_3 = D_5 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 - 3ca^2 + 3c^2a + (b^3 - 3cb^2 + 3c^2b)$$

$$-K = G_1 + G_2 + 3G_3$$

$$d = 24$$

Случай 3.7.13 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_2 + D_5$, $G_2 = -D_1 - D_2 + D_6$, $G_3 = D_1 + D_7$.

$$(aG_1+bG_2+cG_3)^3 = a^3+(-3b+3c)a^2+(-3b^2+6cb-3c^2)a+(-2b^3+3cb^2-3c^2b+c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 3G_2 + 2G_3$$

$$d = 24$$

Случай 3.7.14 $(v = 7, f = 9)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_4 - D_3$, $G_3 = D_3 + D_7$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -a^3 - 3ba^2 + (-3b^2 + 3c^2)a + (-3cb^2 + 3c^2b)$$

$$-K = G_1 + G_2 + 3G_3$$

$$d = 28$$

Случай 3.7.15 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = -D_3 + D_4 + D_5$, $G_2 = D_3 + D_7$, $G_3 = D_4 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (-3b - 3c)a^2 + (3b^2 - 3c^2)a + (3cb^2 - c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 3.7.16 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 + D_6$, $G_2 = D_7 - D_4$, $G_3 = D_2 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 3ca^2 - 3b^2a + (b^3 - c^3)$$

$$-K = 3G_1 + G_2 + 2G_3$$

$$d = 28$$

Случай 3.7.17 $(v = 9, f = 11)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_3 + D_5$, $G_2 = D_3 + D_4 + D_6$, $G_3 = -D_3 + D_7 + D_9$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = 3ba^2 + (6b^2 - 3c^2)a + (2b^3 - 3c^2b + c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 28$$

Случай 3.7.18 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_3 + D_5$, $G_3 = -D_3 + D_4 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b^2 + 6cb - 3c^2)a + (3cb^2 + 3c^2b - c^3)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 22$$

Многообразия с инвариантами $(\rho = 3, \deg = 42, b = 0)$

Случай 3.7.19 $(v = 7, f = 9)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_5 - D_2$, $G_3 = D_2 + D_6$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = a^3 - 3ca^2 + (-3b^2 + 6cb)a + (b^3 - 3cb^2 + 2c^3)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + 3G_3$$

$$d = 20$$

Случай 3.7.20 $(v = 8, f = 10)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_2 - D_4 + D_5$, $G_2 = D_4 + D_6$, $G_3 = D_2 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -a^3 - 3ca^2 + 3b^2a + (3cb^2 - 3c^2b + c^3)$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 20$$

Случай 3.7.21 $(v = 7, f = 9)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_4 - D_3$, $G_2 = D_5$, $G_3 = D_3 + D_7$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -3a^3 + (-6b + 3c)a^2 + (-3b^2 + 6cb)a$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + 4G_3$$

$$d = 22$$

Случай 3.7.22 $(v = 7, f = 9)$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1,\; G_2 = D_2,\; G_3 = D_4 + D_6.$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = (3b^2 + 6cb)a + (3cb^2 + 3c^2 b)$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + G_3$$

$$d = 22$$

Случай 3.7.23 $(v = 8, f = 10)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = -D_3 + D_4 + D_5, G_2 = D_3 + D_7, G_3 = D_3 - D_4 + D_8.$$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3)^3 = -3a^3 + (3b + 3c)a^2 - 3c^2 b$$

$$-K = 4G_1 + 3G_2 + 2G_3$$

$$d = 22$$

Многообразия с инвариантами $(\rho = 4, \deg = 32, b = 0)$

Случай 3.7.24 $(v = 9, f = 12)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_3,\; G_2 = D_5 + D_6,\; G_3 = -D_1 - D_5 + D_8,\; G_4 = D_1 + D_5 + D_9.$

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3 + dG_4)^3 = a^3 + (-3b + (3c - 6d))a^2 +$$
$$+ (3b^2 + (-6c + 12d)b + (-12dc + 12d^2))a +$$
$$+ ((-6c^2 + 12dc - 6d^2)b + (-6dc^2 + 12d^2c - 6d^3))$$

$$-K = 2G_1 + G_2 + G_3 - G_4$$

$$d = -40$$

Случай 3.7.25 $(v = 9, f = 12)$**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1$, $G_2 = D_4 + D_6$, $G_3 = D_7$, $G_4 = -D_4 + D_5 + D_8$.

$$(aG_1 + bG_2 + cG_3 + dG_4)^3 = (6cb + (-3c^2 + 6dc - 6d^2))a +$$
$$+ ((6dc - 3d^2)b + (-3dc^2 + 6d^2c - 4d^3))$$

$$-K = G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4$$

$$d = -39$$

Приложение A

Публикации по теме диссертации

(A1) *Галкин С. С.; Голышев В. В.* Квантовые когомологии грассманианов и круговые поля // УМН — 2006 — т.61, No. 1(367) — 175–176.

(A2) *Галкин С. С.* Торические поверхности и экстремальные эллиптические пучки // Деп. в ВИНИТИ 27.02.08, 168-В 2008.

(A3) *Галкин С. С.* Малые торические вырождения трёхмерных многообразий Фано // Деп. в ВИНИТИ 27.02.08, 167-В 2008.

Литература

[1] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves*, Inv. Math. 166, No. 3 (2006), 537–582 arXiv:math.AG/0506166.

[2] V. V. Batyrev, *Quantum Cohomology Rings of Toric Manifolds*, arXiv:alg-geom/9310004.

[3] V. V. Batyrev. *Dual polyhedra and mirror symmetry for calabi-yau hypersurfaces in toric varieties*, *J. Algebraic Geom.*, 3:493–535 (1994), arXiv:alg-geom/9310003.

[4] V. V. Batyrev, *Toric Degenerations of Fano Varieties and Constructing Mirror Manifolds*, Collino, Alberto (ed.) et al., The Fano conference. Papers of the conference, Torino, Italy, September 29–October 5, 2002. Torino: Universita di Torino, Dipartimento di Matematica. 109–122 (2004), arXiv:alg-geom/9712034.

[5] V. V. Batyrev, L. A. Borisov, *On Calabi-Yau complete intersections in toric varieties*, Andreatta, Marco (ed.) et al., Higher dimensional complex varieties. Proceedings of the international conference, Trento, Italy, June 15–24, 1994. Berlin: Walter de Gruyter. 39–65 (1996), arXiv:alg-geom/9412017.

[6] V. V. Batyrev, L. A. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers*, Invent. Math. 126, No.1 (1996), 183–203, arXiv:alg-geom/9509009.

[7] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, *Two Proofs of a Conjecture of Hori and Vafa*, Duke Math. J. 126, No. 1 (2005), 101–136, arXiv:math.AG/0304403.

[8] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for calabi-yau complete intersections in grassmannians*, arXiv:alg-geom/9710022.

[9] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, Acta Math. 184, No. 1 (2000), 1–39, arXiv:math.AG/9803108.

[10] *Generalized Hypergeometric Functions and Rational Curves on Calabi-Yau Complete Intersections in Toric Varieties*, Commun. Math. Phys. 168 (1995) 493, arXiv:alg-geom/9307010.

[11] A. Beauville, *Le nombre minimum de fibres singulieres d'une courbe stable sur* $\mathbb{P}^1$, Asterisque 86, 97-108 (1981), http://math.unice.fr/∼beauvill/pubs/fibsing.pdf

[12] A. Beauville, *Les familles stables de courbes elliptiques sur* $\mathbb{P}^1$ *admettant 4 fibres singulieres*, C. R. Acad. Sc. Paris 294, 657-660 (1982), http://math.unice.fr/∼beauvill/pubs/ellss.pdf

[13] K. Behrend, *Gromov–Witten invariants in algebraic geometry*, Invent. Math., 127(3), 601–617 (1997) arXiv:alg-geom/9601011.

[14] A. Buch, *Quantum cohomology of Grassmannians*, Compos. Math. 137, No.2, 227-235 (2003), arXiv:math.AG/0106268.

[15] H. Clemens, *Degeneration of Kahler manifolds*, Duke Math. J. Volume 44, Number 2 (1977), 215–290.

[16] H. Clemens, *Double solids*, Adv. Math. 47 (1983), 107–230.

[17] B. Crauder, R. Miranda, *Quantum Cohomology of Rational Surfaces*, arXiv:alg-geom/9410028.

[18] В. И. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, Успехи матем. наук, т. 33, вып. 2 (200) (1978), 85–134, http://mi.mathnet.ru/umn/33/2/85

[19] В. И. Данилов, А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа–Делиня*, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 50, No. 5 (1986), 925–945, http://mi.mathnet.ru/izv/50/5/925

[20] P. Deligne, *Theoreme de Lefschetz et criteres de degenerescence de suites spectrales*, Publications Mathematiques de l'IHES, 35 (1968), p. 107-126 numdam:PMIHES_1968__35__107_0

[21] M. Demazure, *Surfaces de del Pezzo*, Lect. Notes Math, 777, 23-69.

[22] B. Dubrovin, *Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds*, Proc. ICM Berlin 1998, arXiv:math/9807034.

[23] P. Du Val, *On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction, I, II and III*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 30 (1934), 453–459, 460–465, 483–491

[24] G. Fano, *Sulle varietá algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, // in “Atti Congr. Int. Bologna **IV**”, 1929 — 115–121.

[25] G. Fano, *Su alcune varietá algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche*, // in “Scritti Mat. offerti a L.Berzolari Ist. Mat. R. Univ. Pavia”, 1936 — 329–349.

[26] G. Fano, *Sulle varietá algebriche a tre dimensioni a curve sezioni canoniche* // in “Mem. Accad. d'Italiana **VIII**”, 1937 — 23–64.

[27] G. Fano, *Su alcune varietá algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve sezioni canoniche* // Comment. Math. Helv. — 1942 — No. 14. — 202–211.

[28] R. Friedman, *Simultaneous resolutions of threefold double points.*, *Math.Ann.*, 274(4):671–689 (1986).

[29] M. Fukae, Y. Yamada, S.-K. Yang, *Mordell–Weil Lattice via String Junctions*, Nucl.Phys. B572 (2000) 71–94, arXiv:hep-th/9909122v1.

[30] M. Fukae, *Monodromies of rational elliptic surfaces and extremal elliptic $K3$ surfaces*, arXiv:math/0205062.

[31] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1993).

[32] W. Fulton, C. Woodward, *On the quantum product of Schubert classes*, J. Algebr. Geom. 13, No. 4 (2004), 641–661, arXiv:math.AG/0112183.

[33] A. Gathmann, *Absolute and relative Gromov-Witten invariants of very ample hypersurfaces*, Duke Math. J. 115, No. 2 (2002), 171–203, arXiv:math.AG/0009190.

[34] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser, Boston (1994).

[35] A. B. Givental. *Homological geometry and mirror symmetry.* In *Proceedings of the ICM, Zürich 1994*, volume 1, pages 472 – 480. Birkhäuser (1995), http://math.berkeley.edu/∼giventh/papers/hg.pdf

[36] A. B. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Kashiwara, Masaki (ed.) et al., Topological field theory, primitive forms and related topics. Proceedings of the 38th Taniguchi symposium, Kyoto, Japan, December 9–13, 1996 Boston, MA: Birkhauser. Prog. Math. 160, 141–175, arXiv:alg-geom/9701016.

[37] V. V. Golyshev, *Classification problems and mirror duality*, LMS Lecture Note, ed. N. Young, 338 (2007), arXiv:math.AG/0510287.

[38] V. V. Golyshev, *Spectra and strains*, arXiv:0801.0432.

[39] N. Gonciulea, V. Lakshmibai, *Degenerations of flag and schubert varieties to toric varieties*, *Transform. Groups*, 1(3):215 – 248 (1996).

[40] N. Gonciulea, V. Lakshmibai, *Schubert varieties, toric varieties and ladder determinantal varieties*, *Ann. Inst. Fourier*, t.47:1013 – 1064 (1997), http://www.math.neu.edu/∼lakshmibai/mega.pdf.

[41] L. Gottsche, R. Pandharipande, *The quantum cohomology of blow-ups of* $\mathbb{P}^2$ *and enumerative geometry*, arXiv:alg-geom/9611012.

[42] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, М.: Мир (1981)

[43] H. Hori, C. Vafa, *Mirror symmetry*, arXiv:hep-th/0002222.

[44] В. А. Исковских, *Многообразия Фано I*, Изв. АН СССР, Сер. Мат., **41**:3 (1977), 516–562, http://mi.mathnet.ru/izv/41/3/516.

[45] В. А. Исковских, *Многообразия Фано II*, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 42 (1978), 504–549, http://mi.mathnet.ru/izv/42/3/506.

[46] В. А. Исковских, *Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий*, Итоги науки и техники, сер. Современные проблемы математики. Т. 12, М.: ВИНИТИ, с. 59–158 (1979).

[47] В. А. Исковских, *Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано*, М.: Московский университет (1988).

[48] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov, *Fano Varieties*, volume 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.* Springer-Verlag, Berlin.

[49] P. Jahnke, I. Radloff, *Terminal fano threefolds and their smoothings*, arXiv:math/0601769.

[50] Б. В. Карпов, Д. Ю. Ногин, *Трехблочные исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо*, Изв. РАН. Сер. матем. 62:3 (1998), 3–38, arXiv:alg-geom/9703027.

[51] A. Kasprzyk, *Toric fano 3-folds with terminal singularities*, *Tohoku Math. J.*, Volume 58, Number 1 (2006), 101–121. arXiv:math/0311284.

[52] Y. Kawamata, *Deformations of canonical singularities*, J. Am. Math. Soc. 12, No.1 (1999), 85–92 arXiv:alg-geom/9712018.

[53] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Algebraic Geom., Sendai, June 24-29, 1985: Symp. Tokyo; Amsterdam e.a.1987 p. 283–360.

[54] S. Kleiman, *Towards a numerical theory of ampleness*, Ann. Math, 94, 1, 293–344 (1966).

[55] K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces II*, Ann. Math. 77, 563–626 (1963).

[56] J. Kollár, *Singularities of pairs*, // in "Algebraic geometry — Santa Cruz (1995), Proc. Symp. Pure Math. AMS", No. 62 — 221–287 (1997), arXiv:alg-geom/9601026.

[57] M. L. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proc. International Congress of Mathematicians (Zürich 1994), Birkhäuzer, Basel, 120–139 (1997), arXiv:alg-geom/9411018.

[58] M. L. Kontsevich, Yu. I. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys. 164 (1994) 525–562, arXiv:hep-th/9402147.

[59] M. Kreuzer, H. Skarke, *Classification of reflexive polyhedra in three dimensions. Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2:847 (1998), arXiv:hep-th/9805190.

[60] В. С. Куликов, П. Ф. Курчанов *Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления ВИНИТИ, т. 36 (1989).

[61] M. Kreuzer, H. Skarke, *PALP: A Package for Analyzing Lattice Polytopes with Applications to Toric Geometry*, Computer Physics Communications, 157:87 (2004), arXiv:math/0204356.

[62] V. Lakshmibai, *Degenerations of flag varieties to toric varieties. C. R. Acad. Sci. Paris*, 321 (no. 9):1229–1234 (1995).

[63] Ю. И. Манин, *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей*, -М.: Издательство "Факториал Пресс" (2002).

[64] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program* — Universitext, Springer, 2002 — 478 pp.

[65] R. Miranda, U. Persson, *On Extremal Rational Elliptic Surfaces*, Math. Z., 193, 537–558 (1986).

[66] S. Mori, S. Mukai, *Classification of fano 3-folds with* $b_2 \geqslant 2$, *Manuscr. Math.*, **36**:147–162 (1981). Erratum **110**: 407 (2003).

[67] S.Mori, S.Mukai, *On fano 3-folds with* $b_2 \geqslant 2$, *Algebraic varieties and analytic varieties, Proc. Symp., Tokyo 1981, Adv. Stud. Pure Math.*, 1:101–129 (1983), http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mukai/paper/Fano1983.pdf

[68] S.Mori, S.Mukai, *Classification of Fano 3-folds with* $B_2 > 2$, *I*, 'Algebraic and Topological Theories – to the memory of Dr. Takehiko Miyata', (M. Nagata ed.), Kinokuniya, 496–545 (1985), http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mukai/paper/Fano1985.pdf.

[69] S. Mukai, *Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex* 3, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 86 (1989), 3000–3002

[70] S. Mukai, *Fano 3-folds*, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 179, 255–263 (1992).

[71] Y. Namikawa, *Smoothing fano 3-folds.*, *J Alg. Geom.*, 6:307–324 (1997).

[72] A. Neron, *Modeles minimaux des varieties abeliennes sur les corps locaux et globaux*, Publ. I.H.E.S., 21 (1964).

[73] B. Nill, *Gorenstein toric fano varieties*, *manuscripta mathematica*, 116:183 (2005). Диссертация (подробная): http://w210.ub.uni-tuebingen.de/dbt/volltexte/2005/1888/pdf/nill.pdf.

[74] В. В. Пржиялковский, *On Landau–Ginzburg models for Fano varieties*, Comm. Num. Th. Phys., в печати, arXiv:0707.3758.

[75] В. В. Пржиялковский, *Минимальное кольцо Громова–Виттена*, Известия РАН, Сер. Мат., в печати (Деп. в ВИНИТИ 16.10.07, 961-В 2007), arXiv:0710.4084.

[76] V. Przyjalkowski, *Quantum cohomology of smooth complete intersections in weighted projective spaces and singular toric varieties*, arXiv:math/0507232v3.

[77] M. Reid, *Decomposition of toric morphisms*, in Arithmetic and Geometry, papers dedicated to I.R. Shafarevich, Birkha"user 1983, Vol II, 395–418.

[78] M. Reid, *The moduli space of* 3*-folds with* $K = 0$ *may nevertheless be irreducible*, *Math. Ann.*, 278:329–334 (1987).

[79] M. Reid, *Young person's guide to canonical singularities*, In Algebraic Geometry Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987).

[80] T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan, 24 (1972), 20–59.

[81] B. Siebert, G. Tian, *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*, Asian J. Math. 1, No.4, 679-695 (1997), arXiv:alg-geom/9403010.

[82] J. Stienstra, F. Beukers, *On the Picard–Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic $K3$-surfaces*, Mathematische Annalen 271 (1985) p.269–304.

[83] B. Sturmfels, *Algorithms in invariant theory*, *Texts and Monographs in Symbolic Computation*, 1993.

[84] B. Sturmfels, *Gröbner bases and convex polyhedra American Mathematical Society*, 8, 1996.

[85] J. Tate, *On the conjecture of Birch and Swinnertod-Dyer*, Sem. Bourbaki Exp. 306, 1–26 (1966).

[86] K. Ueda, *Homological mirror symmetry for toric Del Pezzo surfaces*, arXiv:math.AG/0411654.

[87] C. Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry*, Cambridge Studies in Adv. Math. 77, CUP, 2003.