УДК 517.938

И. Д. Шкредов

О динамических системах с медленной скоростью возвращения

В настоящей работе мы изучаем вопрос о скорости возвращения у динамических систем в метрических пространствах с конечной хаусдорфовой мерой. Для таких систем М. Бошерницан получил верхние оценки скорости однократного, а автор – кратного возвращения. Статья посвящена нахождению нижних оценок скорости кратного возвращения. Говоря точнее, мы строим пример динамической системы (одометра, или преобразования фон Неймана) с медленной скоростью кратного возвращения. В доказательстве используется теорема А. Беренда о множествах без арифметических прогрессий.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Пусть X – некоторое множество с сигма-алгеброй его подмножеств $\mathscr{B}$. Пусть также T – измеримое сохраняющее меру μ отображение X в себя. Ниже будем считать, что $\mu(X)=1$. Четверка $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ называется динамической системой с инвариантной мерой. Хорошо известная *теорема Пуанкаре о возвращении* утверждает, что для всякого измеримого множества $E\subseteq X$, $\mu E>0$, существует натуральное $n>0$ такое, что $\mu(E\cap T^{-n}E)>0$.

Предположим, дополнительно, что X – метрическое пространство с метрикой $d(\,\cdot\,,\cdot\,)$, а $\mathscr{B}$ – борелевская сигма-алгебра. В этом случае теорема Пуанкаре может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 1.1. *Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и μ – борелевская мера на X. Пусть T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ. Тогда для почти всех точек $x\in X$ выполнено*

$$\liminf_{n\to\infty} d(T^n x,x)=0. \tag{1}$$

В работе [1] (см. также [2], [3]) Г. Фюрстенберг обобщил теорему Пуанкаре на случай нескольких степеней отображения T.

Теорема 1.2. *Пусть X – пространство с сигма-алгеброй измеримых множеств $\mathscr{B}$ и μ – мера на X. Пусть T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ, и $k\geqslant 3$. Тогда для любого измеримого множества E с $\mu E>0$ существует натуральное $n>0$ такое, что*

$$\mu(E\cap T^{-n}E\cap T^{-2n}E\cap\dots\cap T^{-(k-1)n}E)>0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00912), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-136.2003.1) и фонда INTAS (грант № 03-51-5-70).

Если X – метрическое пространство, то теорема 1.2 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 1.2′. *Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$ и μ – борелевская мера на X. Пусть T – сохраняющее меру μ отображение X в себя и $k \geqslant 3$. Тогда для почти всех $x \in X$*

$$\liminf_{n\to\infty} \max\bigl\{d(T^n x, x), d(T^{2n} x, x), \dots, d(T^{(k-1)n} x, x)\bigr\} = 0.$$

В работе [4] Г. Фюрстенберг и Я. Кацнельсон перенесли теорему 1.2 на случай нескольких коммутирующих отображений. Мы сформулируем их теорему в случае, когда X является метрическим пространством.

Теорема 1.3. *Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot,\cdot)$ и μ – борелевская мера на X. Пусть $k \geqslant 2$ и $T_1, T_2, \dots, T_k$ – сохраняющие меру μ коммутирующие отображения X в себя. Тогда для почти всех $x \in X$ выполнено*

$$\liminf_{n\to\infty} \max\bigl\{d(T_1^n x, x), d(T_2^n x, x), \dots, d(T_k^n x, x)\bigr\} = 0.$$

Пусть A – некоторое подмножество натурального ряда. Обозначим через $[N]$ отрезок натурального ряда $\{1,2,\dots,N\}$. *Верхней плотностью* множества A называется величина

$$D^*(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{|A\cap[N]|}{N}\,,$$

где $|A\cap[N]|$ означает мощность множества $A\cap[N]$.

В [2] было показано, что теорема 1.2 эквивалентна знаменитой теореме Е. Семереди об арифметических прогрессиях.

Теорема 1.4. *Пусть A – произвольное подмножество натурального ряда и $D^*(A) > 0$. Тогда для любого натурального $k \geqslant 3$ множество A содержит арифметическую прогрессию длины k.*

Следует отметить, что в случае $k=3$ теорема 1.4 была доказана ранее К. Ф. Ротом (см. [5]).

Легко показать, что теоремы 1.2 и 1.2′ вытекают из теоремы 1.4 (см. [2]). На самом же деле теорема 1.2 (1.2′) и теорема 1.4 равносильны. Для доказательства их равносильности Фюрстенберг установил следующий красивый результат, который называется *принципом соответствия Фюрстеберга.*

Теорема 1.5. *Пусть A – произвольное подмножество натурального ряда с $D^*(A) > 0$. Тогда существуют динамическая система с инвариантной мерой $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ и измеримое множество E, $\mu E = D^*(A)$, такие, что для всех натуральных $k \geqslant 3$ и для всех натуральных положительных $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ выполнено*

$$D^*(A\cap(A+m_1)\cap\dots\cap(A+m_{k-1})) \geqslant \mu(E\cap T^{-m_1}E\cap\dots\cap T^{-m_{k-1}}E). \qquad (2)$$

Теорема 1.5 указывает на тесную связь между эргодической теорией и комбинаторными задачами об арифметических прогрессиях.

Утверждение 1.6. *Из теорем 1.2 и 1.5 вытекает теорема 1.4.*

Доказательство. Пусть k – натуральное число, $k \geqslant 3$. Пусть также множество $A \subseteq \mathbb{N}$ не содержит арифметических прогрессий длины k и имеет положительную верхнюю плотность. По теореме 1.5 существуют динамическая система $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ и измеримое множество E положительной меры такие, что для всех натуральных $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ выполнено неравенство (2). С другой стороны, по теореме 1.2 существует натуральное $n > 0$ такое, что

$$\mu(E \cap T^{-n}E \cap T^{-2n}E \cap \dots \cap T^{-(k-1)n}E) > 0. \tag{3}$$

Положим $m_1 = n$, $m_2 = 2n$, $\dots$, $m_{k-1} = (k-1)n$. Из (2) и (3) вытекает неравенство $D^*(A \cap (A+n) \cap \dots \cap (A+(k-1)n)) > 0$. Это противоречит тому, что A не содержит арифметических прогрессий длины k. Утверждение доказано.

Главной целью настоящей статьи является получение нижних оценок скорости кратного возвращения для метрических пространств с конечной хаусдорфовой мерой. В работе [6] М. Бошерницан доказал, что если в динамической системе $(X, \mathscr{B}, \mu, T, d)$ пространство X обладает конечной хаусдорфовой мерой, то теорема Пуанкаре 1.1 может быть значительно усилена (ниже мы сформулируем теорему Бошерницана более строго). После этого результата возникает естественный вопрос о получении аналогичных усиленных вариантов теорем 1.2 и 1.3 для пространств с конечной хаусдорфовой мерой. Недавно в работах [7]–[11] такие варианты для теоремы 1.2 и, частично, теоремы 1.3 (случай $k = 2$) были получены. Все эти результаты дают верхние оценки скорости кратного возвращения. В настоящей статье мы получим простые нижние оценки скорости возвращения.

Прежде чем сформулировать теорему Бошерницана и наш основной результат, мы дадим несколько определений.

Рассмотрим меру $H_h(\,\cdot\,)$ на X, определенную следующим образом:

$$H_h(E) = \lim_{\delta \to 0} H_h^\delta(E), \tag{4}$$

где $h(t)$ – неотрицательная ($h(0) = 0$) непрерывная возрастающая функция, а $H_h^\delta(E) = \inf\bigl\{\sum h(\delta_j)\bigr\}$, где inf берется по не более чем счетным покрытиям E открытыми множествами $\{B_j\}$, $\operatorname{diam}(B_j) = \delta_j < \delta$. Если $h(t) = t^\alpha$, то $H_h(\,\cdot\,)$ – обычная мера Хаусдорфа, которую обозначим через $H_\alpha(\,\cdot\,)$.

Внешняя мера $H_h(\,\cdot\,)$ является сигма-аддитивной на сигма-алгебре множеств, измеримых по Каратеодори. Хорошо известно, что эта сигма-алгебра содержит все борелевские множества.

Будем говорить, что меры μ и H_h *согласованы*, если любое μ-измеримое множество является H_h-измеримым (в смысле измеримости по Каратеодори).

Определение 1.7. Пусть $x \in X$. Число

$$C(x) = C^h(x) := \liminf_{n \to \infty} \{n \cdot h(d(T^n x, x))\}$$

называется *константой возвращения* точки x.

В [6] М. Бошерницан получил первый количественный аналог теоремы 1.1. Похожий результат независимо доказал Н. Г. Мощевитин в [12].

Теорема 1.8. *Пусть X – метрическое пространство с $H_h(X) < \infty$, а T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ. Пусть также меры μ и H_h согласованы. Тогда для почти всех относительно меры μ точек x из X выполнено $C(x) < \infty$.*

Результат Бошерницана значительно усиливает теорему Пуанкаре. Чтобы показать это, рассмотрим простейший пример $H_1(X) < \infty$. По теореме Бошерницана для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех точек $x \in X$ выполнено

$$\liminf_{n\to\infty}\{n^{1-\varepsilon} \cdot d(T^n x, x)\} = 0,$$

тогда как теорема Пуанкаре дает лишь $\liminf_{n\to\infty}\{d(T^n x, x)\} = 0$.

В работе [6] М. Бошерницан получил ряд приложений теоремы 1.8 к различным динамическим системам.

В [13] был доказан результат, несколько усиливающий теорему 1.8.

Теорема 1.9. *Пусть X – метрическое пространство с $H_h(X) < \infty$, а T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ. Предположим, что меры μ и H_h согласованы. Тогда $C(x)$ – интегрируемая (по мере μ) функция и для любого μ-измеримого A выполнено*

$$\int_A C(x)\, d\mu \leqslant H_h(A). \tag{5}$$

Если же $H_h(A) = 0$, то

$$\int_A C(x)\, d\mu = 0$$

без условия согласованности мер μ и H_h.

Замечание 1.10. Согласно примеру из § 7 работы [6] оценка (5) в теореме 1.9 является неулучшаемой.

Вернемся к теоремам 1.2 и 1.4. Мы хотим обсудить некоторые их количественные варианты.

Пусть N и k – натуральные числа, $k \geqslant 3$. Положим

$$a_k(N) = \frac{1}{N}\max\bigl\{|A| : A \subseteq [N], \\ A \text{ не содержит арифметических прогрессий длины } k\bigr\}.$$

Ясно, что теорема 1.4 эквивалентна тому, что $a_k(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Первый количественный результат о скорости стремления к нулю функции $a_k(N)$ в случае, когда $k = 3$, был получен К. Ф. Ротом (см. [5]). В своей работе Рот, используя метод Харди–Литлвуда, доказал неравенство

$$a_3(N) \ll \frac{1}{\log\log N}\,.$$

Другими словами, Рот доказал количественный вариант теоремы 1.4 и, следовательно, теоремы 1.2 в случае, когда $k = 3$.

После работ Рота, Семереди и Фюрстенберга появились работы, в которых указанные теоремы были значительно улучшены. Наилучший, на сегодняшний день, результат об оценке сверху величины $a_3(N)$ принадлежит Ж. Бургену [14]. Он доказал, что

$$a_3(N) \ll \sqrt{\frac{\log\log N}{\log N}}\,. \tag{6}$$

В работе [7] В. Т. Гауэрс получил количественный результат о скорости стремления к нулю функции $a_k(N)$ для всех $k \geqslant 4$.

Теорема 1.11. *Для всех $k \geqslant 4$ справедливо неравенство*

$$a_k(N) \ll \frac{1}{(\log\log N)^{c_k}}\,,$$

где константа c_k зависит только от k.

В работе [15] А. Беренд получил нижнюю оценку величины $a_3(N)$. В [16] Р. Ранкин обобщил результат Беренда на случай всех $k \geqslant 3$ (см. также [17]).

Теорема 1.12. *Пусть $\varepsilon > 0$ – любое действительное число и $k \geqslant 3$ – натуральное. Тогда для всех достаточно больших N выполнено*

$$a_k(N) \geqslant \exp\bigl(-(1+\varepsilon)C_k(\log N)^{1/(k-1)}\bigr),$$

где C_k – некоторая положительная эффективная константа, зависящая только от k.

Количественный вариант теоремы 1.3 в случае $k = 3$ был получен в [8], [9], а затем усилен в [11].

Рассмотрим двумерную решетку $[N]^2$ с базисом $\{(1,0),\,(0,1)\}$. Пусть

$$\begin{aligned} L(N) = \frac{1}{N^2}\max\{|A| : A \subseteq [N]^2 \quad &\text{и} \\ A \text{ не содержит троек вида } (k,m),\ (k+d,m),\ (k,m+d),\ d>0\}&. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 1.13. *Справедливо неравенство $L(N) \ll 1/(\log\log N)^{C'}$, где C' – некоторая эффективная константа.*

Из этой оценки вытекает следующий результат о скорости возвращения в теореме 1.3 в случае $k = 2$ (см. [10], [11]).

Пусть S и R – два коммутирующих отображения пространства X, сохраняющие меру μ.

Определение 1.14. Пусть $x \in X$. Число

$$C_{S,R}(x) = C^h_{S,R}(x) := \liminf_{n\to\infty}\bigl\{L^{-1}(n)\cdot\max\{h(d(S^n x,x)), h(d(R^n x,x))\}\bigr\},$$

где $L^{-1}(n) = 1/L(n)$, называется *константой одновременного* (*или кратного*) *возвращения* точки x.

Теорема 1.15. *Пусть X – метрическое пространство с $H_h(X) < \infty$, а S, R – коммутирующие отображения X в себя, сохраняющие меру μ. Предположим, что меры μ и H_h согласованы. Тогда $C_{S,R}(x)$ – интегрируемая (по мере μ) функция и для любого μ-измеримого A выполнено*

$$\int_A C_{S,R}(x)\,d\mu \leqslant H_h(A). \tag{8}$$

Если же $H_h(A) = 0$, то

$$\int_A C_{S,R}(x)\,d\mu = 0$$

без условия согласованности мер μ и H_h.

Итак, в теоремах 1.8, 1.9, 1.15 получены верхние оценки для интегралов от функций $C(x)$ и $C_{S,R}(x)$. Как было отмечено выше (см. замечание 1.10), верхняя оценка (5) для $C(x)$ является неулучшаемой. Этого нельзя сказать про неравенство (8), так как истинный порядок роста $L(n)$ неизвестен. В нашей работе мы получим нижние оценки для функции кратного возвращения в случае, когда на пространстве X действует несколько степеней отображения T. Результат такого рода можно рассматривать как некоторый количественный аналог теоремы 1.5. Так как степени отображения T коммутируют, то мы автоматически получаем нижнюю оценку функции кратного возвращения и в ситуации, когда на X действует несколько коммутирующих отображений.

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Пусть k – фиксированное натуральное число, $k \geqslant 3$. Пусть для всякого натурального N задано непустое множество $A^{(N)} \subseteq \mathbb{Z}_N$, не содержащее арифметических прогрессий длины k. Обозначим плотность множества $A^{(N)}$ в $\mathbb{Z}_N$ через $\rho(N)$, $\rho(N) = |A^{(N)}|/N$. Тогда $\rho(1) = 1$. Так как $A^{(N)}$ не содержит арифметических прогрессий в $\mathbb{Z}_N$, то $A^{(N)}$ не содержит арифметических прогрессий и в $\mathbb{Z}$. По теореме 1.4 имеем $\rho(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Теорема 1.16. *Пусть $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ – произвольная монотонно возрастающая функция, $X = [0,1]$, μ – мера Лебега на X и $\{A^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ – построенная выше последовательность множеств. Тогда существует динамическая система $(X, \mathscr{B}, \mu, T, d)$ такая, что μ и хаусдорфова мера H_1 согласованы, $H_1(X) = 0$ и для почти всех относительно меры μ точек x из X выполнено*

$$\liminf_{n\to\infty}\biggl\{\frac{\psi(n)}{\rho(n)}\max\{d(T^n x, x), d(T^{2n}x, x), \dots, d(T^{(k-1)n}x, x)\}\biggr\} \geqslant 1. \tag{9}$$

Напомним, что через H_1 обозначена хаусдорфова мера с функцией $h(t) = t$.

Замечание 1.17. Равенство $H_1(X) = 0$ в теореме 1.16 является очень важным. Без условия $H_1(X) < \infty$ теорема становится тривиальной, поскольку всегда можно подобрать такую метрику d так, чтобы пространство X имело бесконечную хаусдорфову меру $H_1(X)$ и нижний предел в (9) был равен $+\infty$. Заметим также, что равенство $H_1(X) = 0$ можно, безусловно, заменить на более сильное равенство вида $H_{tg(t)} = 0$, где $g(t)$ – некоторая монотонная невозрастающая функция, $g(t) \to +\infty$ при $t \to 0+$.

Метод, развитый для доказательства основной теоремы 1.16, может быть приложен к изучению функции обычной (не кратной) возвращаемости $C(x)$.

В § 3 мы докажем следующий результат. Пусть κ – произвольное действительное число, $\kappa \in [0,1]$. Тогда существует динамическая система $(X,\mathscr{B},\mu,T,d)$ такая, что $H_1(X)=1$ и для почти всех относительно меры μ точек x из X выполнено $C(x)=\kappa$.

Использованные конструкции развивают подход из работы [6] и книги [2].

§ 2. Доказательство теоремы 1.16

Нам понадобится простая лемма, доказанная, фактически, в [18]. Другое доказательство аналогичной леммы может быть найдено в [19]. Поскольку формулировка нужной нам леммы несколько отличается от формулировки леммы из [18], то мы приведем наше собственное доказательство.

Лемма 2.1. *Пусть N – натуральное число, A – произвольное непустое подмножество $\mathbb{Z}_N$ и $\varphi \geqslant 1$ – действительное число. Тогда существуют такие вычеты $a_1,\dots,a_l \in \mathbb{Z}_N$ и такое разбиение $\mathbb{Z}_N$ на непересекающиеся множества $A_1,A_2,\dots,A_l$ и B, что*

1) *$A_i \subseteq A + a_i$ для всех $i=1,\dots,l$,*
2) *$|A_i| \geqslant |A|/\varphi$ для всех $i=1,\dots,l$,*
3) *$|B| \leqslant N/\varphi$.*

Доказательство леммы представляет собой индукционный процесс. На n-м шаге будут последовательно построены множества $A_1,\dots,A_n$, вычеты a_1, $\dots,a_n$ и вспомогательные множества $B_1,\dots,B_n$. При этом выполняется вложение $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_n$.

Пусть $n=1$. Положим $a_1=0$, $A_1=A$ и $B_1=\mathbb{Z}_N\setminus A_1$. Если $|B_1|\leqslant N/\varphi$, то лемма 2.1 доказана. Действительно, пусть $B=B_1$. Легко видеть, что условия 1)–3) выполнены.

Пусть на n-м шаге индукционного процесса множества $A_1,\dots,A_n$ и вычеты $a_1,\dots,a_n$ уже построены. Пусть также $B_n=\mathbb{Z}_N\setminus\bigl(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\bigr)$. Если $|B_n|\leqslant N/\varphi$, то лемма 2.1 доказана. Действительно, положим $B=B_n$. Тогда условия 1)–3) для множеств $A_1,\dots,A_n$, B и вычетов $a_1,\dots,a_n$ выполнены.

Пусть $|B_n|>N/\varphi$. Имеем

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}_N}|B_n\cap(A+t)| = |A|\,|B_n| \geqslant \frac{N|A|}{\varphi} \tag{10}$$

и существует $t\in\mathbb{Z}_N$ такое, что $|B_n\cap(A+t)|\geqslant|A|/\varphi$. Положим $a_{n+1}=t$ и $A_{n+1}=B_n\cap(A+a_{n+1})$. Тогда для всех $i=1,\dots,n$ выполнено $A_{n+1}\cap A_i=\varnothing$. Кроме того, $A_{n+1}\subseteq A+a_{n+1}$.

Так как для любого i выполнено $|A_i|\geqslant|A|/\varphi>0$, то наш индукционный процесс закончится менее чем за $[N\varphi/|A|]+1$ шагов. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.16. Пусть α_m – произвольная невозрастающая последовательность действительных чисел, стремящаяся к нулю, $\alpha_m\in(0,1)$. Функция $\psi(n)$ определена только при натуральных значениях аргумента n. Продолжим линейным образом $\psi(n)$ на все действительные числа. Получим непрерывную монотонно возрастающую функцию, которую обозначим той же буквой $\psi(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Пусть $\varphi(t)=\sqrt{\psi(t)}$ и $\varphi^*(t)=\max\{1,\varphi(t)\}$. Рассмотрим неубывающую последовательность натуральных чисел

$$N_0\leqslant N_1\leqslant\dots\leqslant N_m\leqslant\dotsb,$$

где $N_0 = 1$, а для всех $m \geqslant 1$ выполнено $N_m = \lceil \varphi^{-1}(2\alpha_m^{-1}\varphi^*(2)N_0N_1\cdots N_{m-1})\rceil$. Здесь φ^{-1} – обратная функция к φ. Имеем $N_m \geqslant 2$, $m \geqslant 1$.

Пусть X – пространство последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$, $0 \leqslant x_i < N_i$, $i \geqslant 1$. Множество

$$C(a_1,\dots,a_l) = \bigl\{x = (x_1,x_2,\dots) \in X : x_1 = a_1,\ \dots,\ x_l = a_l\bigr\}$$

называется *элементарным цилиндром* ранга l. Можно сопоставить любой последовательности $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ точку из отрезка $[0,1]$ по правилу $x \to \sum_{i=1}^{\infty} x_i/(N_0N_1\cdots N_i)$. Если выкинуть из X счетное число точек, то указанное отображение является взаимно однозначным. Это позволяет рассматривать пространство X как отрезок $[0,1]$.

Пусть a – целое неотрицательное число, $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $a^+(N)$ число $a + 1 \pmod N$. Пусть отображение T пространства X в себя задается формулой $Tx = y$, $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$, где

$$
\begin{aligned}
&y_1 = x_1^+(N_1),\\
&y_2 = \begin{cases} x_2^+(N_1), & \text{если } x_1 + 1 = N_1,\\ y_2 & \text{в противном случае,}\end{cases}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y_m = \begin{cases} x_m^+(N_1), & \text{если } x_1 + 1 = N_1,\ x_2 + 1 = N_2,\dots,x_{m-1}+1 = N_{m-1},\\ y_m & \text{в противном случае,}\end{cases}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Пространство X обладает естественной групповой операцией $+$. Имеем $Tx = x + 1$, где $1 = (1, 0, 0, \dots)$. Ясно, что T сохраняет меру Хаара μ, которая в данном случае является мерой Лебега. При этом мера элементарного цилиндра ранга l равна $1/(N_0N_1\cdots N_l)$.

Возьмем произвольное N_s. По условию существует непустое множество $A^{(N_s)} = A^{(s)}$ из $\mathbb{Z}_{N_s}$, не содержащее арифметических прогрессий длины k. Применяя лемму 2.1 для множества $A^{(s)}$ и $\varphi = \varphi(N_s)$, построим для любого N_s множества $A_1^{(s)},\dots,A_l^{(s)}$, $l = l(s)$, и $B^{(s)}$, обладающие свойствами 1)–3).

Пусть $x, y \in X$, $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$. Рассмотрим функцию

$$
\begin{aligned}
d(x,y) = \bigl\{&\psi^{-1}(N_0\cdots N_m)\rho(N_0\cdots N_m),\\
&\text{где } m = m(x,y) \text{ максимальное такое, что } x_1 = y_1,\dots,x_{m-1} = y_{m-1}\\
&\text{и либо для некоторого } i \in 1,2,\dots,l(m) \text{ выполнено } x_m, y_m \in A_i^{(m)},\\
&\text{либо } x_m, y_m \in B^{(m)}\bigr\},
\end{aligned}
$$

где $\psi^{-1} = 1/\psi$. Легко убедиться, что $d(x,y)$ – неархимедова метрика на X. Рассмотрим хаусдорфову меру H_1 на пространстве X. Так как любой элементарный цилиндр является замкнутым и, следовательно, борелевским множеством в метрическом пространстве (X,d), то меры μ и H_1 согласованы.

Докажем, что $H_1(X) = 0$. Возьмем произвольное $\delta > 0$. Так как $\rho(N) \to 0$, при $N \to \infty$, то существует натуральное m такое, что

$$\frac{\rho(N_0\cdots N_m)}{\psi(N_0\cdots N_m)} < \delta.$$

Рассмотрим разбиение пространства X на множества

$$U_i(\vec{a}) = \bigl\{x = (x_1, x_2, \dots) \in X : x_1 = a_1,\ \dots,\ x_{m-1} = a_{m-1},\ x_m \in A_i^{(m)}\bigr\},$$

где $i = 1, \dots, l(m)$, и

$$B(\vec{a}) = \bigl\{x = (x_1, x_2, \dots) \in X : x_1 = a_1,\ \dots,\ x_{m-1} = a_{m-1},\ x_m \in B^{(m)}\bigr\},$$

где $\vec{a} \in [N_1] \times \dots \times [N_{m-1}] := F_{m-1}$. Тогда

$$X = \bigsqcup_{\vec{a} \in F_{m-1}} \biggl(B(\vec{a}) \sqcup \biggl(\bigsqcup_{i=1}^{l(m)} U_i(\vec{a})\biggr)\biggr).$$

Для любого $\vec{a} \in F_{m-1}$ и любого $i \in 1, 2, \dots, l(m)$ имеем

$$\operatorname{diam} U_i(\vec{a}) \leqslant \frac{\rho(N_0 \cdots N_m)}{\psi(N_0 \cdots N_m)} < \delta.$$

Аналогично, для любого $\vec{a} \in F_{m-1}$ выполнено

$$\operatorname{diam} B(\vec{a}) \leqslant \frac{\rho(N_0 \cdots N_m)}{\psi(N_0 \cdots N_m)} < \delta.$$

Из условия 2) леммы 2.1 вытекает, что

$$l(m) \leqslant \frac{N_m \varphi(N_m)}{|A^{(m)}|} = \frac{\varphi(N_m)}{\rho(N_m)}\,.$$

Учитывая последнее неравенство, получаем

$$\begin{aligned} H_1^\delta(X) &\leqslant |F_{m-1}| \biggl(\frac{\varphi(N_m)}{\rho(N_m)} + 1\biggr) \frac{\rho(N_0 \cdots N_m)}{\psi(N_0 \cdots N_m)} \\ &\leqslant 2N_0 \cdots N_{m-1} \frac{\varphi(N_m)\rho(N_0 \cdots N_m)}{\rho(N_m)\psi(N_0 \cdots N_m)} \leqslant 2N_0 \cdots N_{m-1} \frac{\varphi(N_m)}{\psi(N_m)}\,. \end{aligned}$$

Имеем $N_m \geqslant \varphi^{-1}(2\alpha_m^{-1} N_0 \cdots N_{m-1})$. Отсюда $2N_0 \cdots N_{m-1} \leqslant \alpha_m \varphi(N_m)$. Учитывая последнее неравенство, получаем

$$H_1^\delta(X) \leqslant \alpha_m \frac{\varphi^2(N_m)}{\psi(N_m)} \leqslant \alpha_m.$$

Так как $\alpha_m \to 0$ при $m \to \infty$, то $H_1(X) = 0$.

Докажем теперь неравенство (9).

Пусть

$$\widetilde{B}^{(s)} = \{x \in X : x_s \in B^{(s)}\} \subseteq X \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{s \geqslant n}^{+\infty} \widetilde{B}^{(s)}.$$

Имеем $\mu(\widetilde{B}^{(s)}) = |B^{(s)}|/N_s \leqslant 1/\varphi(N_s)$. Так как $\varphi(N_s) \geqslant N_0 \cdots N_{s-1}$ и $N_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$, то

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu(\widetilde{B}^{(s)}) \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(N_s)} \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{N_0 \cdots N_{s-1}} < \infty. \tag{11}$$

Применяя лемму Бореля–Кантелли, получаем, что $\mu\mathbf{B} = 0$.

Докажем, что для любого x, не принадлежащего $\mathbf{B}$, справедливо неравенство (9).

Возьмем $x = (x_1, x_2, \dots) \in X \setminus \mathbf{B}$. Так как $x \notin \mathbf{B}$, то существует некоторое $M = M(x) \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geqslant M$ выполнено $x_n \notin B^{(n)}$. Найдем натуральное m_0 из условий $N_0 \cdots N_{m_0-1} < M \leqslant N_0 \cdots N_{m_0}$. Докажем, что для любого $n \geqslant N_0 \cdots N_{m_0}$ справедливо неравенство

$$\rho^{-1}(n)\psi(n) \cdot \max\bigl\{d(T^n x, x), d(T^{2n} x, x), \dots, d(T^{(k-1)n} x, x)\bigr\} \geqslant 1. \tag{12}$$

Пусть $m_1 \geqslant m_0$ – натуральное число, и пусть для некоторого $n > 0$ такого, что

$$N_0 \cdots N_{m_1} \leqslant n < N_0 \cdots N_{m_1+1}, \tag{13}$$

неравенство (12) не выполнено. Тогда

$$d(T^n x, x),\ d(T^{2n} x, x),\ \dots,\ d(T^{(k-1)n} x, x) < \frac{\rho(N_0 \cdots N_{m_1})}{\psi(N_0 \cdots N_{m_1})}\,.$$

Пусть $y^{(1)} = T^n x, y^{(2)} = T^{2n} x, \dots, y^{(k-1)} = T^{(k-1)n} x$. Из свойств метрики $d(x, y)$ вытекает, что

$$d(y^{(1)}, x),\ \dots,\ d(y^{(k-1)}, x) \leqslant \frac{\rho(N_0 \cdots N_{m_1+1})}{\psi(N_0 \cdots N_{m_1+1})}\,.$$

Отсюда

$$x_1 = y_1^{(1)} = \dots = y_1^{(k-1)}, \dots, x_{m_1} = y_{m_1}^{(1)} = \dots = y_{m_1}^{(k-1)}$$

и для некоторого i выполнено

$$x_{m_1+1},\ y_{m_1+1}^{(1)},\ \dots,\ y_{m_1+1}^{(k-1)} \in A_i^{(m_1+1)}. \tag{14}$$

Имеем $n = y^{(1)} - x = y^{(2)} - y^{(1)} = \dots = y^{(k-1)} - y^{(k-2)}$. Используя (14), находим

$$y^{(1)} - x = \bigl(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_1}, y_{m_1+1}^{(1)} - x_{m_1+1} (\operatorname{mod} N_{m_1+1}), w_1, w_2, \dots\bigr),$$

$$y^{(2)} - y^{(1)} = \bigl(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_1}, y_{m_1+1}^{(2)} - y_{m_1+1}^{(1)} (\operatorname{mod} N_{m_1+1}), w_1', w_2', \dots\bigr),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(k-1)} - y^{(k-2)} = \bigl(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_1}, y_{m_1+1}^{(k-1)} - y_{m_1+1}^{(k-2)} (\operatorname{mod} N_{m_1+1}), w_1'', w_2'', \dots\bigr),$$

где $w_1, w_2, \dots,\ w_1', w_2', \dots$ и $w_1'', w_2'', \dots$ – некоторые числа. Отсюда вытекает, что $x_{m_1+1}, y_{m_1+1}^{(1)}, \dots, y_{m_1+1}^{(k-1)}$ образуют арифметическую прогрессию длины k по модулю N_{m_1+1}. Имеем $x_{m_1+1}, y_{m_1+1}^{(1)}, \dots, y_{m_1+1}^{(k-1)} \in A_i^{(m_1+1)}$. Так как $A_i^{(m_1+1)} \subseteq A^{(m_1+1)} + p$ для некоторого $p \in \mathbb{Z}_{N_{m_1+1}}$, то $A_i^{(m_1+1)}$ не содержит нетривиальных арифметических прогрессий длины k по модулю N_{m_1+1}. Следовательно, для всех $l = 1, 2, \dots, k-1$ выполнено $x_{m_1+1} \equiv y_{m_1+1}^{(l)} (\operatorname{mod} N_{m_1+1})$. Так как $0 \leqslant x_{m_1+1}, y_{m_1+1}^{(1)}, \dots, y_{m_1+1}^{(k-1)} < N_{m_1+1}$, то $x_{m_1+1} = y_{m_1+1}^{(1)} = \dots = y_{m_1+1}^{(k-1)}$. Отсюда

$$n = y^{(1)} - x = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m_1+1}, n_{m_1+2}, n_{m_1+3}, \dots). \tag{15}$$

Из (15) вытекает, что $n \geqslant N_0 \cdots N_{m_1+1}$. Противоречие с неравенством (13). Теорема 1.16 доказана.

Следствие 2.2. *Пусть k – натуральное число, $k \geqslant 3$, и $\varepsilon > 0$ – любое действительное число. Тогда найдутся динамическая система $(X, \mathscr{B}, \mu, T, d)$, $X = [0,1]$, μ – мера Лебега, μ и хаусдорфова мера H_1 согласованы, $H_1(X) = 0$, и положительная эффективная константа C_k, зависящая только от k, такая, что для почти всех точек $x \in X$ выполнено*

$$\liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\rho(n)}\max\{d(T^n x, x), d(T^{2n}x, x), \dots, d(T^{(k-1)n}x, x)\}\right\} \geqslant 1, \tag{16}$$

где $\rho(n) = \exp(-(1+\varepsilon)C_k(\log n)^{1/(k-1)})$.

Доказательство. По теореме 1.12 для всякого натурального $k \geqslant 3$ и любого достаточно большого натурального N существует множество $A_0^{(N)}$ из $[N-1]$ без прогрессий длины k такое, что $|A_0^{(N)}| \geqslant N\exp(-(1+\varepsilon)C_k(\log N)^{1/(k-1)})$, где C_k – некоторая абсолютная константа, зависящая только от k. Пусть $A_1^{(N)} = A_0^{(N)} \cap [1, N/k)$, $A_2^{(N)} = A_0^{(N)} \cap [N/k, 2N/k)$, $\dots$, $A_k^{(N)} = A_0^{(N)} \cap [N(k-1)/k, N)$. Для произвольного $j \in \{1, \dots, k\}$ множество $A_j^{(N)}$ не содержит арифметических прогрессий длины k *по модулю* N. Легко видеть, что существует $j \in \{1, \dots, k\}$ такое, что

$$|A_j^{(N)}| \geqslant \frac{N}{2k}\exp\bigl(-(1+\varepsilon)C_k(\log N)^{1/(k-1)}\bigr).$$

Положим $A^{(N)} = A_j^{(N)}$. Из теоремы 1.16 следует, что существует динамическая система, для которой неравенство (9) выполнено с функцией $\rho(n) = \exp(-C_k(1+\varepsilon')(\log n)^{1/(k-1)})$, где ε' можно, например, взять равным 2ε. Следствие доказано.

Замечание 2.3. Динамические системы $(X, \mathscr{B}, \mu, T, d)$, полученные в теореме 1.16 и следствии 2.2, можно назвать системами с медленной скоростью возвращения. Мы имеем в виду, что у этих систем кратная скорость возвращения гораздо медленнее обычной однократной. Действительно, из теорем 1.8, 1.9 вытекает, что для почти всех $x \in X$ выполнено $\liminf_{n\to\infty}\{n \cdot d(T^n x, x)\} = 0$. Отсюда видно, что однократная скорость возвращения выше кратной скорости, задаваемой неравенством (16).

§ 3. Об одномерной возвращаемости

Теорема 3.1. *Пусть $f \geqslant 1$ – любое действительное число, $X = [0,1]$ и μ – мера Лебега на X. Тогда существует динамическая система $(X, \mathscr{B}, \mu, T, d)$ такая, что μ и хаусдорфова мера H_1 согласованы, $H_1(X) = 1$ и для почти всех относительно меры Лебега точек x из X выполнено*

$$C_f(x) := \liminf_{n\to\infty}\{n \cdot f \cdot d(T^n x, x)\} = 1. \tag{17}$$

Замечание 3.2. Теорема 3.1 была доказана в [6] для случая $f = 1$.

Замечание 3.3. Пусть $X = [0,1]$, $\mathscr{B}$ – борелевская σ-алгебра, μ – мера Лебега, T_α – отображение X в себя, задаваемое формулой

$$T_\alpha x = (x + \alpha) \pmod 1.$$

Пусть также $d(x,y) = \|x-y\|$, где $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого. Существует такое число λ^* ($\lambda^* = 5.68195\dots$), что для всех $f \geqslant \lambda^*$ найдется отображение T_α, $\alpha = \alpha(f)$, такое, что $C_f(x) = 1$ для *всех* x из $[0,1]$. Луч $[\lambda^*, +\infty)$ называется *лучом Холла* (см. [20]). Точное значение величины λ^* было найдено Г. А. Фрейманом в [21]. Согласно теореме 3.1 динамическая система с равенством $C_f(x) = 1$ для почти всех точек x из $[0,1]$ существует для всех чисел $f \geqslant 1$, а не только для $f \geqslant \lambda^*$.

Замечание 3.4. Как и в теореме 1.16, неравенство $H_1(X) \leqslant 1$ в теореме 3.1 является очень важным (см. замечание 1.17). Кроме того, обратное неравенство $H_1(X) \geqslant 1$ также совершенно необходимо. Если отказаться от этого условия, то теорема 3.1 становится тривиальной. Действительно, пусть $f > 1$ и $(X, \mathscr{B}, \mu, T, d)$ – динамическая система, для которой $C_1(x) = 1$ (см. замечание 3.2). Положим $\widetilde{d}(x,y) = d(x,y)/f$ и рассмотрим новую динамическую систему $(X, \mathscr{B}, \mu, T, \widetilde{d})$. Тогда для любого $x \in X$ имеем $C_f(x) = 1$, что и утверждается в теореме 3.1. Заметим, что в построенной динамической системе равенство $H_1(X) = 1$ не выполнено. Действительно, $H_1(X) = 1/f < 1$.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $N_0 = 1$, $N_m = \lceil f2^m \rceil^2$, $m = 1, 2, \dots$, и пусть X – пространство последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$, $0 \leqslant x_i < N_i$, $i \geqslant 1$. Отображение из X в $[0,1]$, задаваемое формулой $x \to \sum_{i=1}^{\infty} x_i/(N_0 N_1 \cdots N_i)$, позволяет рассматривать пространство X как отрезок $[0,1]$. Пусть также преобразование $T\colon X \to X$ задается формулой $Tx = x + 1$, где сложение определено при доказательстве теоремы 1.16 и $1 = (1, 0, 0, \dots)$. Как отмечалось выше, преобразование T сохраняет меру Лебега μ.

Пусть $p_m = \sqrt{N_m} = \lceil f2^m \rceil$, $m \geqslant 1$, и пусть

$$A_m^{(j)} = \bigl\{x \in \{0, 1, \dots, N_m - 1\} : x \equiv j \pmod{p_m}\bigr\}.$$

Ясно, что множества $A_m^{(j)}$ образуют разбиение отрезка $\{0, 1, \dots, N_m - 1\}$. Пусть отображения $\varphi_j\colon A_m^{(j)} \to \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ задаются формулой $\varphi_j(x) = (x - j)/p_m$. Положим $\varphi(x) := \varphi_j(x)$, если $x \in A_m^{(j)}$. Тогда функция $\varphi(x)$ определена на всем отрезке $\{0, 1, \dots, N_m - 1\}$.

Рассмотрим функцию

$$d(x,y) = \biggl\{ \frac{r_m(x_m, y_m)}{N_0 \cdots N_{m-1}}, \quad \text{где } m \text{ максимальное такое, что } x_1 = y_1, \dots, x_{m-1} = y_{m-1} \text{ и для некоторого } i \in 1, 2, \dots, l(m) \text{ выполнено } x_m, y_m \in A_m^{(i)} \biggr\},$$

где

$$r_m(x_m, y_m) = \begin{cases} \dfrac{1}{N_m}, & \text{если } x_m = y_m, \\ \dfrac{|\varphi(x_m) - \varphi(y_m)|}{f p_m} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что всегда $1/N_m \leqslant r_m(x_m, y_m) \leqslant 1$.

Утверждение. *$d(x,y)$ – метрика на пространстве X.*

Доказательство утверждения. Симметричность функции $d(x,y)$ очевидна. Ясно также, что $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$. Докажем, что для любых $x,y,z\in X$, $x=(x_1,x_2,\dots)$, $y=(y_1,y_2,\dots)$, $z=(z_1,z_2,\dots)$, справедливо неравенство

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y). \tag{18}$$

Если $d(x,y)=0$, то (18) выполнено. Пусть $d(x,y)>0$. Тогда существует $m\in\mathbb{N}$ такое, что $d(x,y)=r_m(x_m,y_m)/(N_0\cdots N_{m-1})$. Если для некоторого $i\in 1,2,\dots,m-1$ выполнено $z_i\neq x_i$ или $z_i\neq y_i$, то неравенство (18) справедливо. Поэтому будем считать, что $z_i=x_i=y_i$ для всех $i=1,2,\dots,m-1$.

Предположим, что не существует j такого, что x_m, y_m принадлежат некоторому $A_m^{(j)}$. Тогда $d(x,y)=1/(N_0\cdots N_{m-1})$. Далее, либо x_m, z_m, либо y_m, z_m не принадлежат одному и тому же множеству $A_m^{(j)}$, следовательно, неравенство (18) опять выполнено.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда x_m и y_m принадлежат некоторому общему множеству $A_m^{(j)}$. Если $z_m\notin A_m^{(j)}$, то неравенство (18) справедливо. Если же $z_m\in A_m^{(j)}$, то

$$\begin{aligned} d(x,y)&=\frac{|\varphi(x_m)-\varphi(y_m)|}{N_0\cdots N_{m-1}fp_m}\leqslant\frac{|\varphi(x_m)-\varphi(z_m)|}{N_0\cdots N_{m-1}fp_m}+\frac{|\varphi(z_m)-\varphi(y_m)|}{N_0\cdots N_{m-1}fp_m}\\ &=d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Вернемся к доказательству теоремы 3.1. Рассмотрим хаусдорфову меру H_1 на пространстве X. Так как любой элементарный цилиндр является замкнутым и, следовательно, борелевским множеством в метрическом пространстве (X,d), то меры μ и H_1 согласованы. Докажем, что $H_1(X)=1$.

Рассматривая покрытие пространства X элементарными цилиндрами

$$C(a_1,\dots,a_m)=\bigl\{x=(x_1,x_2,\dots)\in X: x_1=a_1,\ \dots,\ x_m=a_m\bigr\},$$

находим, что $H_1(X)\leqslant 1$.

Докажем, что $H_1(X)\geqslant 1$. Предположим, что $H_1(X)=a<1$. Так как

$$H_1(X)=\lim_{\delta\to 0}H_1^\delta(X)=\sup_{\delta>0}H_1^\delta(X)$$

(см., например, [22]), то для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что

$$a-\varepsilon<H_1^\delta(X)\leqslant a=H_1(X). \tag{19}$$

Пусть $\varepsilon_0=(1-a)/2>0$. Пользуясь неравенством (19) и определением хаусдорфовой меры, найдем такое покрытие пространства X множествами $\{U_i\}$, $r_i=\operatorname{diam}U_i$, $r_i<\delta=\delta(\varepsilon_0)$, что

$$a-\varepsilon<\sum_i\operatorname{diam}U_i=\sum_i r_i<a+\varepsilon. \tag{20}$$

Заметим, что если $a=0$, то неравенство в левой части (20) можно опустить.

Если $r_i = 0$, то соответствующее U_i состоит из одной точки:

$$U_i = \{p_i\}.$$

Обозначим через P объединение всех одноточечных множеств U_i. Другими словами, $P = \bigcup_{\{i:r_i=0\}} U_i = \bigcup_i \{p_i\}$. Ясно, что существует $U_i \notin P$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие U_i. Так как множество расстояний между элементами пространства X имеет нуль своей единственной предельной точкой, то для любого U_i существуют точки $x, y \in U_i$ такие, что $r_i = \operatorname{diam} U_i = d(x,y)$. Пусть $d(x,y) = r_m(x_m, y_m)/(N_0 \cdots N_{m-1})$. Предположим, что найдется j, $j = j(i)$, такое, что $x_m, y_m \in A_m^{(j)}$. Пусть

$$C_i = \bigl\{z = (z_1, z_2, \dots) \in X : z_1 = x_1,\ \dots,\ z_{m-1} = x_{m-1},\ z_m \in A_m^{(j)} \cap [x_m, y_m]\bigr\}, \tag{21}$$

и пусть

$$C_i = \bigl\{z = (z_1, z_2, \dots) \in X : z_1 = x_1,\ \dots,\ z_{m-1} = x_{m-1}\bigr\}, \tag{22}$$

если такого $A_m^{(j)}$ не существует. Ясно, что в обоих случаях $U_i \subseteq C_i$ и $\operatorname{diam} C_i = \operatorname{diam} U_i$. Поэтому для C_i выполнено неравенство (20), причем цилиндры C_i вместе с множеством P образуют покрытие X.

Отметим, что если C_i задан формулой (22), то C_i – элементарный цилиндр. Пусть

$$C_i(a) = \bigl\{z = (z_1, z_2, \dots) \in X : z_1 = x_1,\ \dots,\ z_{m-1} = x_{m-1},\ z_m = a\bigr\}.$$

Для любого a, $0 \leqslant a < N_m$, множество $C_i(a)$ представляет собой элементарный цилиндр. Если C_i задан формулой (22), то $C_i = \bigsqcup_{a \in A_m^{(j)} \cap [x_m, y_m]} C_i(a)$. Ясно, что $\operatorname{diam} C_i \geqslant \sum_{a \in A_m^{(j)} \cap [x_m, y_m]} \operatorname{diam} C_i(a)$. Отсюда имеем, что существует не более чем счетное покрытие X точками из P и элементарными цилиндрами C_i', $r_i' = \operatorname{diam} C_i'$, такое, что

$$\sum_i r_i' \leqslant \sum_i r_i < a + \varepsilon < 1. \tag{23}$$

Два произвольных элементарных цилиндра либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом. Поэтому существует подпокрытие C_i'', $r_i'' = \operatorname{diam} C_i''$, покрытия C_i', являющееся вместе с P разбиением пространства X на элементарные цилиндры и такое, что

$$\sum_i r_i'' \leqslant \sum_i r_i' < 1. \tag{24}$$

Имеем $r_i'' = \mu C_i''$ и $\sum_i r_i'' = \sum_i \mu C_i'' = \mu(X) = 1$. Противоречие с неравенством (24). Значит, $H_1(X) = 1$.

Нам осталось доказать, что для почти всех $x \in X$ справедливо равенство

$$\liminf_{n\to\infty} \{n \cdot f \cdot d(T^n x, x)\} = 1. \tag{25}$$

Обозначим через $a_m(j)$ максимальный элемент $A_m^{(j)}$. Пусть $B_m = \bigsqcup_{j=1}^{p_m} a_m(j)$. Имеем $|B_m| = p_m = \sqrt{N_m}$. Пусть

$$\widetilde{B}_m = \{x \in X : x_m \in B_m\} \subseteq X \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m \geqslant n}^{+\infty} \widetilde{B}_m.$$

Тогда $\mu(\widetilde{B}_m) = |B_m|/N_m = 1/p_m$. Имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(\widetilde{B}_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_m}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \infty. \tag{26}$$

Применяя лемму Бореля–Кантелли, получаем, что $\mu\mathbf{B} = 0$.

Докажем, что равенство (25) справедливо для всех $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x \notin \mathbf{B}$. Для любого $x \notin \mathbf{B}$ существует $M = M(x)$ такое, что для всех $n \geqslant M$ выполнено $x_n \notin B_n$. Будем считать M достаточно большим. Существует натуральное m_0 такое, что $N_0 \cdots N_{m_0} \geqslant M$. Рассмотрим возрастающую последовательность натуральных чисел

$$S = \{p_{m+1} N_0 \cdots N_m\}_{m=m_0}^{+\infty} = \{n_m\}_{m=m_0}^{+\infty}.$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$, где x_{m+1} принадлежит некоторому $A_{m+1}^{(j)}$. Пусть также $n_m \in S$. Тогда $T^{n_m} x = (x_1, \dots, x_m, \widetilde{x}_{m+1}, \widetilde{x}_{m+2}, \dots)$, где $\widetilde{x}_{m+1}, \widetilde{x}_{m+2}, \dots$ – некоторые числа, причем $x_{m+1}, \widetilde{x}_{m+1}$ принадлежат $A_{m+1}^{(j)}$ и $|\varphi(x_{m+1}) - \varphi(\widetilde{x}_{m+1})| = 1$. Отсюда $d(T^{n_m} x, x) = 1/(N_0 \cdots N_m f p_{m+1})$. Далее,

$$n_m f \cdot d(T^{n_m} x, x) = p_{m+1} N_0 \cdots N_m f \frac{1}{N_0 \cdots N_m f p_{m+1}} = 1. \tag{27}$$

Следовательно, для всех $x \notin \mathbf{B}$ выполнено $C_f(x) \leqslant 1$.

Докажем, что для любого $x \notin \mathbf{B}$ справедливо обратное неравенство $C_f(x) \geqslant 1$. Пусть n – натуральное число такое, что $n \in [N_0 \cdots N_m, N_0 \cdots N_{m+1}) := J_m$ и $m \geqslant m_0$. Заметим, что n_m принадлежит J_m. Если $n = tN_0 \cdots N_m$, $1 \leqslant t < N_{m+1}$, то $T^n x = (x_1, \dots, x_m, \widetilde{x}_{m+1}, \widetilde{x}_{m+2}, \dots)$, где $\widetilde{x}_{m+1}, \widetilde{x}_{m+2}, \dots$ – некоторые числа. В случае, когда $\widetilde{x}_{m+1} \notin A_{m+1}^{(j)}$, выполнено $d(T^n x, x) = 1/(N_0 \cdots N_m)$ и, следовательно, $nfd(T^n x, x) \geqslant 1$. Если же $\widetilde{x}_{m+1} \in A_{m+1}^{(j)}$, то

$$1 = n_m f d(T^{n_m} x, x) \leqslant n f d(T^n x, x).$$

Нам осталось рассмотреть ситуацию, когда $n \neq tN_0 \cdots N_m$, $1 \leqslant t < N_{m+1}$. В этом случае

$$T^n x = (x'_1, \dots, x'_m, x'_{m+1}, x'_{m+2}, \dots),$$

причем существует $i \in 1, 2, \dots, m$ такое, что $x_i \neq x'_i$. Отсюда $d(T^n x, x) \geqslant 1/(N_0 \cdots N_m)$ и опять $nfd(T^n x, x) \geqslant 1$.

Итак, для любого $m \geqslant m_0$ и всех $n \in [N_0 \cdots N_m, N_0 \cdots N_{m+1})$ выполнено $1 \leqslant nfd(T^n x, x)$. Значит, для любого $x \notin \mathbf{B}$ справедливо неравенство $C_f(x) \geqslant 1$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] H. Furstenberg, “Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions”, *J. Anal. Math.*, **31** (1977), 204–256.

[2] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.

[3] H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein, “The ergodic theoretical proof of Szemerédi’s theorem”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **7**:3 (1982), 527–552.

[4] H. Furstenberg, Y. Katznelson, “An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations”, *J. Anal. Math.*, **34** (1978), 275–291.

[5] K. F. Roth, “On certain sets of integers”, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 104–109.

[6] M. Boshernitzan, “Quantitative recurrence results”, *Invent. Math.*, **113** (1993), 617–631.

[7] W. T. Gowers, “A new proof of Szemerédi’s theorem”, *Geom. Funct. Anal.*, **11**:3 (2001), 465–588.

[8] И. Д. Шкредов, “Об одной задаче Гауэрса”, *Докл. РАН*, **400**:2 (2005), 169–172.

[9] I. D. Shkredov, *On one problem of Gowers*, `arXiv: math.NT/0405406`.

[10] I. D. Shkredov, *On multiple recurrence*, `arXiv: math.DS/0406413`.

[11] I. D. Shkredov, *On a generalization of Szemerédi’s theorem*, `arXiv: math.DS/0503639`.

[12] Н. Г. Мощевитин, “Об одной теореме Пуанкаре”, *УМН*, **53**:1 (1998), 223–224.

[13] И. Д. Шкредов, “О возвращаемости в среднем”, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 625–632.

[14] J. Bourgain, “On triples in arithmetic progression”, *Geom. Funct. Anal.*, **9**:5 (1999), 968–984.

[15] F. A. Behrend, “On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression”, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **32** (1946), 331–332.

[16] R. A. Rankin, “Sets of integers containing not more than a given number of terms in arithmetic progression”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **65**:4 (1961), 332–344.

[17] I. Laba, M. T. Lacey, *On sets of integers not containing long arithmetic progressions*, `arXiv: math.CO/0108155`.

[18] C. L. Stewart, R. Tijdeman, “On infinite–difference sets”, *Canad. J. Math.*, **31**:5 (1979), 897–910.

[19] T. Tao, *Lecture notes* 5, `http://math.ucla.edu/~tao/254a.1.03w/notes5.dvi`.

[20] T. W. Cusick, M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra*, Math. Surveys Monogr., **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[21] Г. А. Фрейман, *Диофантовы приближения и геометрия чисел* (*Задача Маркова*), Калининский гос. ун-т, Калинин, 1975.

[22] K. Falconer, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, Wiley, New York, 1990.

И. Д. Шкредов (I. D. Shkredov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: `ishkredov@rambler.ru`

Поступила в редакцию
23.05.2006