УДК 512.76

Малые торические вырождения трехмерных многообразий Фано

С. С. Галкин

Аннотация. В этой статье показано, какие гладкие трёхмерные многообразия Фано вырождаются в торические многообразия Фано с обыкновенными двойными особенностями.

1. Введение

Мы рассматриваем *малые торические вырождения* трёхмерных многообразий Фано, то есть вырождения гладких трёхмерных многообразий Фано в торические многообразия Фано с обыкновенными двойными особенностями (см. 2.1, 2.2). Такие вырождения имеют приложения в зеркальной симметрии. Зеркальная симметрия для гладких торических многообразий (и полных пересечений в них) была построена в Гивенталем и Батыревым в [1], [2] и [3].

Если у гладкого многообразия Фано Y имеется малое торическое вырождение X, то можно получить кандидата для зеркально симметричных партнеров Y используя торическую конструкцию, и, например, вычислить некоторые инварианты Громова–Виттена многообразия Y.

Так, используя торические вырождения многообразий Грассмана (построенные в [4]) и многообразий частичных флагов (построенные в [5]), в работах [6, 7] были получены кандидаты в зеркальные партнеры к этим однородным многообразиям.

В работе [8] Батыревым было введено понятие малого торического вырождения произвольного многообразия Фано, обобщающее примеры с многообразиями флагов. Полная классификация неособых трёхмерных многообразий Фано, известна благодаря работам Исковских, Шокурова, Мори и Мукаи ([9],[10],[11],[12],см. также [13],[14] и [15]). Там же, в работе [8] был задан естественный вопрос ([8, Question 3.9]): «Какие трёхмерные неторические гладкие многообразия Фано допускают малые торические вырождения?» Теорема 2.10 даёт ответ на этот вопрос. В разделе 6 — пример описанного выше приложения такого вырождения.

2. Утверждение

Все алгебраические многообразия считаются проективными и определёнными над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, если явно не указано обратное.

Если H — абелева группа, символом $H/tors$ будем обозначать фактор группы H по подгруппе кручения.

Символ $\mathrm{Pic}(X)$, как всегда, обозначает группу Пикара многообразия X, а символ $Cl(X)$ — группу классов дивизоров Вейля на X. Символом $\rho(X)$ обозначается число Пикара многообразия X. Символом $b(Y)$ обозначается половина от третьего числа Бетти неособого трёхмерного многообразия Y. Множество особых точек многообразия X обозначается $\mathrm{Sing}\, X$. Класс канонического дивизора на нормальном многообразии X мы обозначаем K_X. Если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на алгебраическом многообразии X, через $h^i(X,\mathcal{F})$ будем обозначать размерности пространств когомологий $H^i(X,\mathcal{F})$, а $\chi(\mathcal{F}) = \sum(-1)^i h^i(X,\mathcal{F})$ — эйлерову характеристику.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS 05-100000-8118 и НШ-1987.2008.1.

Опишем интересующую нас ситуацию.

Определение 2.1. *Деформацией* называется плоский собственный морфизм

$$\pi : \mathcal{X} \to \Delta,$$

где Δ — единичный диск $\{|t| < 1\}$, $\mathcal{X}$ — неприводимое комплексное многообразие. Все рассматриваемые далее деформации проективные (морфизм π проективный над Δ). Обозначим через X_t слои $\mathcal{X}_t$, а через $i_t, t \in \Delta$, мы будем обозначать морфизм вложения слоя $\mathcal{X}_t \to \mathcal{X}$.

Если слои X_t при $t \neq 0$ неособые, то деформация π называется вырождением X_t при $t \neq 0$ и сглаживанием X_0. Если хотя бы один такой морфизм π существует, допуская вольность речи, мы будем говорить, что X_t при $t \neq 0$ является *сглаживанием* X_0, а X_0, соответственно, *вырождением* X_t.

Пусть $\mathcal{L}$ — обратимый пучок на многообразии $\mathcal{X}$ над Δ. Тогда для всех $t \in \Delta$ символом $\mathcal{L}_t = i_t^*\mathcal{L}$ мы будем обозначать ограничение обратимого пучка на слой над точкой t, другими словами определен морфизм $i_t^* : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_t)$.

Определение 2.2 ([8])**.** Вырождение (сглаживание) π называется *малым*, если X_0 имеет лишь горенштейновы терминальные особенности (см. например [16] или [17]), и для всякого $t \in \Delta$ морфизм $i_t^* : \mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Pic}(X_t)$ является изоморфизмом.

Определение 2.3. Если окрестность точки O на многообразии X локально аналитически изоморфна конусу над гладкой двумерной квадрикой в $\mathbb{P}^3$ заданному уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \subset \mathbb{A}^4,$$

точка O называется *обыкновенной двойной особенностью*. Трёхмерное многообразие все особые точки которого являются обыкновенными двойными особенностями называется *нодальным*.

Трёхмерные терминальные горенштейновы торические многообразия нодальны (см. например [18]).

Определение 2.4. Мы будем называть горенштейново многообразие X *многообразием Калаби–Яу*, если $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ и для всех $0 < i < \dim X$ выполнено $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$. В смысле этого определения, многообразия Калаби–Яу размерности 2 это $K3$-поверхности.

Определение 2.5. Неособое многообразие X называется *многообразием Фано*, если антиканонический класс $-K_X$ обилен. Нормальное многообразие X называется особым многообразием Фано, если некоторая кратность антиканонического класса $-nK_X$ является обильным дивизором Картье (в частности, само многообразие X является $\mathbb{Q}$-горенштейновым). Аналогично, (возможно, особое) многообразие X называется *многообразием почти Фано*, если некоторая кратность его антиканонического дивизора является численно эффективным дивизором Картье и его самопересечение положительно, т.е. $(-nK_X)^{\dim X} > 0$. Число $\deg(X) = \frac{(-nK_X)^{\dim X}}{n^{\dim X}}$ называется антиканонической *степенью* многообразия Фано.

Определение 2.6. *Индексом* (особого) многообразия Фано X называется наибольшее (рациональное) число $r > 0$, для которого антиканонический дивизор $-K_X$ является r-кратным некоторого целого дивизора (Картье) H:

$$-K_X = rH.$$

Определение 2.7. Пусть $H \in \mathrm{Pic}(X)$ — дивизор Картье на n-мерном многообразии X, $D_1, \ldots, D_l$ — базис $H^{2k}(X,\mathbb{Z})/tors$. Рассмотрим матрицу $M_{ij}^{(k)} = (H^{n-4k} \cup D_i \cup D_j), i, j = 1, \ldots, l$. Определим $d^k(X,H)$ как определитель матрицы $M^{(k)}$ (он не зависит от выбора целочисленного базиса). Для трёхмерного многообразия Фано X положим $d(X) = d^1(X, -K_X)$.

Если X — гладкое многообразие, а H — обильный дивизор, то число $d^k(X,H)$ отлично от нуля (это переформулировка сильной теоремы Лефшеца).

Определение 2.8. Набор чисел $\rho, r, \deg, b, d$ мы будем называть набором *основных инвариантов* трёхмерного гладкого многообразия Фано.

Определение 2.9. Мы используем следующие обозначения (семейств) специальных гладких многообразий:

- $\mathbb{P}^n$ — n-мерное проективное пространство;
- Q^n — n-мерная гладкая квадрика в $\mathbb{P}^{n+1}$;
- $S_d, d = 1 \ldots 8$ — поверхности дель Пеццо степени d индекса 1.
- $Q = Q^3$ — трёхмерная квадрика в $\mathbb{P}^4$;
- V_4 — пересечения двух квадрик в $\mathbb{P}^5$;
- V_5 — сечение грассманиана $G(2,5)$ подпространством коразмерности 3;
- V_{22} — трёхмерные многообразия Фано рода 12 с числом Пикара 1;
- $V_{\rho.N}$ ($\rho = 2,3,4$) — семейства трёхмерных многообразий Фано с числом Пикара ρ и номером N в таблицах [10, Table 2, Table 3, Table 4].

Мы используем стандартные обозначения для торических многообразий ([19], [20], [1]): торическое многообразие X связано с веером Σ в пространстве $N = \mathbb{Z}^{\dim X}$, а каждому обильному дивизору H на X соответствует многогранник Δ_H в двойственном пространстве $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$; мы будем обозначать многообразие X символами X_Σ и $\mathbb{P}(\Delta)$.

Теорема 2.10. *Следующие семейства трёхмерных неторических гладких многообразий Фано, и только они, имеют малые вырождения вырождения в торические многообразия Фано (обозначения соотв. 2.9):*
1) 4 семейства многообразий с группой Пикара $\mathbb{Z}$, а именно Q, V_4, V_5,V_{22};
2) 16 семейств многообразий с группой Пикара $\mathbb{Z}^2$, а именно $V_{2.n}$, где $n = 12, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32$;
3) 16 семейств многообразий с группой Пикара $\mathbb{Z}^3$, а именно $V_{3.n}$, где $n = 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24$;
4) 8 семейств многообразий с группой Пикара $\mathbb{Z}^4$, а именно $V_{4.n}$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
Все такие вырождения перечислены в разделе 5.

Замечание 2.11. Апостериори получается, что все гладкие трёхмерные многообразия Фано Y, допускающие малое торическое вырождение, удовлетворяют следующим условиям:

(1) Y рационально (см. например [15]),
(2) $\rho(Y) \leqslant 4$ (напомним, что у многообразия Фано $\rho(Y) = h^{1,1}(Y)$)
(3) $\deg(Y) = (-K_Y)^3 \geqslant 20$,
(4) $b(Y) = h^{1,2}(Y) \leqslant 3$,
(5) $b(Y) = 3$ в единственном случае многообразия $V_{2.12}$,
(6) $b(Y) = 2$ лишь в двух случаях семейств многообразий V_4 и $V_{2.19}$.

3. Доказательство

С помощью теоремы Кавамaты–Фивега, экспоненциальной последовательности и спектральной последовательности Лере легко получаются следующие свойства многообразий Фано.

Предложение 3.1 (См., например, [16], [15]). *Пусть X — многообразие почти Фано с каноническими особенностями. Тогда*

(1) $H^i(X, \mathcal{O}) = 0$ *для всех* $i > 0$,
(2) $\mathrm{Pic}(X) = H^2(X, \mathbb{Z})$,
(3) $\mathrm{Pic}(X)$ — *конечно-порождённый свободный* $\mathbb{Z}$*-модуль,*

Если $\pi : Y \to X$ — разрешение особенностей, все перечисленные утверждения верны и для Y, и кроме того $R^{\bullet}\pi_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ (канонические особенности рациональны).

Локальная топология сглаживаний устроена следующим образом:

Предложение 3.2 (см., например, [21], [22] или [23]). *Пусть $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ — сглаживание.*

(1) *Ограничение $\pi : \mathcal{X} \backslash X_0 \to \Delta \backslash 0$ является локально тривиальным расслоением в классе гладких топологических многообразий, в частности все гладкие слои диффеоморфны (это утверждение известно как* теорема Эресмана*).*
(2) *Существует непрерывное* отображение Клеменса $c : \mathcal{X} \to X_0$ *(вне $c^{-1}(\mathrm{Sing}\, X_0)$ отображение c является гладким), являющееся деформационной ретракцией пространства $\mathcal{X}$ на слой X_0 согласованной с радиальной ретракцией $\Delta \to 0$. Ограничение отображения c на гладкий слой X_t является взаимно однозначным вне особых точек X_0.*

Эти утверждения чисто топологические и являются вариациями теоремы о трубчатой окрестности.

Следствие 3.3. *Многообразия $\mathcal{X}$ и X_0 гомотопически эквивалентны (гомотопическая эквивалентность задаётся парой из отображения Клеменса $c : \mathcal{X} \to X_0$ и вложения слоя $i_0 : X_0 \to \mathcal{X}$), в частности*

$$H^2(X_0, \mathbb{Z}) = H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$$
$$H_2(X_0, \mathbb{Z}) = H_2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$$

Следствие 3.4. *Для всех $t \neq 0$ образы $Im[\{i_t\}_* H_{\bullet}(X_t, \mathbb{Z}) \to H_{\bullet}(\mathcal{X}, \mathbb{Z})]$ совпадают.*

Доказательство. Покроем $\Delta \backslash 0$ окрестностями U_i над которыми π является тривиальным расслоением. Рассмотрим пару точек $t, s \in U_i$ и k-цикл $\gamma \in H_k(X_t, \mathbb{Z})$. Пусть $I \subset U$ — отрезок соединяющий t и s в U, а γ_U — $(k+1)$-цикл в $\mathcal{X}_I$, соответствующий произведению I на γ при тривиализации π над I. Тогда граница γ_U в $\mathcal{X}$ это разность $\{i_t\}_* \gamma$ и $\{i_s\}_* \gamma$. □

Теорема 3.5 ([24]). *Числа Ходжа $h^{p,q}(X_t)$ постоянны для всех $t \in \Delta \backslash 0$.*

Предложение 3.6 (Теорема полунепрерывности, см. например [25]). *Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $\mathcal{X}$, плоский над $\mathcal{O}_\Delta$; обозначим $\mathcal{F}_t = i_t^* \mathcal{F}$. Тогда*

(1) *Эйлерова характеристика $\chi(X_t, \mathcal{F}_t)$ не зависит от $t \in \Delta$.*
(2) *Размерность каждого отдельного пространства когомологий $H^i(X_t, \mathcal{F}_t)$ как функция от t полунепрерывна сверху (то есть $\forall n \in \mathbb{Z}$ множества вида*

$$\left\{t \in \Delta : h^i(X_t, \mathcal{F}_t) \geqslant n\right\}$$

замкнуты в топологии Зарисского).

Замечание 3.7. Мы будем пользоваться таким приёмом: если когомологии какого-то когерентного пучка $H^i(X_0,\mathcal{F}_0)=0$ зануляются, то будем считать, что диск Δ выбран так, что зануляются и когомологии всех слоёв $H^i(X_t,\mathcal{F}_t)=0$.

Теорема 3.8 ([26])**.** *Пусть многообразие X_0 имеет канонические особенности. Тогда и многообразие $\mathcal{X}$ имеет канонические особенности. Тотальное пространство $\mathcal{X}$ является $\mathbb{Q}$-горенштейновым. Если многообразие X_0 горенштейново, то и $\mathcal{X}$ тоже горенштейново.*

В последнем случае, на $\mathcal{X}$ верна наивная формула присоединения (так как дуализирующий пучок равен каноническому).

Всюду далее в этом разделе мы предполагаем что многообразие X_0 горенштейново многообразие Калаби–Яу размерности больше 1 или почти Фано с каноническими особенностями (любой размерности).

Предложение 3.9. *Для всех i и t имеем*

$$h^i(X_t,\mathcal{O}_{X_t})=h^i(X_0,\mathcal{O}_{X_0})$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h^i(X_t,\mathcal{O}_{X_t})_{0<i<\dim X_t}$ как функцию от t. Эта функция полунепрерывна сверху (по теореме полунепрерывности), и при $t=0$ равна 0 (по определению если X — многообразие Калаби–Яу, и по свойству 3.1 если X — многообразие почти Фано). Следовательно, она равна 0 в окрестности 0. Значит, она и тождественно равна 0 (3.5). Поскольку $h^0(X_t,\mathcal{O})=1$ для всех t, из 3.6 получаем что $h^n(X_t)=h^n(X_0)$ для всех t (0 для почти Фано, 1 для Калаби–Яу). $\square$

По теореме Грауэрта высшие прямые образы пучков $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-K_{\mathcal{X}})$ зануляются $R^i\pi_*\mathcal{O}=R^i\pi_*\mathcal{O}(-K_{\mathcal{X}})=0, \dim X_0>i>0$, а $\pi_*\mathcal{O}(-K_{\mathcal{X}})$ — локально свободный пучок над Δ ранга $h^0(X_0,\mathcal{O}(-K_{X_0}))$. Спектральные последовательности Лере $H^i(\Delta,R^j\pi_*\mathcal{O}(-K_{\mathcal{X}}))$ и $H^i(\Delta,R^j\pi_*\mathcal{O}))$ вырождаются. Имеем

$$H^i(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-K_{\mathcal{X}}))=H^i(X_t,\mathcal{O}_{X_t}(-K_t))=0, \dim X_0>i>0, t\in\Delta \tag{3.10}$$

$$H^i(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})=H^i(X_t,\mathcal{O}_{X_t})=0, \dim X_0>i>0, t\in\Delta \tag{3.11}$$

$$H^0(X_t,\mathcal{O}_{X_t}(-K_{X_t}))=H^0(X_0,\mathcal{O}_{X_0}(-K_{X_0})), t\in\Delta \tag{3.12}$$

$$H^0(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-K_{\mathcal{X}}))=H^0(X_0,\mathcal{O}_{X_0}(-K_{X_0}))\otimes H^0(\Delta,\mathcal{O}) \tag{3.13}$$

Из экспоненциальной точной последовательности и 3.11 имеем изоморфизмы

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{X})=H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z}) \tag{3.14}$$

$$\mathrm{Pic}(X_t)=H^2(X_t,\mathbb{Z}) \tag{3.15}$$

Комбинируя равенство 3.14 и утверждения 3.3 получаем

Предложение 3.16. *Отображение $i_0^*:\mathrm{Pic}(\mathcal{X})\mapsto\mathrm{Pic}(X_0)$ — изоморфизм.*

Предложение 3.17. *Отображение $i_t^*:\mathrm{Pic}(\mathcal{X})\mapsto\mathrm{Pic}(X_t)$ инъективно, то есть*

$$Ker\ i_t^*=0. \tag{3.18}$$

Доказательство. Поскольку для всех $\gamma\in H_\bullet(X_t)$ и $\Gamma\in H^\bullet(\mathcal{X})$ выполнено

$$\langle i_t^*(\Gamma),\gamma\rangle=\langle\Gamma,\{i_t\}_*\gamma\rangle,$$

из невырожденности спаривания на X_t при $t\neq0$ и следствия 3.4 получаем что ядра $\mathrm{Ker}\ i_t^*:H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})/tors\to H^2(X_t,\mathbb{Z})/tors$ совпадают для всех $t\neq0$. Из отождествления 3.14 то же верно для $i_t:\mathrm{Pic}(\mathcal{X})\to\mathrm{Pic}(X_t)$: $\mathrm{Ker}\ i_t=\mathrm{Ker}\ i_{t'}$ для всех $t,t'\in\Delta\backslash0$.

Рассмотрим произвольный элемент $\mathcal{L} \in \mathrm{Ker}\ i_t^* = \cap_{t' \in \Delta\setminus 0}\mathrm{Ker}\ i_{t'}^*$. Это обратимый пучок обладающий свойством $\mathcal{L}_{X_t} = \mathcal{O}_{X_t}, t \in \Delta\setminus 0$. При $t \neq 0$ у этого тривиального расслоения одномерное пространство сечений:

$$h^0(X_t, \mathcal{L}_{X_t}) = h^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 1,$$

следовательно по полунепрерывности (3.6)

$$h^0(X_0, \mathcal{L}_{X_0}) \geqslant 1.$$

Аналогично, получим

$$h^0(X_0, \mathcal{L}_{X_0}^{-1}) \geqslant 1$$

. Поэтому $\mathcal{L}_{X_0} \simeq \mathcal{O}_{X_0}$. А следовательно по 3.16 и $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. □

Так как многообразие X_0 горенштейново, то горенштейново и тотальное пространство $\mathcal{X}$ (3.8), поэтому, по формуле присоединения, для всех $t \in \Delta$ выполнено

$$-K_{X_t} = -(K_{\mathcal{X}} + X_t)|_{X_t} = i_t^*(-K_{\mathcal{X}}), \tag{3.19}$$

.

Пусть $\mathcal{D} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$. Слои $X_0 = X$ и X_t алгебраически эквивалентны, следовательно

$$i_0^*(\mathcal{D})^{\dim X} = \mathcal{D}^{\dim X} \cdot X_0 = \mathcal{D}^{\dim X} \cdot X_t = i_t^*(\mathcal{D})^{\dim X} \tag{3.20}$$

Следствие 3.21. *Антиканоническая степень $(-K_t)^{\dim X_t}$ не зависит от $t \in \Delta$.*

Пусть $\mathcal{X}$ — относительное многообразие Фано (то есть пучок $-K_{\mathcal{X}}$ обилен над Δ).

Теорема 3.22 ([27])**.** *Всякое трёхмерное нодальное многообразие Фано X_0 имеет сглаживание $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$, у которого общий слой X_t при $t \neq 0$ является гладким многообразием Фано.*

Теорема 3.22 имеет обобщение

Теорема 3.23 ([28])**.** *Всякое трёхмерное горенштейново многообразие Фано X_0 с терминальными особенностями имеет сглаживание $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$, общий слой $X_{t\neq 0}$ которого является гладким многообразием Фано.*

Предложение 3.24. *В случае многообразий (почти) Фано, малость вырождения эквивалентна совпадению двух пар чисел (ρ, d) (число d определено в 2.7):*

$$\rho(X_0) = \rho(X_t)$$

$$d(X_0) = d(X_t)$$

Доказательство. Ограничение i_0^* всегда изоморфизм, и инъективность i_t^* верна всегда (см. 3.17). Обе группы $\mathrm{Pic}(X_t)$ и $\mathrm{Pic}(X)$ являются решётками конечного ранга (3.1). Таким образом, равенство $\rho(X_0) = \rho(X_t)$ означает что морфизм $i_t^*(i_0^*)^{-1}$ взаимно-однозначно отображает решётку $\mathrm{Pic}(X_0)$ в полную подрешётку конечного индекса в $\mathrm{Pic}(X_t)$. Этот индекс равен $[\mathrm{Pic}(X_t) : \mathrm{Pic}(X_0)] = \left(\frac{d(X_0)}{d(X_t)}\right)^{\frac{1}{2}}$. □

Теорема 3.25 ([29])**.** *Если $\mathcal{X}$ — сглаживание, а X_0 — трёхмерное горенштейново многообразие Фано с терминальными особенностями, морфизм i_t^* является изоморфизмом для всех t.*

Следствие 3.26. *У всякого трёхмерного горенштейнова многообразия Фано с терминальными особенностями существует сглаживание, общий слой которого гладкое многообразие Фано, и все такие сглаживания являются малыми.*

Доказательство. Это формальное объединение теорем 3.23 и 3.25. □

Следствие 3.27. *Трёхмерное горенштейново терминальное многообразие Фано X и его сглаживание Y имеют одинаковые инварианты $\rho, \deg, r, d$.*

Доказательство. Равенство 3.21 утверждает $\deg(X) = \deg(Y)$. Как следствие 3.25 имеем $\rho(X) = \rho(Y)$. Поэтому, из 3.20 и 3.24 следует $d(X) = d(Y)$. Наконец, из 3.25 и 3.19 получаем $r(X) = r(Y)$. □

У трёхмерного многообразия Фано Y всего два нетривиальных числа Ходжа, первое $h^{1,1}(Y) = h^{2,2}(Y) = \rho(Y)$ равно рангу группы Пикара, а второе $b(Y) = h^{1,2}(Y) = h^{2,1}(Y) = \frac{1}{2}\operatorname{rk} H^3(Y, \mathbb{Z})$; ещё два равны единице $h^{0,0}(Y) = h^{3,3}(Y) = 1$, остальные нули.

Предложение 3.28. *Пусть X — нодальное трёхмерное многообразие, $\tilde{X}$ — его малое крепантное разрешение, Y — сглаживание X. Обозначим $p(X)$ — количество обыкновенных двойных точек на X. Тогда выполнено равенство*

$$b(Y) = p(X) + b(\tilde{X}) + \rho(Y) - \rho(\tilde{X}), \tag{3.29}$$

Доказательство. Сравним топологические эйлеровы характеристики (для некомпактных многообразий и многообразий с краем будем использовать эйлерову характеристику когомологий с компактным носителем: $\chi(M) = \sum_i (-1)^i \dim H^i_c(M, \mathbb{C})$) малого крепантного разрешения $\tilde{X}$ и сглаживания Y [1].

Вырежем из X маленькие окрестности всех обыкновенных двойных точек p_i, полученное многообразие с краем назовём M. Проколотая окрестность обыкновенной двойной особенности на X изоморфна касательному расслоению к вещественной трёхмерной сфере TS^3 без нулевого сечения: если $\sum_{i=1}^4 z_i^2 = 0, z = x + yi$, то x и y — пара ненулевых ортогональных (относительно стандартной евклидовой метрики) векторов в $\mathbb{R}^4$ одинаковой длины r; вектор $\frac{x}{r}$ это точка на $(n-1)$-мерной сфере радиуса 1, а y — касательный вектор в этой точке. Поэтому, граница окрестности обыкновенной двойной особенности на X изоморфна $S^2 \times S^3$. При крепантном разрешении она заклеивается $S^2 \times D^4$, а при сглаживании — $D^3 \times S^3$. Следовательно

$$\chi(\tilde{X}) = \chi(M) + p \cdot \chi(S^2),$$
$$\chi(Y) = \chi(M) + p \cdot \chi(S^3).$$

Поэтому

$$\chi(\tilde{X}) = \chi(Y) + 2p.$$

С другой стороны,

$$\chi(Y) = 2 + 2\rho(Y) - 2b(Y),$$
$$\chi(\tilde{X}) = 2 + 2\rho(\tilde{X}) - 2b(\tilde{X}).$$

□

[1] Вместо этого можно было бы сравнить размерности версального пространства деформаций Y и X; также существуют объясняющие это соотношение соображения зеркальной симметрии (см. [30, 6]).

Предложение 3.30. *Если X — трёхмерное нодальное торическое многообразие, соответствующее многограннику с v вершинами, p гранями-параллелепипедами (обыкновенными двойными особенностями) и $f-p$ треугольными гранями (гладкими неподвижными точками), имеем $H^3(\tilde{X}) = 0$, $\rho(\tilde{X}) = v-3$. Поэтому если Y — сглаживание X, то*

$$b(Y) = p + \rho(X) - (v-3)$$

Доказательство. Поскольку многообразие $\tilde{X}$ неособое, группа $\mathrm{Pic}(\tilde{X})$ совпадает с группой $Cl(\tilde{X})$. Поскольку разрешение особенностей $\tilde{X} \to X$ — малое, на $\tilde{X}$ и X одинаковые дивизоры Вейля, то есть $Cl(\tilde{X}) = Cl(X)$. Поэтому $\rho(\tilde{X}) = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(\tilde{X}) = \mathrm{rk}\,Cl(X) = v-3$. Таким образом, утверждение 3.28 в данном случае эквивалентно написанному выше равенству. □

Теорема 3.31 (см. [10],[12])**.** *Два гладких трёхмерных многообразия Фано Y_1, Y_2 имеющие одинаковый набор* основных инвариантов $\rho, r, \deg, b, d$ *лежат в одном деформационном классе. Всего деформационных классов сто пять* [2]. *Все они перечислены в работе* [10], *каждый из них непустой.*

Будем говорить, что гладкое трёхмерное многообразие Фано Y определяется инвариантами $(\rho, r, \deg, b)$, если для всякого гладкого трёхмерного многообразия Фано Y' из равенств $\rho(Y') = \rho(Y)$, $r(Y') = r(Y)$, $\deg(Y') = \deg(Y)$, $b(Y') = b(Y)$ следует, что Y и Y' лежат в одном семействе. Согласно [12] из 105 семейств трёхмерных гладких многообразий Фано не определяются инвариантами $\rho, r, \deg, b$ только 19.

Лемма 3.32. *Для всякого трёхмерного нодального многообразия Фано X существует единственное с точностью до деформаций гладкое многообразие Фано Y, т.ч. Y — сглаживание X.*

Доказательство. У X есть сглаживание — гладкое многообразие Фано Y (3.22).
Основные инварианты многообразия Y (см. 2.8) явно выражаются через инварианты многообразия X (3.27, 3.30).
Деформационный класс многообразия Y однозначно определяется его основными инвариантами (3.31).
□

Следствие 3.33. *Пусть Y определяется инвариантами $(\rho, r, \deg, b)$. Тогда трёхмерное нодальное многообразие Фано X является вырождением Y тогда и только тогда когда $\rho(X) = \rho, r(X) = r, \deg(X) = \deg, b(X) = b$. Если же Y не определяется своими инвариантами $(\rho, r, \deg, b)$, то X является вырождением Y тогда и только тогда, когда $\rho(X) = \rho, r(X) = r, \deg(X) = \deg, b(X) = b, d(X) = d$.*

Отметим, что доказательство леммы 3.32 работает не только для торических многообразий, но для любых нодальных трёхмерных многообразий Фано (и на случай терминальных горенштейновых особенностей тоже несложно обобщается). Далее мы ограничимся случаем нодальных торических многообразий Фано X [3].

Для описания всех рефлексивных многогранников (то есть горенштейновых торических многообразий Фано) в любой фиксированной размерности есть эффективный алгоритм ([32]).

[2] В начальной версии [10] семейство многообразий $V_{4.13}$ было пропущено, это было исправлено в 2003 году.

[3] Из-за особенной простоты вычислений, и большего количества приложений. В разделе 6 об этом сказано подробнее.

Их количество растёт достаточно быстро: 16 многоугольников, 4319 многогранников в трёхмерном пространстве ([32]), 473800776 четырёхмерных многогранников.

Нас будет интересовать случай нодальных трёхмерных торических многообразий Фано. Для получения полного списка таких многообразий мы использовали программный пакет PALP ([31, 32]). Всего таких многообразий 100, из них 18 гладкие. В негладком случае число Пикара не превосходит 4. Все эти многообразия перечислены в таблице раздела 5.

Трёхмерные торические нодальные многообразия явно описаны ([18]). Имеются даже более общие классификации всех терминальных трёхмерных торических многообразий Фано ([33]) и всех горенштейновых трёхмерных торических многообразий Фано ([32]).

Всего нодальных торических трёхмерных многообразий Фано 100, но 18 из них неособые, и деформацией других неособых многообразий Фано не являются (3.31).

Итак, вычислим инварианты сглаживания Y торического нодального многообразия Фано X.

Обозначим символом $\pi : \tilde{X} \to X$ некоторое малое крепантное разрешение нодального многообразия X, а символом $p(X)$ — количество обыкновенных двойных особенностей на X.

Доказательство теоремы 2.10. Предположим, что гладкое трёхмерное многообразие Фано Y вырождается в X.

Как показано в 3.27, многообразия X и Y, имеют одинаковое число Пикара, одинаковый индекс, одинаковую антиканоническую степень и одинаковый инвариант d. Введём обозначения

$$\rho(X) = \rho(Y) = \rho, \tag{3.34}$$

$$r(X) = r(Y) = r, \tag{3.35}$$

$$(-K_X)^3 = -(K_Y)^3 = \deg, \tag{3.36}$$

$$d(X) = d(Y) = d. \tag{3.37}$$

Поскольку многообразие $\tilde{X}$ торическое, $H^3(\tilde{X}, \mathbb{Q}) = 0$.

Соответственно (см. 3.28, 3.29, 3.30):

$$b(Y) = p(X) + \rho(X) - \rho(\tilde{X}) \tag{3.38}$$

Обозначим $b = p(X) + \rho(X) - \rho(\tilde{X})$.

Остаётся вычислить инварианты $\rho, r, \deg, b, d$ многообразия X (это делается в разделе 4), и найти в таблице [11] единственное семейство гладких многообразий Y с инвариантами $\rho(Y) = \rho, r(Y) = r, \deg(Y) = \deg, b(Y) = b, d(Y) = d$.

□

Следующие соображения позволяют упростить вычисления.

Число Пикара особых нодальных торических многообразий Фано бывает равным 1, 2, 3 и 4 (см [18] или таблицу в 5). Следовательно, гладкие неторические многообразия Фано с числом Пикара $\rho \geqslant 5$ (а именно: неторическое многообразие степени 28 с $\rho = 5$ и произведения $\mathbb{P}^1 \times S_{d=11-\rho}$ прямой $\mathbb{P}^1$ на поверхность дель Пеццо S_d степени $d \leqslant 5$) малых торических вырождений не имеют.

Для 55 из 82 особых нодальных торических трёхмерных многообразий Фано X существует лишь одно семейство гладких многообразий Фано Y с инвариантами $(\rho, b, r, \deg)(Y) = (\rho, b, r, \deg)(X)$. Для этих многообразий нет необходимости вычислять инвариант $d(X)$, вычисление которого наиболее трудоёмко.

Исключение составляют следующие восемь наборов инвариантов $(\rho, r, \deg, b)$, которым соответствуют 17 типов многообразий Фано указанные в таблице 1:

Таблица 1:

ρ	deg	b, r	гладкие Y
2	30	$0,1$	$V_{2.22}[-24], V_{2.24}[-21]$
2	46	$0,1$	$V_{2.30}[-12], V_{2.31}[-13]$
3	36	$0,1$	$V_{3.17}[28], V_{3.18}[26]$
3	38	$0,1$	$V_{3.19}[24], V_{3.20}[28], V_{3.21}[22]$
3	42	$0,1$	$V_{3.23}[20], V_{3.24}[22]$
4	32	$0,1$	$V_{4.4}[-40], V_{4.5}[-39]$
2	54	$0,2$	$V_{2.33}, V_{2.34}$
3	48	$0,2$	$V_{3.27}, V_{3.28}$

Замечание 3.39. Многообразия $V_{2.33}, V_{2.34}, V_{3.27}, V_{3.28}$ сами являются торическими.

Замечание 3.40. В предыдущей таблице за каждым гладким многообразием Фано Y в квадратных скобках указан его инвариант $d(Y)$ (см. [12, предложение 7.35]).

4. Вычисление

Теорема 4.1 (см. например [1])**.** *Пусть X — неособое и собственное (возможно, не проективное) торическое многообразие. Кольцо когомологий $H^\bullet(X, \mathbb{Q})$ порождено классами инвариантных дивизоров D_{ρ_i}. Соотношения в этом кольце порождены соотношениями Стенли–Ризнера — для всякого $J \subset \Sigma^{(1)}$, не содержащегося ни в одной грани Δ, выполнено*

$$\prod_{j \in J \subset \Sigma^{(1)}} D_{\rho_j} = 0,$$

и соотношениями тривиальности главных дивизоров - $\forall m \in M$

$$\sum_i \langle m, \rho_i \rangle D_{\rho_i} = 0.$$

Это означает что в кольце когомологий гладкого торического многообразия все соотношения порождаются наивными: пересечение k различных дивизоров пусто, если соответствующие этим дивизорам 1-мерные грани не лежат на одной k-мерной грани σ. Если же лежат, то они трансверсально пересекаются в $(d-k)$-мерной орбите соответствующей грани σ.

Лемма 4.2. *Пусть X_Σ — гладкое n-мерное торическое многообразие. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений*

$$x_{j_1 \dots j_n} = 0, \text{ если } \{\rho_{j_1} \dots \rho_{j_n}\} \text{ не конус в } \Sigma$$

$$\sum \langle m, \rho_j \rangle x_{j_1 \dots j_{i-1} j j_{i+1} \dots j_n} = 0$$

Она имеет единственное с точностью до пропорциональности решение. Выберем единственное решение удовлетворяющее условию $x_{j_1 \dots j_n} = 1$, если $\{\rho_{j_1} \dots \rho_{j_n}\}$ является конусом в Σ. Тогда числа $x_{j_1 \dots j_n}$ равны индексам пересечения дивизоров $D_{j_1} \cdot \ldots \cdot D_{j_n}$ на X_Σ.

Предложение 4.3. *Для дивизора Вейля $\sum a_\rho D_\rho$ условие локальной главности в обыкновенной двойной особенности на трёхмерном торическом многообразии выглядит так — сумма коэффициентов при инвариантных неприводимых дивизорах соответствующих концам диагонали $\rho_A\rho_C$ параллелограмма $\rho_A\rho_B\rho_C\rho_D$ равна аналогичной сумме на концах диагонали $\rho_B\rho_D$:*

$$a_{\rho_A} + a_{\rho_C} = a_{\rho_B} + a_{\rho_D}.$$

Лемма 4.4. *Пусть X — нодальное трёхмерное торическое многообразие Фано. Тогда группа $\mathrm{Pic}(X)$ определяется из точной последовательности*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\tilde{X}) \xrightarrow{\phi} \oplus_{ABCD}\mathbb{Z},$$

в последнем члене суммирование происходит по всем базисным параллелограммам $\rho_A\rho_B\rho_C\rho_D$ для X, $\phi = \oplus_{ABCD}\phi_{ABCD}$, и $\phi_{ABCD}(\sum a_\rho D_\rho) = (a_{\rho_A} - a_{\rho_B} + a_{\rho_C} - a_{\rho_D})$.

Замечание 4.5. Используя лемму 4.2 и лемму 4.4, можно достаточно эффективно вычислить теорию пересечений на группе Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ $\mathbb{Q}$-горенштейнового торического многообразия X, имеющего малое разрешение $f : \tilde{X} \to X$

(например, этим свойством обладает трёхмерное нодальное X). Индекс самопересечения D^n дивизора Картье $D \in \mathrm{Pic}(X)$ равен индексу пересечения его полного (совпадающего с собственным) прообраза $\tilde{D} = f^*D$ на $\tilde{X}$. При малом раздутии группа дивизоров Вейля не меняется, дивизор $\tilde{D}$ представлен тем же самым дивизором Вейля, что и D (его собственным прообразом).

Таким образом, чтобы найти индексы пересечения на $\mathrm{Pic}(X)$ нужно решить две системы линейных уравнений: одну систему на индексы пересечений $D_{i_1} \cdot \ldots \cdot D_{i_n}$ описанную в 4.2, и вторую — систему уравнений 4.3 чтобы выделить $\mathrm{Pic}(X)$ как подгруппу в $\mathrm{Pic}(\tilde{X})$[4].

Обозначение. Пусть M — целочисленная матрица размера $3 \times v$. Обозначим через $\Delta(M)$ многогранник, являющийся выпуклой оболочкой векторов-столбцов M. Пусть M выбрана так, что 0 лежит строго внутри $\Delta(M)$, и ни один из столбцов M не лежит в выпуклой оболочке остальных. Через $\mathbb{P}(M)$ обозначим торическое многообразие Фано, соответствующее многограннику $\Delta(M)$. Пусть D_i — инвариантные дивизоры Вейля, соответствующие i-ой вершине многогранника $\Delta(M)$, $G_1, \ldots, G_\rho$ — образующие группы $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(M))$.

Для вычисления инварианта d сначала мы находим все индексы пересечения для элементов базиса группы Пикара $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(M))$, затем вычисляем дискриминант. Чтобы вычислить индексы пересечения дивизоров из $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(M))$ мы используем соображение 4.5 — вычисляем кольцо $H^\bullet(\tilde{\mathbb{P}}(M))$, индексы пересечения для элементов группы Пикара $\mathrm{Pic}(\tilde{\mathbb{P}}(M))$ малого крепантного разрешения[5] $\phi : \tilde{\mathbb{P}}(M) \to \mathbb{P}(M)$, затем получаем индексы пересечения на $\mathbb{P}(M)$ ограничением с $\tilde{\mathbb{P}}(M)$.

Разберём пример многообразий с инвариантами $(\rho = 2, \deg = 30, b = 0)$ [6].

[4]Сценарий для *pari/gp* реализующий описанный выше алгоритм: http://www.mi.ras.ru/ galkin/work/NodalToric3foldPicard.gp.

[5]Мы берём произвольное максимальное крепантное разрешение, как объяснялось в 4.5, ответ получится одинаковый для проективного и непроективного разрешения.

[6]Остальные случаи: http://www.mi.ras.ru/ galkin/work/NodalToric3foldPicard.pdf.

Случай 4.6 ($v = 9, f = 10$)**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_1 + D_4 + D_5 + D_8$, $G_2 = -D_1 + D_6 + D_9$.

$$int(aG_1 + bG_2, aG_1 + bG_2, aG_1 + bG_2) = (aG_1 + bG_2)^3 = a^3 + 6ba^2 - 2b^3$$

$$-K = G_1 + 2G_2$$
$$d = -24$$

Случай 4.7 ($v = 10, f = 11$)**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = D_7 + D_8 + D_9$, $G_2 = D_2 + D_3 + D_5 - D_6 + D_{10}$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = -2a^3 + 6ba^2 - 3b^3$$

$$-K = 3G_1 + 2G_2$$
$$d = -24$$

Случай 4.8 ($v = 9, f = 10$)**.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$G_1 = -D_1 + 2D_3 + D_4 - D_7 + D_8$, $G_2 = D_1 + D_7 + D_9$.

$$(aG_1 + bG_2)^3 = 3ba^2 + 6b^2a$$

$$-K = G_1 + G_2$$
$$d = -21$$

5. Описание торических вырождений гладких трёхмерных многообразий Фано.

Как было отмечено в следствии 3.33, для определения возможных типов торических вырождений трёхмерных многообразий Фано X, надо для каждого трёхмерного нодального торического многообразия Фано X вычислить инварианты $\rho(X), r(X), \deg(X), b(X)$, и возможно $d(X)$. Для этих вычислений была использована комп. программа [7] алгоритм вычислений которой был основан на формулах 4.2,4.4, 4.5. Результаты вычислений приведены в таблице 2.

[7] http://www.mi.ras.ru/ galkin/work/NodalToric3foldPicard.gp.

В первых 4 столбцах выписаны трёхмерные многообразия Фано Y и их инварианты, вычисленные в работе [12].

В 5 столбце, в случае, когда многообразие Y не определяется инвариантами $(\rho, r, \deg, b)$, указано значение $d(Y)$.

В 6 столбце указаны основные комбинаторные инварианты нодального торического многообразия X являющегося вырождением Y — число вершин, число особых точек, и число всех неподвижных точек.

В 7 столбце написано количество торических многообразий X являющихся вырождениями многообразия Y и имеющих комбинаторные инварианты указанные в 6 столбце.

Замечание 5.1. Инварианты ρ, b, v, p связаны линейным соотношением 3.30:

$$v - p = 3 + \rho - b$$

Замечание 5.2. Многообразия $V_{2.34}$, $V_{3.25}, V_{3.26}, V_{3.28}$, $V_{4.9}$ — гладкие торические многообразия, имеющие вырождения в особые торические нодальные многообразия. Остальные гладкие многообразия Фано приведённые в таблице-ответе в этом разделе — не торические.

Замечание 5.3. Многообразие Фано $V_{4.13}$ (степени 26) [8] малых торических вырождений не имеет.

Таблица 2:

V_{22}	1	22	0		(13,9,13)	1
V_4	1	32	2		(8,6,6)	1
V_5	1	40	0		(7,3,7)	1
Q	1	54	0		(5,1,5)	1
$V_{2.12}$	2	20	3		(14,12,12)	1
$V_{2.17}$	2	24	1		(12,8,12)	1
$V_{2.19}$	2	26	2		(11,8,10)	1
$V_{2.20}$	2	26	0		(11,6,12)	2
$V_{2.21}$	2	28	0		(10,5,11)	2
$V_{2.21}$	2	28	0		(11,6,12)	1
$V_{2.23}$	2	30	1		(9,5,9)	1
$V_{2.22}$	2	30	0		(10,5,11)	1
$V_{2.22}$	2	30	0	$[-24]$	(9,4,10)	1
$V_{2.24}$	2	30	0	$[-21]$	(9,4,10)	1
$V_{2.25}$	2	32	1		(8,4,8)	1
$V_{2.25}$	2	32	1		(9,5,9)	1
$V_{2.26}$	2	34	0		(10,5,11)	1
$V_{2.26}$	2	34	0		(8,3,9)	1
$V_{2.26}$	2	34	0		(9,4,10)	1
$V_{2.27}$	2	38	0		(7,2,8)	1
$V_{2.27}$	2	38	0		(8,3,9)	2

[8] Это многообразие было пропущено в первой версии [10].

Y	ρ	deg	b	$[d]$	$(v,p,f)(X)$	$\#(X)$
$V_{2.28}$	2	40	1		(7,3,7)	1
$V_{2.29}$	2	40	0		(7,2,8)	1
$V_{2.29}$	2	40	0		(8,3,9)	1
$V_{2.30}$	2	46	0	$[-12]$	(6,1,7)	1
$V_{2.31}$	2	46	0	$[-13]$	(6,1,7)	1
$V_{2.31}$	2	46	0	$[-13]$	(7,2,8)	1
$V_{2.32}$	2	48	0		(6,1,7)	1
$V_{2.34}$	2	54	0		(6,1,7)	1
$V_{3.7}$	3	24	1		(12,7,13)	1
$V_{3.10}$	3	26	0		(11,5,13)	1
$V_{3.11}$	3	28	1		(10,5,11)	1
$V_{3.12}$	3	28	0		(10,4,12)	1
$V_{3.12}$	3	28	0		(11,5,13)	1
$V_{3.13}$	3	30	0		(10,4,12)	2
$V_{3.13}$	3	30	0		(9,3,11)	1
$V_{3.14}$	3	32	1		(8,3,9)	1
$V_{3.15}$	3	32	0		(10,4,12)	1
$V_{3.15}$	3	32	0		(9,3,11)	3
$V_{3.16}$	3	34	0		(8,2,10)	1
$V_{3.16}$	3	34	0		(9,3,11)	1
$V_{3.17}$	3	36	0	[28]	(8,2,10)	2
$V_{3.17}$	3	36	0	[28]	(9,3,11)	1
$V_{3.18}$	3	36	0	[26]	(8,2,10)	1
$V_{3.18}$	3	36	0	[26]	(9,3,11)	1
$V_{3.19}$	3	38	0	[24]	(7,1,9)	1
$V_{3.19}$	3	38	0	[24]	(8,2,10)	1
$V_{3.20}$	3	38	0	[28]	(7,1,9)	1
$V_{3.20}$	3	38	0	[28]	(8,2,10)	1
$V_{3.20}$	3	38	0	[28]	(9,3,11)	1
$V_{3.21}$	3	38	0	[22]	(8,2,10)	1
$V_{3.22}$	3	40	0		(7,1,9)	1
$V_{3.23}$	3	42	0	[20]	(7,1,9)	1
$V_{3.23}$	3	42	0	[20]	(8,2,10)	1
$V_{3.24}$	3	42	0	[22]	(7,1,9)	1
$V_{3.24}$	3	42	0	[22]	(8,2,10)	1
$V_{3.25}$	3	44	0		(7,1,9)	1
$V_{3.26}$	3	46	0		(7,1,9)	1
$V_{3.28}$	3	48	0		(7,1,9)	1
$V_{4.1}$	4	24	1		(12,6,14)	1
$V_{4.2}$	4	28	1		(10,4,12)	1
$V_{4.3}$	4	30	0		(10,3,13)	1
$V_{4.4}$	4	32	0	$[-40]$	(9,2,12)	1
$V_{4.5}$	4	32	0	$[-39]$	(9,2,12)	1

Y	ρ	deg	b	$[d]$	$(v,p,f)(X)$	$\#(X)$
$V_{4.6}$	4	34	0		(10,3,13)	1
$V_{4.6}$	4	34	0		(9,2,12)	1
$V_{4.7}$	4	36	0		(8,1,11)	2
$V_{4.7}$	4	36	0		(9,2,12)	1
$V_{4.8}$	4	38	0		(8,1,11)	1
$V_{4.9}$	4	40	0		(8,1,11)	1

Для трёхмерных гладких многообразий Фано не вошедших в таблицу малых торических вырождений не существует, так как ни одно из трёхмерных нодальных торических многообразий Фано не имеет тех же инвариантов.

6. Следствия

При сравнении простых численных инвариантов X и Y мы использовали классификацию гладких трёхмерных многообразий Фано.

В случае, если бы эта классификация не была заранее известной, мы могли бы её частично восстановить — доказать, что существуют гладкие многообразия Фано Y с инвариантами $\mathrm{Pic}_E(Y) = \mathrm{Pic}_E(X)$, и $b = b(X)$, где X — какое-то известное нам нодальное многообразие Фано (торическое, например).

Кроме этих „классических" инвариантов мы можем определить и некоторые другие.

Предложение 6.1. *У горенштейнового торического многообразия Фано X с изолированными особенностями существует неособое антиканоническое сечение $S \in |-K_X|$, являющееся многообразием Калаби–Яу.*

Доказательство. Это простое следствие теоремы Бертини. □

Предложение 6.2. *Сглаживания X_t горенштейнова многообразия Калаби–Яу X_0 являются многообразиями Калаби–Яу.*

Доказательство. Из утверждения 3.9 имеем $h^i(X_t, \mathcal{O}) = 0$ для $0 < i < \dim X_t$. Из 3.16 и 3.19 получаем $K_{\mathcal{X}}|_{X_0} = K_{X_0} = \mathcal{O}_{X_0} \implies K_{\mathcal{X}} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, а следовательно $K_{X_t} = K_{\mathcal{X}}|_{X_t} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}|_{X_t} = \mathcal{O}_{X_t}$. □

Следствие 6.3. *Антиканонические сечения X_t являются деформациями антиканонических сечений X_0.*

Доказательство. Если Y_0 — некоторое антиканоническое сечение соответствующее элементу $y_0 \in H^0(X_0, -K_{X_0})$, то $\mathcal{Y}$ — антиканоническое сечение $\mathcal{X}$ соответствующее элементу $y_0 \otimes 1 \in H^0(X_0, -K_{X_0}) \otimes H^0(\Delta, \mathcal{O}_\Delta) = H^0(\mathcal{X}, -K_{\mathcal{X}})$ (см. 3.13), задающее требуемую деформацию. Из точной последовательности

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}}((-m-1)K_{\mathcal{X}}) \to \mathcal{O}(-mK_{\mathcal{X}}) \to \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-mK_{\mathcal{X}}) \to 0,$$

занулений 3.1 и 3.10,3.11,3.12,3.13 (и аналогичных им для $\mathcal{O}(-mK_{\mathcal{X}})$) получим что многочлен Гильберта $\mathcal{Y}_t$ не зависит от t, следовательно семейство $\mathcal{Y}_t$ плоское. □

Следствие 6.4. *Если существует неособое антиканоническое сечение X_0, то общее антиканоническое сечение X_t для общего t тоже неособое.*

Следствие 6.5. *У гладкого многообразия Фано Y являющегося сглаживанием горенштейнового торического многообразия Фано с изолированными особенностями существует гладкое антиканоническое сечение $S' \in |-K_Y|$.*

Доказательство. Это следствие 6.1, 6.3 и 6.4. □

Для подмногообразия $Z \subset X$ (и дивизора H) обозначим символом I_H^X фундаментальный член I-ряда X (относительно дивизора H), а символом $I^{X\to Z}$ фундаментальный член I-ряда Z ограниченного с X (см. [34], [35], [36]). Теорема Гивенталя [34] вычисляет I-ряд неособого полного пересечения Z сечений численно эффективных линейных расслоений $\mathcal{O}(Z_i)$, являющегося многообразием почти Фано в неособом торическом многообразии X (аналогичное вычисление верно для неособого полного пересечения в особом торическом многообразии, см. [37]). В частности, I-ряд торического многообразия Фано $X = \mathbb{P}(\Delta)$ индекса $r(Y) > 1$ равен ряду свободных членов Φ_f многочлена Лорана $f(x) = \sum_{m\in\Delta\cap M} x^m - 1$. Пусть символом $[1]g$ обозначается коэффициент при $1 = x^0$ у ряда Лорана $f = g(x)$. Тогда $\Phi_f(t) = [1]e^{tf(x)}$.

Пусть $\phi : \tilde{X} \to X$ — какое-нибудь малое крепантное разрешение.

Предложение 6.6. *I-ряд для $I^{Y\to S'}$ ограниченный с $\mathrm{Pic}(Y)$ на S' равен I-ряду для $\tilde{X}$ ограниченному с $\mathrm{Im}[\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\tilde{X})]$ на $\phi^{-1}(S) \simeq S$.*

Доказательство. Согласно 6.1 общий элемент S антиканонической линейной системы $|-K_X|$ на трёхмерном нодальном торическом многообразии Фано X — это гладкая $K3$-поверхность S. Как показано в 6.3, гладкие антиканонические сечения многообразия X и его сглаживания Y лежат в одном деформационном классе. Группа Пикара $\mathrm{Pic}\,X$ изоморфна $\mathrm{Pic}\,Y$ (3.25). Пусть $\mathcal{H} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X})$. Тогда $I_{\mathcal{H}_S}^{\tilde{X}\to S} = I_{\mathcal{H}_{S'}}^{Y\to S'}$. □

Пример 6.7. Рассмотрим многочлен Лорана

$$f_1 = xyz + x + y + z + x^{-1} + y^{-1} + z^{-1},$$

его многогранник Ньютона $\Delta = \Delta(f)$, и соответствующее торическое многообразие $X = \mathbb{P}(\Delta^\vee)$. Явно X строится так: раздуем точку на многообразии $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; получим гладкое многообразие W, которое будет многообразием почти Фано, но не Фано — собственные прообразы трёх координатных прямых не пересекаются с $-K_W$; стянем их, получившееся многообразие Фано — это X, образы стянутых прямых — три обыкновенные двойные особенности, а W —малое крепантное разрешение X. Три обыкновенные двойные особенности многообразия X соответствуют трём граням-параллелограммам (xyz, x, y, z^{-1}), (xyz, x, z, y^{-1}) и (xyz, y, z, x^{-1}). Антиканоническая степень у X такая же, как у W в точке, то есть $\deg(X) = 2^3 \cdot 6 - 8 = 40$. Пусть Y — гладкое многообразие Фано, являющееся сглаживанием X.

Рассмотрим общий многочлен Лорана с многогранником Ньютона Δ:

$$f_a = \sum a_m x^m = a_{xyz}xyz + a_x x + a_y y + a_z z + \\ + a_{x^{-1}}x^{-1} + a_{y^{-1}}y^{-1} + a_{z^{-1}}z^{-1}.$$

Он соответствует дивизору $\sum b_m D_m \in \mathrm{Pic}(W) \otimes \mathbb{C}$, такому что $a_m = e^{2\pi i b_m}$. Такой дивизор является обратным образом дивизора Картье на X, если выполнены три линейных условия, соответствующие локальной главности в трёх нодальных точках

$$b_{xyz} + b_{x^{-1}} = b_y + b_z,$$
$$b_{xyz} + b_{y^{-1}} = b_x + b_y,$$
$$b_{xyz} + b_{z^{-1}} = b_x + b_z.$$

Главные дивизоры имеют вид

$$(b_x + b_y + b_z)xyz + b_x x + b_y y + b_z z - b_x x^{-1} - b_y y^{-1} - b_z z^{-1}.$$

Многообразие X имеет индекс 2, и образующая представляется дивизором $-D_{xyz} + D_{x^{-1}} + D_{y^{-1}} + D_{z^{-1}}$. С точностью до главных дивизоров, многочлен Лорана соответствующий α-кратной образующей $\mathrm{Pic}(X)$, имеет вид $f_t = t(xyz + x + y + z + x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}), t = e^{\pi i \alpha}$.

Согласно [34] $I^W_{-K_W,1}(t) = \Phi_{f+\alpha}(\tilde{t})$, то есть I-ряд для W равен Φ_{f_1} с точностью до перенормировки[9]. Вычислим Φ_{f_1}. Произведения мономов $\prod_{n_i}(x^{m_i})^{n_i}$ дают ненулевой вклад в ряд свободных членов, если $\sum n_i m_i = 0$; в нашем случае положим $n_{xyz} = d, n_x = a, n_y = b, n_z = c$. Тогда $n_{x^{-1}} = a + d, n_{y^{-1}} = b + d, n_{z^{-1}} = c + d$. Отсюда

$$\Phi_{f_1} = \sum_{a,b,c,d \geqslant 0} \frac{(2a+2b+2c+4d)!}{a!b!c!d!(a+d)!(b+d)!(c+d)!} t^{2a+2b+2c+4d} = \\ = 1 + 6t^2 + 114t^4 + 2940t^6 + 87570t^8 + \ldots \tag{6.8}$$

По 6.5 у многообразия Y общее антиканоническое сечение $S' \in |-K_Y|$ неособое. Применяя предложение 6.6, получим что ограниченный с Y регуляризованный I-ряд $I^{Y \to S'}_{-K_Y,1}$ для гладкого антиканонического сечения Y равен Φ_f.

Таким образом, мы вычислили I-ряд сглаживания Y многообразия X не пользуясь геометрией. На самом деле, легко видеть, что сглаживание многообразия X является многообразием V_5, так как это единственное трёхмерное многообразие Фано с $(\rho, r, \deg, b) = (1, 2, 40, 0)$. Так как V_5 является сечением $G(2,5)$ тремя плоскостями, его I-ряд можно вычислить применив квантовую формулу Лефшеца ([35]) к I-ряду $G(2,5)$ выписанному в [6, 38]: $I_{G(2,5)} = \sum_{d \geqslant 0} \frac{t^d}{(d!)^2} \sum_{d \geqslant j_2 \geqslant j_1 \geqslant j_0 = 0} \frac{1}{(d-j_2)! \prod_{i=2}^{3}((d-j_{i-1})!(j_{i-1}-j_{i-2})! j_{i-1}!)}$.

Легко проверить, что после применения квантовой формулы Лефшеца к I-ряду грассманиана $I_{G(2,5)}$ получится 6.8.

7. Обобщения

К сожалению, сглаживанием нодальных торических многообразий являются только половина из трёхмерных многообразий Фано. В частности, единственное вырождающееся в нодальное торическое семейство многообразий Фано основной серии индекса 1 — это V_{22}. Отметим, что для нодальных торических многообразий, проективная нормальность и гладкость общего антиканонического сечения доказываются совсем просто, и можно показать, что эти свойства сохраняются при сглаживании (например, как в 6.3). Все сглаживания Y получились рациональными. Тем же методом можно получить более широкий класс сглаживаний, если кроме самих торических многообразий рассматривать ещё и полные пересечения в них (с горенштейновыми терминальными особенностями, например) — они тоже имеют сглаживания (3.23), верны аналогичные соотношения между инвариантами сглаживания и вырождения, для них тоже несложно вычислить когомологии ([39]), многочлен Гильберта,

[9]Как мы увидим, индекс W и X равен 2, поэтому перенормировка тривиальна: $\alpha = 0, \tilde{t} = t$.

да и теория Громова–Виттена для полных пересечений в торических многообразиях изучена столь же хорошо, как и для самих торических многообразий. При этом бирациональный класс полного пересечения в торическом многообразии бывает уже произвольным. Многие из невырождающихся в нодальные торические многообразий сами являются обычными полными пересечениями во взвешенных проективных пространствах. Например, Батырев и Крёйзер нашли все нодальные полуантиканонические гиперповерхности в торических многообразиях Фано индекса 2: всего их около 160, из них 100 — это конусы над изучавшимися в этой главе торическими многообразиями, а оставшиеся 60 почти покрывают все невырождающиеся в нодальные торические многообразия Фано.

Другое направление обобщений — торические многообразия с произвольными горенштейновыми особенностями. Для пары нетерминальных горенштейновых торических трёхмерных многообразий Фано $\mathbb{P}(\Delta_{16}), \mathbb{P}(\Delta_{18})$ Пржиялковский показал ([36]), что некоторые многочлены Лорана f_{16}, f_{18} с носителями в соответствующих многогранниках Δ_{16}, Δ_{18} являются слабыми моделями Ландау–Гинзбурга для гладких трёхмерных многообразий Фано основной серии V_{16} и V_{18}; поэтому, не исключено что метод торических вырождений работает для более общего класса особенностей (возможно, для всех горенштейновых), хотя про сами пары $(\mathbb{P}(\Delta_{16}), V_{16})$ и $(\mathbb{P}(\Delta_{18}), V_{18})$ наверняка пока не известно являются ли они вырождениями.

Список литературы

[1] V. V. Batyrev, *Quantum Cohomology Rings of Toric Manifolds*, arXiv:alg-geom/9310004.

[2] V. V. Batyrev. *Dual polyhedra and mirror symmetry for calabi-yau hypersurfaces in toric varieties*, *J. Algebraic Geom.*, 3:493–535 (1994), arXiv:alg-geom/9310003.

[3] A. B. Givental. *Homological geometry and mirror symmetry.* In *Proceedings of the ICM, Zürich 1994*, volume 1, pages 472 – 480. Birkhäuser (1995), http://math.berkeley.edu/~giventh/papers/hg.pdf

[4] B. Sturmfels, *Gröbner bases and convex polyhedra American Mathematical Society*, 8, 1996.

[5] N. Gonciulea, V. Lakshmibai, *Schubert varieties, toric varieties and ladder determinantal varieties*, *Ann. Inst. Fourier*, t.47:1013 – 1064 (1997), http://www.math.neu.edu/~lakshmibai/mega.pdf.

[6] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for calabi-yau complete intersections in grassmannians*, arXiv:alg-geom/9710022.

[7] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, Acta Math. 184, No. 1 (2000), 1–39, arXiv:math.AG/9803108.

[8] V. V. Batyrev, *Toric Degenerations of Fano Varieties and Constructing Mirror Manifolds*, Collino, Alberto (ed.) et al., The Fano conference. Papers of the conference, Torino, Italy, September 29–October 5, 2002. Torino: Universita di Torino, Dipartimento di Matematica. 109–122 (2004), arXiv:alg-geom/9712034.

[9] В. А. Исковских, *Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий*, Итоги науки и техники, сер. Современные проблемы математики. Т. 12, М.: ВИНИТИ, с. 59–158 (1979).

[10] S. Mori, S. Mukai, *Classification of fano 3-folds with* $b_2 \geqslant 2$, *Manuscr. Math.*, **36**:147–162 (1981). Erratum **110**: 407 (2003).

[11] S.Mori, S.Mukai, *On fano 3-folds with* $b_2 \geqslant 2$, *Algebraic varieties and analytic varieties, Proc. Symp., Tokyo 1981, Adv. Stud. Pure Math.*, 1:101–129 (1983), http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mukai/paper/Fano1983.pdf

[12] S.Mori, S.Mukai, *Classification of Fano 3-folds with* $B_2 > 2$, *I*, 'Algebraic and Topological Theories – to the memory of Dr. Takehiko Miyata', (M. Nagata ed.), Kinokuniya, 496–545 (1985), http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mukai/paper/Fano1985.pdf.

[13] В. А. Исковских, *Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано*, М.: Московский университет (1988).

[14] S. Mukai, *Fano 3-folds*, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 179, 255–263 (1992).

[15] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov, *Fano Varieties*, volume 47 of *Encyclopaedia Math. Sci.* Springer-Verlag, Berlin.

[16] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Algebraic Geom., Sendai, June 24-29, 1985: Symp. Tokyo; Amsterdam e.a.1987 p. 283–360.

[17] M. Reid, *Young person's guide to canonical singularities*, In Algebraic Geometry Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987).
[18] B. Nill, *Gorenstein toric fano varieties*, *manuscripta mathematica*, 116:183 (2005). Диссертация (подробная): http://w210.ub.uni-tuebingen.de/dbt/volltexte/2005/1888/pdf/nill.pdf.
[19] В. И. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, Успехи матем. наук, т. 33, вып. 2 (200) (1978), 85–134.
[20] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1993).
[21] H. Clemens, *Degeneration of Kahler manifolds*, Duke Math. J. Volume 44, Number 2 (1977), 215–290.
[22] В. С. Куликов, П. Ф. Курчанов *Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления ВИНИТИ, т. 36 (1989).
[23] C. Voisin, *Hodge theory and complex algebraic geometry*, Cambridge Studies in Adv. Math. 77, CUP, 2003.
[24] P. Deligne, *Theoreme de Lefschetz et criteres de degenerescence de suites spectrales*, Publications Mathematiques de l'IHES, 35 (1968), p. 107-126
[25] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, М.: Мир (1981)
[26] Y. Kawamata, *Deformations of canonical singularities*, J. Am. Math. Soc. 12, No.1 (1999), 85–92 arXiv:alg-geom/9712018.
[27] R. Friedman, *Simultaneous resolutions of threefold double points.*, *Math.Ann.*, 274(4):671–689 (1986).
[28] Y. Namikawa, *Smoothing fano 3-folds.*, *J Alg. Geom.*, 6:307–324 (1997).
[29] P. Jahnke, I. Radloff, *Terminal fano threefolds and their smoothings*, arXiv:math/0601769.
[30] M. Reid, *The moduli space of* 3*-folds with* $K = 0$ *may nevertheless be irreducible*, *Math. Ann.*, 278:329–334 (1987).
[31] M. Kreuzer, H. Skarke, *PALP: A Package for Analyzing Lattice Polytopes with Applications to Toric Geometry*, Computer Physics Communications, 157:87 (2004), arXiv:math/0204356.
[32] M. Kreuzer, H. Skarke, *Classification of reflexive polyhedra in three dimensions. Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2:847 (1998), arXiv:hep-th/9805190.
[33] A. Kasprzyk, *Toric fano 3-folds with terminal singularities*, *Tohoku Math. J.*, Volume 58, Number 1 (2006), 101–121. arXiv:math/0311284.
[34] A. B. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Kashiwara, Masaki (ed.) et al., Topological field theory, primitive forms and related topics. Proceedings of the 38th Taniguchi symposium, Kyoto, Japan, December 9–13, 1996 Boston, MA: Birkhauser. Prog. Math. 160, 141–175, arXiv:alg-geom/9701016.
[35] A. Gathmann, *Absolute and relative Gromov-Witten invariants of very ample hypersurfaces*, Duke Math. J. 115, No. 2 (2002), 171–203, arXiv:math.AG/0009190.
[36] В. В. Пржиялковский, *On Landau–Ginzburg models for Fano varieties*, Comm. Num. Th. Phys., в печати, arXiv:0707.3758.
[37] V. Przyjalkowski, *Quantum cohomology of smooth complete intersections in weighted projective spaces and singular toric varieties*, arXiv:math/0507232v3.
[38] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, *Two Proofs of a Conjecture of Hori and Vafa*, Duke Math. J. 126, No. 1 (2005), 101–136, arXiv:math.AG/0304403.
[39] В. И. Данилов, А. Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа–Делиня*, Изв. АН СССР, Сер. Мат., 50, No. 5 (1986), 925–945.