Задачи по аддитивной комбинаторике, 2011

Шкредов И.Д.

Обозначения. Пусть $\mathbf{G}$ — произвольная абелева группа. Суммой множеств $A, B \subseteq \mathbf{G}$ называется множество

$$C = \{a + b \ : \ a \in A,\, b \in B\}\,.$$

Мы пишем kA, $k \geq 2$ для суммы множества A с собой взятой k раз. Аддитивная энергия множеств A и B (обозначается $E(A, B)$) есть число решений уравнения

$$E(A, B) = |\{a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \ : \ a_1, a_2 \in A\,, b_1, b_2 \in B\}\,.$$

Знаки $\ll$, $\gg$ — суть обычные символы Виноградова. Мы пишем $a \sim b$ если $a \gg b$ и, одновременно, $b \gg a$. $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p—простое и $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Через $|A|$ обозначается мощность множества A.

Составитель нисколько не претендует на авторство задач.

Классические задачи.

1. (Основной вопрос) Придумать какое–нибудь необходимое условие для того, чтобы множество имело вид $A + A$. Иными словами : чем суммы $A + A$ отличаются от произвольных множеств? Есть ли эффективный алгоритм распознавания таких множеств?

2. (Полиномиальная гипотеза Фреймана—Ружи) Пусть $\mathbf{G}$ — без кручения и $A \subseteq \mathbf{G}$ — некоторое множество, $|A + A| \leq K|A|$. Тогда найдется абсолютная константа $C > 0$ и множество $Q = P_1 + \dots + P_d$, P_j — арифметические прогрессии так, что
1) $|Q \bigcap A| \gg |A|/K^C$.
2) $|Q| \leq |A|$.
3) $d \ll \log K$.

3. (Гипотеза Эрдеша–Турана) Пусть $A = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$ — произвольное множество такое, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j$ — расходится. Доказать, что A содержит арифметическую прогрессию любой длины.

4. (Гипотеза Виноградова) Доказать, что минимальный квадратичный вычет/невычет в $\mathbb{Z}_p$ меньше чем p^{ε} для любого $\varepsilon > 0$.

5. (Дискретная проблема Какеи для вычетов) Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_p^*$ — некоторое множество, $|A| = (p-1)/2$. Пусть также $|Q| = (p-1)/2$ — произвольное множество. Верно ли, что для некоторого $q \in Q$ минимальный элемент множества qA меньше чем p^{ε} для любого $\varepsilon > 0$?

6. (Вопрос Алона) Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — произвольное множество, $|A| \geq c\sqrt{p}$, где $c > 0$ — некоторая маленькая абсолютная константа (например, $1/100$). Могут ли все числа из множества $A + A$ быть квадратичными вычетами/невычетами? Тот же вопрос, но пусть, дополнительно, известно, что все суммы $A + A$ — различные.

7. (Нелинейные раскраски) Пусть множество $\mathbf{N}$ раскрашено в конечное число цветов. Доказать или опровергнуть, что найдутся различные натуральные x и y такие, что $x + y$ и xy одного цвета.

8. (Возвращаемость на торах) Пусть множество $S \subseteq \mathbb{Z}_p$ — синдетическое, то есть расстояние между его любыми соседними элементами ограничено сверху некоторой абсолютной константой d. Доказать, что $S+S$ содержит арифметическую прогрессию длины $p^{\varepsilon(d)}$, где величина $\varepsilon(d)>0$ зависит только от d.

9. (Базисные свойства подгрупп) Пусть $R \subseteq \mathbb{Z}_p^*$ — мультипликативная подгруппа, $|R| > p^{1/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Верно ли, что $\mathbb{Z}_p^* \subseteq R+R$?

10. (Graph removal lemma) Пусть в некотором трехдольном графе с долями размера n найдется δn^3 треугольников, $\delta > 0$. Доказать, что существует $\delta' = \delta'(\delta)$ такое, что удаление $\delta' n^2$ ребер делает граф свободным от треугольников.

11. (Вопрос Эрдеша—Турана о базисе) Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$ — асимптотический базис порядка два, то есть такое множество, что любое достаточно большое натуральное число принадлежит $A+A$. Верно ли, что для любого натурального M найдется x, которое представляется в виде суммы $x = a_1 + a_2$, $a_1, a_2 \in A$ не менее M способами?

12. (Гипотеза Зарембы) Пусть p — простое число. Доказать, что найдется $x \in [1,2,\dots,p-1]$ такой, что для разложения $\frac{x}{p}$ в цепную дробь $\frac{x}{p} = \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\dots}}$ выполнено $a_i = O(1)$.

Задачи.

1. Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ не содержит колинеарных троек. Доказать, что $|A+A| > |A|^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

2. Пусть $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\} \subseteq \mathbf{R}$ — выпуклое множество, то есть такое, что последовательность $(a_{i+1} - a_i)$ — монотонно возрастает. Верно ли, что $|A+A| \sim |A-A|$, $n \to \infty$?

3. Пусть $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\} \subseteq \mathbf{R}$ — выпуклое множество, то есть такое, что последовательность $(a_{i+1} - a_i)$ — монотонно возрастает. Доказать, что для некоторой абсолютной константы k выполнено $|kA| \gg n^2$.

4. Пусть $c \in (0,1]$ — произвольная константа и $A \subseteq \mathbf{G}$ — любое множество. Пусть также $\mathrm{Sym}_c(A) = \{x \in \mathbf{G} \;:\; |A \cap (A+x)| \ge c|A|\}$. Верно ли, что множество $\mathrm{Sym}_c(A)$ есть множество с малым удвоением, иными словами, верно ли, что найдется константа $K(c)$ такая, что $|\mathrm{Sym}_c(A) + \mathrm{Sym}_c(A)| \le K|\mathrm{Sym}_c(A)|$?

5. Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$, $|A| \ge n^2$ (или, например, $|A| \ge n^C$, $C > 1$ — абсолютная константа) — произвольное множество такое, что $|A+A| \le |A|^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Доказать, что существует подпространство L размерности $k = o(n)$ такое, что $|A \bigcap L| \gg k^{1+\delta}$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$.

6. Пусть множество $\{1,4,9,\dots,n^2\}$ содержится в сумме $A+A$, где A — некоторое множество. Доказать, что $|A| > n^{2/3+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

7. Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}$ и $|A-A| \le K|A|$. Доказать, что $A-A$ содержит арифметическую прогрессию длины $\gg (\log|A|/\log K)^{1+\varepsilon}$.

8. Описать подмножества $T \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ для которых найдется подпространство L такое, что $T + L = \mathbb{Z}_2^n$, причем $|L| = 2^n/|T|$.

9. (см. предыдущую задачу) Описать $T+T$.

10. Пусть множество $\mathbb{Z}_2^n \backslash \{0\}$ раскрашено в k цветов, причем любые x,y,z со свойством $x+y+z=0$ не раскрашены в один и тот же цвет. Доказать, что $k \gg n$.

11. Оценить тригонометрические суммы по биномиальным коэффициентам, числам Бернулли и Стирлинга.

12. Пусть $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ — система точек и псевдокривых в $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ($\mathcal{P}$ — обычные точки; только один элемент $\mathcal{L}$ проходит через две различные точки, любые два элемента $\mathcal{L}$ пересекаются по единственной точке из $\mathcal{P}$). Пусть $|\mathcal{P}| = |\mathcal{L}| = N < p^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Доказать, что число инциденций между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{L}$ не превосходит $N^{3/2-\delta}$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

13. Пусть $R \subseteq \mathbb{Z}_p^*$ — мультипликативная подгруппа, $|R| > p^{1/2}$. Найти минимальное k такое, что $kR = \mathbb{Z}_p^*$.

14. Пусть $R \subseteq \mathbb{Z}_p^*$ — мультипликативная подгруппа, $|R| < p^{1/2}$. Доказать, что $|R+R| \gg |R|^{2-\varepsilon}$.

15. Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ — произвольное множество, $|A| > p^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Доказать, что найдется l, зависящее только от ε такое, что $(lA)^l = \mathbb{Z}_p^*$.

16. Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ — произвольное множество, $|A| = \delta p$, $0 < \alpha < \delta$ — некоторый параметр. Рассмотрим множество

$$\mathrm{Spec}_\alpha(A) = \{r \in \mathbb{Z}_p \ : \ |\sum_{x\in A} e^{2\pi i r x/p}| \ge \alpha |A|\}\,. \tag{1}$$

Какие свойства есть у множеств $\mathrm{Spec}_\alpha(A)$? Существует ли эффективный алгоритм позволяющий распознать является ли данное множество Q множеством вида (1)?

17. (см. предыдущую задачу) Какие особые свойства есть у множеств $\mathrm{Spec}_\alpha(kA)$, $k \ge 2$?

18. Определим бинарную операцию на $\mathbb{Z}_p$ по правилу $x \circ y = x^2 + xy$. Доказать, что $|A \circ B| \ge \min\{p, |A| + |B| - O(1)\}$.

19. Пусть $H \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ — некоторое подпространство и $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ — произвольное множество такое, что все его суммы — различны. Пусть также все элементы суммы $H + \Lambda$ — различны. Существует ли эффективный алгоритм позволяющий распознавать множества такого вида?

20. (Графы Кэли) Пусть $|A|, |B| \sim \sqrt{p}$ и χ — неглавный характер по $\mod p$. Доказать, что $|\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} \chi(a+b)| < p^{1-\delta}$, $\delta > 0$.

21. Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ — произвольное непустое множество, $A \neq \mathbb{Z}_p$. Оценить величину $\min_r |\sum_{x\in A} e^{2\pi i r x/p}|$ снизу через $|A|$.

22. Пусть $E(A,A) = |A|^3/K$, $K \ge 1$ — некоторая константа. Верно ли, что найдется $X \subseteq A$ такое, что $E(X,X) \gg E(A,A)$ и $|X+X| \ll K|X|$?

23. Пусть $R \subseteq \mathbb{Z}_p^*$ — мультипликативная подгруппа по $\mod p$, а χ — неглавный характер на R. Оценить нетривиально сумму $\sum_{x\in R} \chi(x)$.

24. Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ — произвольное множество, $|A| \ge \delta 2^n$. Доказать, что $A+A$ содержит аффинное подпространство размерности $n - O_\delta(1)$.

25. Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ — произвольное множество, $|A| < \sqrt{p}$. Доказать, что найдется $x \in A+A$ такое, что число представлений x в виде суммы двух элементов из A меньше, чем $p^{1-\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

26. Пусть множество $\mathbf{N}$ раскрашено в конечное число цветов. Доказать или опровергнуть, что найдутся различные натуральные x, y и z одного цвета такие, что $x^2+y^2 = z^2$.

27. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^2 = \{1^2, 2^2, \dots\}$. Доказать, что $|A+A| > |A|^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

28. Доказать, что любое подмножество $[1,2,\dots,N]^d$ плотности $1/(\log_{[M_d]} N)^{c_d}$, где $M_d, c_d > 0$ — некоторе константы, а $\log_{[s]}$ означает итерацию логарифма, взятую s раз, содержит конфигурацию $\{(x_1,\dots,x_d), (x_1+y,\dots,x_d), \dots, (x_1,\dots,x_d+y)\}$, $y > 0$.

29. (размер множеств Сидона) Пусть $\Lambda \subseteq [1,2,\dots,n]$ — некоторое множество и $g \ge 1$, $h \ge 2$ — произвольные целые числа. Предположим, что любой $x \in [1,2,\dots,n]$ представляется в виде суммы h элементов из Λ не более g способами. Пусть теперь $\Lambda(n)$ — максимальное из множеств с такими свойствами. Доказать, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\Lambda(n)|}{\sqrt[h]{\lfloor g/h! \rfloor n}}\,.$$

30. Пусть $W(2,3,k)$ — это минимальное натуральное число такое, что при любой раскраски $[1,2,\dots,W(2,3,k)]$ в два цвета либо найдется арифметическая прогрессия длины три одного цвета, либо — арифметическая прогрессия длины k — другого. Верно ли, что $W(2,3,k) \ll k^2$?

31. (Cap set problem) Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_3^n$ — произвольное множество такое, что если $x+y+z=0$, $x,y,z \in A$, то $x=y=z$. Доказать, что существует абсолютная константа $\varepsilon_0 > 0$ такая, что $|A| \le (3-\varepsilon_0)^n$.

Другие сборники задач :

• Vsevolod Lev и Ernie Croot "Problems presented at the workshop on "Recent Trend in Additive Combinatorics" ".
• Melvyn Nathanson "Problems in Additive Number Theory I–III".

Книги по аддитивной комбинаторике :

• T. Tao, V. Vu "Addditive combinatorics" / volume 105 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
• M. Nathanson "Additive number theory. Inverse problems and the geometry of sumsets" / Graduate Texts in Mathematics 165, Springer–Verlag, New York, 1996.
• I. Ruzsa "Sums of fnite sets" / Number Theory: New York Seminar; Springer-Verlag (1996), D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky and M.B. Nathanson editors.
• I. Ruzsa "Sumsets and structure" / preprint.

Обзоры :

• B. Green "Finite field model in additive combinatorics"// Surveys in Combinatorics, 329, LMS Lecture Notes, 2005, 1–29.
• N.H. Katz, T. Tao "Recent progress on the Kakeya conjecture"// Proceedings of the 6th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations (El Escorial, 2000), Extra, Publ. Mat., 2002, 161–179.
• T. Tao "From rotating needles to stability of waves: emerging connections between combinatorics, analysis, and PDE"// Notices Amer. Math. Soc.,48:3 (2001), 294–303.
• И.Д. Шкредов "Теорема Семереди и задачи об арифметических прогрессиях"// Успехи мат. наук, 61:6 (2006), 111–178.
• И.Д. Шкредов "Анализ Фурье в комбинаторной теории чисел"// Успехи мат. наук, 65:3 (2010), 88–144.