КВАНТОВЫЕ КОГОМОЛОГИИ ГРАССМАНИАНОВ И КРУГОВЫЕ ПОЛЯ

С.С. ГАЛКИН, В.В. ГОЛЫШЕВ

Аннотация. Мы рассматриваем конечномерную $\mathbb{Q}$ —алгебру, являющуюся специализацией алгебры малых квантовых когомологий грассманиана $G(l,N)$ при $q=1$. Мы показываем, что собственные числа оператора умножения на класс Шуберта являются значениями соответствующей симметрической функции на наборах корней из единицы.

Квантовые когомологии грассманианов [1]**.** Пусть $1 \le l < N$ — пара целых чисел, $G=G(l,N)$ — грассманиан l –мерных подпространств в N –мерном векторном пространстве. Через S обозначим тавтологическое подрасслоение на G. Обозначим через Ω_λ класс Шуберта в $H^*(G)$, соответствующий разбиению λ. Трехточечный коррелятор $\langle \Omega_\lambda, \Omega_\mu, \Omega_\nu \rangle_d$ определяется как число рациональных кривых степени d, пересекающих общие представители этих классов. Алгебра $QH^*(G,\mathbb{Z})$ является $\mathbb{Z}[q]$ –модулем, изоморфным $H^*(G,Z)_\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}[q]$ и снабженным следующей структурой умножения. Обозначим классы Шуберта в этой алгебре через σ_λ, так что $\sigma_\lambda = \Omega_\lambda \otimes 1$. Положим

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{\nu, d \ge 0} \langle \sigma_\lambda, \sigma_\mu, \sigma_{\nu^\vee} \rangle_d \, q^d \sigma_\nu,$$

где $\nu^\vee$ – разбиение, двойственное к ν.

Пусть ζ – первообразный корень степени N из $(-1)^{l+1}$.

Положим $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $k = N - l$. Пусть Λ — (градуированное) кольцо симметрических функций.

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots].$$

Здесь e_i есть i –ая элементарная симметрическая функция. Пусть h_i — i –ая полная симметрическая функция. Полагая $E(t) = \sum e_i t^i$, $H(t) = \sum h_i t^i$, имеем $E(-t)H(t) = 1$. Результат применения симметрической функции σ к набору аргументов $x_1, \dots, x_n$ будем обозначать $\sigma(x_1, \dots, x_n)$.

Положим еще $\Lambda' = \Lambda/(e_{l+1}, e_{l+2}, \dots)$, $\Lambda_\mathbb{Q} = \Lambda \otimes \mathbb{Q}; \Lambda'_\mathbb{Q} = \Lambda' \otimes \mathbb{Q}$. Наконец, пусть $\Lambda'_K = \Lambda'_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} K$

Теорема 1(Зиберт–Тиан [2]). Определим гомоморфизм колец $ST : \Lambda[q] \longrightarrow QH(G, \mathbb{Z})$ так:

$$ST(q) = 1 \otimes q; ST(e_i) = c_i(S^*) \otimes 1.$$

Тогда ST —эпиморфизм, и

$$\mathrm{Ker}\ ST = (e_{l+1}, e_{l+2}, \dots; h_{N-l+1}, \dots, h_{N-1}, h_N + (-1)^l q).$$

Положим $QH(G,\mathbb{Q}) = QH(G,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ — кольцо рациональных квантовых когомологий. Через $QH(G,\mathbb{Q},1)$ мы обозначаем специализацию кольца $QH(G,\mathbb{Q})$ при $q=1$. Положим $I_1 = (h_{N-l+1}, \dots, h_{N-1}, h_N + (-1)^l)$, тогда разумеется $QH(G,\mathbb{Q},1) = \Lambda'_\mathbb{Q}/I_1$. Аналогично определим K -алгебру $QH(G,K,1) = QH(G,\mathbb{Q},1) \otimes_\mathbb{Q} K$ и идеал $I_1^K = I_1 \otimes K$.

Обозначим через $\theta_1, \dots, \theta_N$ различные корни из 1 степени N.

Пусть $J = j_1 j_2 \dots j_l$ —мультииндекс, нумерующий l –ки различных корней степени N из 1 , так что $j_1 \le \dots \le j_l, j_k \in \{1, \dots, N\}$. Мы будем писать $\theta_J = \{\theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_l}\}$. Мы пишем $\sigma(\zeta\theta_J) = \sigma(\zeta\theta_{j_1}, \dots, \zeta\theta_{j_l})$. Положим $\theta_{\bar{J}} = \{\theta_1, \dots, \theta_N\} \setminus \{\theta_{j_1}, \dots, \theta_{j_l}\}$. Пусть $\phi_J : \Lambda'_K \longrightarrow K$ — гомоморфизм, определенный условием $\phi_J(\sigma) = \sigma(\zeta\theta_J)$.

Обозначим $\mathrm{Ker}\ \phi_J$ через I_J.

Положим $\phi = \bigoplus \phi_J$.

Лемма 2. Если $J \ne J'$, то $I_J \ne I_{J'}$

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 04-01-00613 и 04-01-00702).

Доказательство. В самом деле, если K –точки на $\mathbb{A}^l_K = \mathrm{Spec}\,\Lambda'_K$, соответствующие идеалам I_J и $I_{J'}$ совпадают, то совпадают и их координаты, то есть значения симметрических функций $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ на наборах θ_J и $\theta_{J'}$. Значит, совпадают и сами наборы.

Зафиксируем J.

Лемма 3. Имеем вложение идеалов $I_1^K \subset I_J$.

Доказательство. В самом деле,

$$(\sum e_i(\theta_J)(-t)^i)(\sum e_i(\theta_{\bar{J}})(-t)^i) = 1 - t^N.$$

С другой стороны,

$$(\sum_{i=0}^{l} e_i(\theta_J)(-t)^i)(\sum_{i=0}^{\infty} h_i(\theta_J)t^i) = 1.$$

Значит,

$$(\sum_{i=0}^{k} e_i(\theta_{\bar{J}})(-t)^i) = (\sum_{i=0}^{l} e_i(\theta_J)(-t)^i)(\sum_{i=0}^{k} e_i(\theta_{\bar{J}})(-t)^i)(\sum_{i=0}^{\infty} h_i(\theta_J)t^i) = (1-t^N)(\sum_{i=0}^{\infty} h_i(\theta_J)t^i).$$

Сопоставляя коэффициенты при t^i слева и справа, находим $h_i(\theta_J) = 0$ для $i = k+1, \dots, N-1$, и $h_N(\theta_J) - 1 = 0$. Соответственно, $h_i(\zeta\theta_J) = 0$ для $i = k+1, \dots, N-1$, и $h_N(\zeta\theta_J) = \zeta^N = (-1)^{l+1}$.

Следствие 4. Имеем вложение идеалов $I_1^K \subset \mathrm{Ker}\,\phi$.

Следствие 5. Представление ϕ пропускается через гомоморфизм конечномерных коммутативных алгебр $\psi : QH^*(G, K, 1) \longrightarrow \bigoplus_J K$.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda'_K \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & \bigoplus_J K \\
& QH^*(G,K,1) = \Lambda'_K/I_1^K \arrow[ur, dashed, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

Теорема 6. Гомоморфизм ψ является изоморфизмом.

Доказательство. Нам следует установить равенство $\mathrm{Ker}\,\phi = I_1^K$. По Лемме 3 имеем вложение $I_1^K \subset \mathrm{Ker}\,\phi$. Ясно, что $\mathrm{Ker}\,\phi = \bigcap_J I_J$. Идеал $\mathrm{Ker}\,\phi$, является пересечением различных (по Лемме 2) максимальных идеалов I_J . Как K-векторное пространство в кольце Λ'_K , каждый из них имеет коразмерность равную 1. Следовательно, их пересечение имеет коразмерность над K, равную их числу, т.е. C^l_N. С другой стороны, коразмерность идеала I_1^K равна размерности факторкольца Λ'_K/I_1^K. Согласно теореме Зиберта–Тиана, это кольцо изоморфно кольцу квантовых когомологий, которое является свободным модулем ранга $\dim_K H^*(G, K, 1) = C^l_N$ над K. Следовательно, идеалы $\mathrm{Ker}\,\phi$ и I_1^K совпадают.

Следствие 7. Алгебра Λ'_K/I_1^K полупроста. Она является прямой суммой своих различных простых минимальных идеалов, каждый из которых изоморфен K.

Следствие 8. Алгебра $\Lambda'_{\mathbb{Q}}/I_1$ полупроста. Собственные числа умножений на классы Шуберта лежат в K.

Гипотеза 9. Пусть теперь G — грассманиан максимальных изотропных плоскостей в четномерном пространстве, снабженном невырожденной квадратичной формой, или грассманиан лагранжевых плоскостей в пространстве с симплектической формой. Тогда собственные числа оператора умножения на класс дивизора, действующего в пространстве $QH(G, \mathbb{Q}, 1)$, определены над круговым расширением $\mathbb{Q}$.

Пусть G — обобщенный грассманиан, то есть фактор (классической) простой группы по максимальной параболической подгруппе. Мы не ожидаем, вообще говоря, что собственные числа оператора умножения на класс дивизора будут определены над круговыми полями.

Список литературы

[1] A.Buch, *Quantum cohomology of Grassmannians*, Compos. Math. 137, No.2, 227-235 (2003).

[2] B. Siebert, G. Tian, *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*, Asian J. Math. 1, No.4, 679-695 (1997).