УДК 511.34+511.218+511.336

И. Д. Шкредов

О двумерном аналоге теоремы Семереди в абелевых группах

Для всякого множества $A \subseteq G \times G$, G – конечная абелева группа, мощности $|G|^2/(\log\log|G|)^c$, где $c > 0$ – абсолютная константа, доказано, что A содержит тройку $\{(k,m), (k+d,m), (k,m+d)\}$, $d \neq 0$. Полученный результат представляет собой двумерное обобщение теоремы Семереди об арифметических прогрессиях.

Библиография: 31 наименование.

Ключевые слова: двумерные обобщения теоремы Семереди, задачи об арифметических прогрессиях, теорема Рота, множества Бора.

§ 1. Введение

Теорема Е. Семереди [1] об арифметических прогрессиях утверждает, что любое множество $A \subseteq \mathbb{Z}$ положительной плотности содержит арифметические прогрессии произвольной длины. Этот замечательный результат сыграл значительную роль в развитии двух разделов математики: аддитивной комбинаторики (см., например, [2]) и комбинаторной эргодической теории (см., например, [3]). Сформулируем теорему Семереди более точно.

Пусть N – натуральное число. Пусть также $a_k(N) = \frac{1}{N}\max\bigl\{|A|\colon A \subseteq \{1,2,\dots,N\}$, A не содержит арифметических прогрессий длины $k\bigr\}$, где $|A|$ – мощность множества A.

Теорема 1.1 (Е. Семереди, 1975). *Для всех $k \geqslant 3$ выполнено*

$$a_k(N) \to 0, \qquad N \to \infty. \tag{1.1}$$

Ясно, что из этого результата вытекает теорема Б. Л. Ван дер Вардена [4].

В простейшем случае $k = 3$ теорема 1.1 была доказана К. Ф. Ротом [5] в 1953 г. Применяя метод Харди–Литтлвуда, Рот получил следующую количественную оценку для плотности множеств без арифметических прогрессий длины три:

$$a_3(N) \ll \frac{1}{\log\log N}\,.$$

Наилучший на сегодняшний день результат об оценке сверху величины $a_3(N)$ принадлежит Ж. Бургену [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00383), Программы Президента РФ (грант № 1726.2006.1) и INTAS (грант № 03-51-5-70).

Теорема 1.2 (Ж. Бурген, 2007). *Для всех* $N \geqslant 3$ *выполнено*

$$a_3(N) \ll \frac{(\log\log N)^2}{(\log N)^{2/3}}\,. \tag{1.2}$$

В своем доказательстве Семереди использовал сложные комбинаторные аргументы. Альтернативное доказательство теоремы 1.1 было предложено Г. Фюрстенбергом в [7] (см. также [3], [8] и [9]). В своем подходе он использовал методы эргодической теории. Г. Фюрстенберг показал, что теорема Семереди эквивалентна утверждению о кратной возвращаемости в произвольной динамической системе.

А. Беренд [10] нашел нижнюю оценку величины $a_3(N)$:

$$a_3(N) \gg \exp(-C(\log N)^{1/2}),$$

где C – абсолютная константа. Для произвольного k нижняя оценка величины $a_k(N)$ была получена в [11].

Методы Семереди дают очень слабые верхние оценки для $a_k(N)$. Эргодический подход вообще не дает никаких оценок. Только В. Т. Гауэрс [12] в 2001 г. получил первый эффективный результат о скорости стремления к нулю величины $a_k(N)$ для $k \geqslant 4$. Он доказал следующую теорему.

Теорема 1.3 (В. Т. Гауэрс, 2001). *Для всех* $k \geqslant 4$ *выполнено*

$$a_k(N) \ll \frac{1}{(\log\log N)^{c_k}}\,,$$

причем константа c_k *зависит только от* k.

В статье [13] и книге [3] изучалось следующее обобщение теоремы Рота. Рассмотрим двумерную решетку $\{1,2,\dots,N\}^2$ с базисом $\{(1,0),\,(0,1)\}$. Пусть

$$L(N) = \frac{1}{N^2}\max\bigl\{|A|\colon A \subseteq \{1,2,\dots,N\}^2, A \text{ не содержит}$$
$$\text{троек вида } \{(k,m),(k+d,m),(k,m+d)\},\ d>0\bigr\}. \tag{1.3}$$

Тройка из формулы (1.3) называется *уголком*. В работах [3], [13] было доказано, что величина $L(N)$ стремится к нулю, когда N стремится к бесконечности. В. Т. Гауэрс (см. [12]) поставил вопрос о скорости сходимости $L(N)$ к нулю.

Следующая теорема была доказана в [14], [15] (см. также [16]–[19]).

Теорема 1.4. *Пусть* $\delta > 0$ *и* $N \gg \exp\exp(\delta^{-73})$. *Пусть также* $A \subseteq \{1,\dots,N\}^2$ *– произвольное подмножество мощности не меньше* δN^2. *Тогда* A *содержит уголок.*

Таким образом, получена оценка величины $L(N)$ сверху:

$$L(N) \ll \frac{1}{(\log\log N)^{1/73}}\,.$$

Вопрос о верхних оценках для функции $L(N)$ в группе $\mathbf{F}_2^n$ был рассмотрен в работах [20] и [21]. В настоящей работе мы исследуем поведение величины $L(N)$ в произвольной абелевой группе.

Сформулируем основной результат нашей статьи.

Пусть G – конечная абелева группа с аддитивной групповой операцией $+$. В этом случае *уголком* называется тройка $\{(k,m),(k+d,m),(k,m+d)\}$, где $d \neq 0$.

Теорема 1.5. *Пусть G – конечная абелева группа и $A \subseteq G \times G$ – произвольное подмножество, $|A| \gg |G|^2/(\log\log|G|)^c$, где $c > 0$ – абсолютная константа. Тогда A содержит уголок.*

Замечание 1.6. В качестве константы c в теореме 1.5 можно взять число $1/22$.

Ясно, что теорема 1.5 является естественным обобщением теоремы 1.4. Заметим, что подобные обобщения теоремы Рота и теорем 1.1, 1.3 были получены в работах [22]–[26].

Доказательство теоремы 1.5 содержится в § 3–6 и проводится с помощью применения итерационной процедуры. Приведем рассуждения, поясняющие основные идеи доказательства.

Пусть G – произвольная абелева группа, $A \subseteq G \times G$, $|A| \gg |G|^2/(\log\log|G|)^c$. Для доказательства теоремы 1.5 требуется найти уголок в множестве A. На каждом шаге итерационной процедуры мы доказываем следующее: либо A “достаточно регулярно”, либо “плотность” A (некоторая величина, связанная с A) может быть увеличена. Подходящее определение “достаточно регулярных” множеств (так называемых равномерных множеств) является одной из основных целей нашего доказательства.

Если A – случайное множество мощности $\delta|G|^2$, то A содержит примерно $\delta^3|G|^3$ уголков. Будем говорить, что A – *регулярное множество* (или, другими словами, A есть α-*равномерное множество*), если оно содержит такое же число уголков.

Пусть E_1, E_2 – подмножества некоторого множества $\Lambda \subseteq G$, которое мы выберем позже. Пусть A – подмножество множества $E_1 \times E_2$, имеющее мощность $\delta|E_1|\,|E_2|$. Скажем, что множество A является *α-равномерным относительно прямоугольной нормы*, если, грубо говоря, количество четверок вида $\{(x,y),(x+d,y),(x,y+s),(x+d,y+s)\}$, принадлежащих $A\times A\times A\times A$, не превосходит $(\delta^4+\alpha)|E_1|^2|E_2|^2$, $\alpha > 0$. На самом деле нам понадобится несколько другое определение α-равномерности, которое будет зависеть от множества Λ. В § 3 мы докажем, что если E_1, E_2 имеют не слишком большие коэффициенты Фурье и множество A является α-равномерным относительно прямоугольной нормы, то A содержит примерно столько уголков, сколько и случайное множество (т. е. множество, каждый элемент которого принадлежит ему с вероятностью δ). Простые примеры показывают (см., например, [15]), что какие-либо ограничения коэффициентов Фурье множества A не гарантируют, что A будет α-равномерно относительно прямоугольной нормы. Точнее, существует множество A_0 с не слишком большими коэффициентами Фурье, но большим числом четверок $\{(x,y),(x+d,y),(x,y+s),(x+d,y+s)\} \in A_0\times A_0\times A_0\times A_0$. С другой стороны, мы можем дать правильное определение α-равномерных относительно прямоугольной нормы множеств, используя так называемую прямоугольную норму (см. § 3).

Предположим теперь, что A не является α-равномерным относительно прямоугольной нормы. Иначе говоря, это означает, что множество A не обладает случайными свойствами. Точный смысл последнего высказывания состоит в том, что A имеет чуть большую плотность $\delta + c(\delta)$, $c(\delta) > 0$, в некотором декартовом произведении $F_1 \times F_2$, $F_1 \subseteq E_1$, $F_2 \subseteq E_2$ (см. § 4). Поскольку плотность любого множества не превосходит единицы, то такое увеличение плотности может происходить лишь конечное число раз. Следовательно, наша итерационная процедура обязана остановиться после конечного числа шагов. Это означает, что в ходе нашего алгоритма мы найдем α-равномерное относительно прямоугольной нормы подмножество множества A и, как следствие, уголок в A.

Структура декартова произведения $F_1 \times F_2$ не обязательно регулярна (в том смысле, что множества F_1, F_2 могут иметь большие коэффициенты Фурье), и, строго говоря, мы не можем провести следующий шаг итерационной процедуры. Чтобы преодолеть эту сложность, мы находим некоторое подмножество Λ, скажем Λ', и вектор $\vec{t} = (t_1, t_2) \in G \times G$ такие, что множества $(F_1 - t_1) \cap \Lambda'$ и $(F_2 - t_2) \cap \Lambda'$ имеют не слишком большие коэффициенты Фурье (см. § 5).

Теперь мы можем провести следующую итерацию, что позволяет получить доказательство нашего основного результата. В § 6 мы объединяем утверждения из предыдущих параграфов и выводим из них теорему 1.5.

В нашем доказательстве мы выбираем в качестве Λ *множество Бора* (см. [6], [27], [28] и др.). Заметим, что в доказательстве теоремы 1.2, представляющей собой наилучший на сегодняшний день результат об оценке величины $a_3(N)$, использовались именно эти множества. Свойства множеств Бора рассматриваются в § 2.

Как видно из описанной выше схемы, в нашем доказательстве не используется теорема о разложении конечной абелевой группы G в сумму циклических подгрупп G_i. Такое разложение оказывается малопригодным для достижения наших целей, поскольку не ясно, как контролировать размер подгрупп G_i. Чтобы перенести результат об уголках, полученный для подмножеств $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$, на группу G, нам приходится использовать модификацию рассуждений из [12], [15], [18], [27]. Уменьшение, по сравнению со статьей [15], константы c произошло в силу более аккуратных вычислений.

В следующих работах автор собирается доказать многомерный аналог теоремы 1.5.

§ 2. О множествах Бора

Пусть $G = (G, +)$ – конечная абелева группа с аддитивной групповой операцией $+$. Пусть A – подмножество G. Удобно обозначить через $A(x)$ характеристическую функцию этого множества. Иными словами, $A(x) = 1$, если $x \in A$, и $A(x) = 0$ в противном случае. Обозначим через $\widehat{G}$ двойственную группу для группы G. Иными словами, пусть $\widehat{G}$ – группа гомоморфизмов ξ из G в $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\xi \colon x \to \xi \cdot x$. Хорошо известно, что группа $\widehat{G}$ изоморфна G. Обозначим через N мощность G.

Одним из основных понятий работы [27] являлось понятие множества Бора.

Пусть S – подмножество множества $\widehat{G}$, $|S| = d$, $\varepsilon > 0$ – действительное число.

Определение 2.1. Пусть

$$\Lambda(S, \varepsilon) = \{n \in G \mid \|\xi \cdot n\| < \varepsilon \ \forall\, \xi \in S\},$$

где $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого. Множество $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon)$ называется *множеством Бора*.

Множество $S \subseteq \widehat{G}$ называется *порождающим множеством* для множества Бора Λ. Число d называется *размерностью* множества Бора Λ и обозначается

$\dim \Lambda$. Если $M = \Lambda + n$, $n \in G$, – трансляция Λ, то положим (по определению) $\dim M = \dim \Lambda$.

Другие конструкции множеств Бора (так называемые *гладкие* множества Бора) были приведены в статьях [28], [29].

Определение 2.2. Пусть $0 < \kappa < 1$ – действительное число. Множество Бора $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon)$ называется *κ-регулярным* (или просто *регулярным*), если для всех ε' таких, что

$$|\varepsilon - \varepsilon'| < \frac{\kappa}{100d} \cdot \varepsilon,$$

выполнено

$$1 - \kappa < \frac{|\Lambda(S, \varepsilon')|}{|\Lambda(S, \varepsilon)|} < 1 + \kappa.$$

Отметим, что определение 2.2 зависит от размерности множества Бора Λ.

Нам понадобятся несколько результатов о множествах Бора (см. [27] и [28]).

Лемма 2.3. *Пусть $\Lambda(S, \varepsilon)$ – множество Бора, $|S| = d$. Тогда $|\Lambda(S, \varepsilon)| \geqslant \varepsilon^d N$.*

Лемма 2.4. *Пусть $0 < \kappa < 1$ – действительное число и $\Lambda(S, \varepsilon)$ – множество Бора. Тогда найдется ε_1, $\varepsilon/2 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, такое, что $\Lambda(S, \varepsilon_1)$ – κ-регулярное множество Бора.*

В настоящей статье все множества Бора будут регулярными.

Определение 2.5. Пусть f, g – некоторые функции из G в $\mathbb{C}$. *Сверткой функций* f и g называется функция

$$(f * g)(n) = \sum_{s \in G} f(s) g(n - s).$$

Определение 2.6. Пусть $\varepsilon \in (0, 1]$ – действительное число и $\Lambda(S, \varepsilon_0)$ – множество Бора, $S \subseteq \widehat{G}$, $|S| = d$. Регулярное множество Бора $\Lambda' = \Lambda(S', \varepsilon')$ называется *ε-сопровождающим множества* $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon_0)$, если $S \subseteq S'$ и $\varepsilon\varepsilon_0/2 \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon\varepsilon_0$.

Из леммы 2.4 вытекает, что для любого множества Бора существует его ε-сопровождающее.

Будем полагать, что $S' = S$, если не оговорено противное.

Пусть n – произвольный элемент группы G и Λ – некоторое множество Бора. Будем говорить, что множество Бора Λ' является *ε-сопровождающим множества* $\Lambda + n$, если Λ' есть ε-сопровождающее множества Λ.

Следующая лемма также принадлежит Ж. Бургену [27]. Для полноты изложения мы приведем ее доказательство.

Лемма 2.7. *Пусть $\kappa > 0$ – действительное число, $S \subseteq \widehat{G}$, $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon)$ – κ-регулярное множество Бора и $\Lambda' = \Lambda(S, \varepsilon')$ – его $(\kappa/(100d))$-сопровождающее. Тогда, во-первых, существует не более $|\Lambda|(1+\kappa)$ значений n, для которых $(\Lambda * \Lambda')(n) > 0$, и, во-вторых, найдется не менее $|\Lambda|(1-\kappa)$ элементов n таких, что $(\Lambda * \Lambda')(n) = |\Lambda'|$. Кроме того,*

$$\left\| \frac{1}{|\Lambda'|} (\Lambda * \Lambda')(n) - \Lambda(n) \right\|_1 < 2\kappa |\Lambda|. \tag{2.1}$$

Доказательство. Если $(\Lambda * \Lambda^{'})(n) > 0$, то найдется m такое, что для всех $\xi \in S$ выполнено

$$\|\xi \cdot m\| < \frac{\kappa}{100d}\varepsilon, \qquad \|\xi \cdot (n-m)\| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Применяя неравенство (2.2), получаем, что для каждого $\xi \in S$ справедливо неравенство

$$\|\xi \cdot n\| < \left(1 + \frac{\kappa}{100d}\right)\varepsilon. \tag{2.3}$$

Отсюда

$$n \in \Lambda^{+} := \Lambda\left(S, \left(1 + \frac{\kappa}{100d}\right)\varepsilon\right). \tag{2.4}$$

Из леммы 2.4 вытекает оценка $|\Lambda^{+}| \leqslant (1+\kappa)|\Lambda|$.

С другой стороны, если

$$n \in \Lambda^{-} := \Lambda\left(S, \left(1 - \frac{\kappa}{100d}\right)\varepsilon\right), \tag{2.5}$$

то $(\Lambda * \Lambda^{'})(n) = |\Lambda'|$. Применяя лемму 2.4, получаем $|\Lambda^{-}| \geqslant (1-\kappa)|\Lambda|$.

Докажем (2.1). Имеем

$$\left\| \frac{1}{|\Lambda'|}(\Lambda * \Lambda')(n) - \Lambda(n) \right\|_1 = \left\| \frac{1}{|\Lambda'|}(\Lambda * \Lambda')(n) - \Lambda(n) \right\|_{l^1(\Lambda^+ \setminus \Lambda^-)} \leqslant |\Lambda^+| - |\Lambda^-| < 2\kappa|\Lambda|.$$

Лемма доказана.

Следствие 2.8. *Справедливы неравенства* $|\Lambda| \leqslant |\Lambda + \Lambda'| \leqslant (1+2\kappa)|\Lambda|$.

Замечание 2.9. Пусть $\Lambda^x(n) = \Lambda(n-x)$. Поскольку $(\Lambda^x * \Lambda')(n) = (\Lambda * \Lambda')(n-x)$, легко видеть, что неравенство (2.1) выполнено и для трансляций множеств Бора $\Lambda + x$.

Обозначим через Λ^{+} и Λ^{-} множества Бора, определенные в формулах (2.4) и (2.5) соответственно. Ясно, что $\Lambda^{-} \subseteq \Lambda \subseteq \Lambda^{+}$.

Из леммы 2.7 вытекают неравенства $|\Lambda^{+}| \leqslant |\Lambda|(1+\kappa)$ и $|\Lambda^{-}| \geqslant |\Lambda|(1-\kappa)$. Заметим, что для всех $s \in \Lambda^{'}$ выполнено $\Lambda^{-} \subseteq \Lambda + s$.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – некоторые множества, $|\mathcal{A}| \neq 0$. Через $\delta_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ обозначим величину $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|/|\mathcal{A}|$.

Пусть $\Lambda \subseteq G$ – множество Бора и вектор $\vec{x} = (x_1, x_2)$ принадлежит $G \times G$. Через $\Lambda_{\vec{x}}$ обозначим множество $(\Lambda + x_1) \times (\Lambda + x_2) \subseteq G \times G$. Пусть $\vec{n} \in G \times G$. Обозначим через $\Lambda(\vec{n})$ характеристическую функцию множества $\Lambda \times \Lambda$. Будем записывать $\vec{s} \in \Lambda$, $\vec{s} = (s_1, s_2)$, если $s_1 \in \Lambda$ и $s_2 \in \Lambda$.

Лемма 2.10. *Пусть* Λ *– множество Бора,* Λ' *– его* ε*-сопровождающее,* $\varepsilon = \kappa/(100d)$, $\vec{x}$ *– некоторый вектор и* $E \subseteq G \times G$. *Тогда*

$$\left| \delta_{\Lambda_{\vec{x}}}(E) - \frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda_{\vec{x}}} \delta_{\Lambda'_{\vec{n}}}(E) \right| \leqslant 4\kappa. \tag{2.6}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{|\Lambda|^2}\sum_{\vec{n}\in\Lambda_{\vec{x}}}\delta_{\Lambda'_{\vec{n}}}(E) = \frac{1}{|\Lambda|^2|\Lambda'|^2}\sum_{\vec{s}}E(\vec{s})\sum_{\vec{n}}\Lambda(\vec{n}-\vec{x})\Lambda'(\vec{s}-\vec{n}) \\ &= \frac{1}{|\Lambda|^2|\Lambda'|^2}\sum_{\vec{s}}E(\vec{s})\sum_{\vec{n}}\Lambda(\vec{n})\Lambda'(\vec{s}-\vec{x}-\vec{n}).\end{aligned}$$

Применяя лемму 2.7, находим

$$\sigma = \frac{1}{|\Lambda|^2}\sum_{\vec{s}}E(\vec{s})\Lambda(\vec{s}-\vec{x}) + 4\vartheta\kappa = \delta_{\Lambda_{\vec{x}}}(E) + 4\vartheta\kappa,$$

где $|\vartheta| \leqslant 1$. Лемма доказана.

Замечание 2.11. Ясно, что справедлив и одномерный аналог леммы 2.10.

Пусть $\Lambda_1 = \Lambda(S_1, \varepsilon_1)$, $\Lambda_2 = \Lambda(S_2, \varepsilon_2)$ – два множества Бора и $S_1, S_2 \subseteq \widehat{G}$. Будем записывать $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_2$, если $S_2 \subseteq S_1$ и $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$. Заметим, что если $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_2$, то произвольное ε-сопровождающее множества Λ_1 является ε'-сопровождающим множества Λ_2 (при этом, вообще говоря, $\varepsilon' \neq \varepsilon$).

§ 3. Об α-равномерности

Пусть f – некоторая функция из G в $\mathbb{C}$, $N = |G|$. Обозначим через $\hat{f}(\xi)$ преобразование Фурье функции f:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{x\in G} f(x)e(-\xi\cdot x),$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$. Мы будем использовать несколько известных формул из анализа Фурье:

$$\sum_{x\in G}|f(x)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{\xi\in\widehat{G}}|\hat{f}(\xi)|^2, \tag{3.1}$$

$$\sum_{x\in G}f(x)\overline{g(x)} = \frac{1}{N}\sum_{\xi\in\widehat{G}}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{y\in G}\left|\sum_{x\in G}f(x)g(y-x)\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{\xi\in\widehat{G}}|\hat{f}(\xi)|^2|\hat{g}(\xi)|^2. \tag{3.3}$$

Пусть Λ – множество Бора и A – произвольное подмножество множества Λ. Пусть $|A| = \delta|\Lambda|$. Функция $f(s) = (A(s) - \delta)\Lambda(s) = A(s) - \delta\Lambda(s)$ называется *балансовой функцией множества* A.

Обозначим через $\mathbf{D}$ замкнутый диск на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом 1. Пусть R – произвольное множество. Будем записывать $f\colon R \to \mathbf{D}$, если f равно нулю вне множества R.

Следующее определение принадлежит Гауэрсу [12].

Определение 3.1. Функция $f\colon \Lambda \to \mathbf{D}$ называется *α-равномерной*, если

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \alpha|\Lambda|. \tag{3.4}$$

Будем говорить, что множество A является α-равномерным, если его балансовая функция α-равномерна.

Будем записывать для краткости $\sum_s$ вместо суммы $\sum_{s\in G}$ и $\sum_\xi$ вместо суммы $\sum_{\xi\in\widehat{G}}$.

Докажем аналог леммы 2.2 из [12].

Лемма 3.2. *Пусть Λ – множество Бора и $f\colon \Lambda \to \mathbf{D}$ – произвольная α-равномерная функция. Тогда для любой функции $g\colon G\to\mathbf{D}$ выполнено*

$$\sum_k \biggl|\sum_s f(s)g(k-s)\biggr|^2 \leqslant \alpha^2|\Lambda|^2\|g\|_2^2.$$

Доказательство. Применяя формулу (3.3), находим

$$\sum_k \biggl|\sum_s f(s)g(k-s)\biggr|^2 = \sum_\xi |\hat f(\xi)|^2|\hat g(\xi)|^2. \tag{3.5}$$

Поскольку функция f является α-равномерной, то $\|\hat f\|_\infty \leqslant \alpha|\Lambda|$. Применяя последнее неравенство и (3.2), получаем

$$\sum_k \biggl|\sum_s f(s)g(k-s)\biggr|^2 \leqslant \alpha^2|\Lambda|^2\frac{1}{N}\sum_\xi |\hat g(\xi)|^2 = \alpha^2|\Lambda|^2\|g\|_2^2. \tag{3.6}$$

Лемма доказана.

Следствие 3.3. *Пусть $S\subseteq G$ – произвольное множество и Λ' – множество Бора. Пусть множество $E\subseteq\Lambda'$ является α-равномерным и имеет мощность $\delta|\Lambda'|$. Пусть также g – любая функция из S в $[-1,1]$. Тогда для всех, кроме, может быть, $\alpha^{2/3}|S|$, значений k выполнено*

$$\bigl|(E*g)(k)-\delta(\Lambda'*g)(k)\bigr| \leqslant \alpha^{2/3}|\Lambda'|.$$

Доказательство. Пусть f – балансовая функция множества $E\cap\Lambda'$. Применяя лемму 3.2, находим

$$\sum_k \bigl|(E*g)(k)-\delta(\Lambda'*g)(k)\bigr|^2 = \sum_k \biggl|\sum_s f(s)g(k-s)\biggr|^2 \tag{3.7}$$

$$\leqslant \alpha^2|\Lambda'|^2\|g\|_2^2 \leqslant \alpha^2|\Lambda'|^2|S|. \tag{3.8}$$

Следствие доказано.

Пусть Λ_1 и Λ_2 – множества Бора и $E_1\times E_2$ – произвольное подмножество множества $\Lambda_1\times\Lambda_2$. Пусть также $f\colon \Lambda_1\times\Lambda_2\to\mathbf{D}$ – некоторая функция.

Определение 3.4. Пусть α – действительное число, $\alpha\in[0,1]$. Функция $f\colon E_1\times E_2\to\mathbf{D}$ называется *α-равномерной относительно прямоугольной нормы*, если

$$\sum_{x,x',y,y'} f(x,y)\overline{f(x',y)}\,\overline{f(x,y')}f(x',y') \leqslant \alpha|E_1|^2|E_2|^2. \tag{3.9}$$

Заметим, что функция f является α-равномерной тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m,p}\biggl|\sum_k f(k,m)\overline{f(k,p)}\biggr|^2 \leqslant \alpha|E_1|^2|E_2|^2. \tag{3.10}$$

Пусть A – подмножество множества $E_1 \times E_2$, $|A| = \delta|E_1|\,|E_2|$. Функция $f(x,y) = (A(x,y)-\delta)\cdot(E_1\times E_2)(x,y)$ называется *балансовой* функцией множества A. Будем говорить, что множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является α-равномерным относительно прямоугольной нормы, если его балансовая функция α-равномерна.

Пусть f – произвольная функция, $f\colon G\times G\to\mathbb{C}$. Определим величину $\|f\|$ по формуле

$$\|f\| = \biggl|\sum_{x,x',y,y'} f(x,y)\overline{f(x',y)}\,\overline{f(x,y')}f(x',y')\biggr|^{1/4}. \tag{3.11}$$

Лемма 3.5. *Формула* (3.11) *определяет норму.*

Доказательство см. в [18].

Определение 3.6. Пусть Λ – множество Бора, $Q \subseteq \Lambda$, $|Q| = \delta|\Lambda|$, α,ε – положительные числа. Множество Q называется (α,ε)-*равномерным*, если существует множество Λ', являющееся ε-сопровождающим множества Λ и такое, что мощность множества

$$B := \bigl\{m\in\Lambda \mid \|(Q\cap(\Lambda'+m)-\delta(\Lambda'+m))\hat{\ }\|_\infty \geqslant \alpha|\Lambda'|\bigr\}$$

не превосходит $\alpha|\Lambda|$:

$$|B| \leqslant \alpha|\Lambda|, \tag{3.12}$$

кроме того,

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{m\in\Lambda}|\delta_{\Lambda'+m}(Q)-\delta|^2 \leqslant \alpha^2, \tag{3.13}$$

$$\|(Q\cap\Lambda-\delta\Lambda)\hat{\ }\|_\infty \leqslant \alpha|\Lambda|. \tag{3.14}$$

Ясно, что определение 3.6 зависит от множества Λ. Мы не предполагаем, что Λ' имеет то же порождающее множество, что и Λ. Если Q является (α,ε)-равномерным множеством и Λ' есть ε-сопровождающее множества Λ, то иногда мы будем считать, что Λ' является ε-сопровождающим для Λ, так что выполнены неравенства (3.12)–(3.14).

Замечание 3.7. Пусть $B^* = \bigl\{m\in\Lambda \mid |\delta_{\Lambda'+m}(Q)-\delta| \geqslant \alpha^{2/3}\bigr\}$. Из неравенства (3.13) вытекает оценка

$$|B^*| \leqslant \alpha^{2/3}|\Lambda|.$$

Замечание 3.8. Условие (3.14) не так важно, как (3.12) и (3.13). Более слабое неравенство

$$\|(Q\cap\Lambda-\delta\Lambda)\hat{\ }\|_\infty \leqslant 4\alpha|\Lambda|$$

вытекает из (3.12) и (3.13) (см. предложение 3.13).

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_2$, и $\varepsilon > 0$ – действительное число. Пусть также E_1, E_2 – подмножества множеств Λ_1, Λ_2 соответственно и, кроме того, $|E_1| = \beta_1|\Lambda_1|$, $E_2 = \beta_2|\Lambda_2|$.

Определение 3.9. Функция $f\colon E_1\times E_2\to \mathbf{D}$ называется (α,ε)*-равномерной относительно прямоугольной нормы*, если существует множество Λ' такое, что Λ' есть ε-сопровождающее множества Λ_1 и

$$\|f\|^4_{\Lambda_1\times\Lambda_2,\varepsilon}=\sum_{i\in\Lambda_1}\sum_{j\in\Lambda_2}\sum_k\sum_{m,u}\Lambda'(m-k-i)\Lambda'(u-k-i)\\ \times\biggl|\sum_r\Lambda'(k+r-j)f(r,m)f(r,u)\biggr|^2\leqslant\alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^4|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|. \quad (3.15)$$

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1\leqslant\Lambda_2$. Пусть E_1, E_2 – подмножества множеств Λ_1, Λ_2 соответственно и $|E_1|=\beta_1|\Lambda_1|$, $E_2=\beta_2|\Lambda_2|$.

Определение 3.10. Пусть $A\subseteq E_1\times E_2$, $|A|=\delta\beta_1\beta_2|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|$ и $f(\vec{s})=A(\vec{s})-\delta(E_1\times E_2)(\vec{s})$. Множество A называется $(\alpha,\alpha_1,\varepsilon)$*-равномерным относительно прямоугольной нормы*, если существуют множества Λ', Λ'_ε такие, что Λ' есть ε-сопровождающее множества Λ_1, а Λ'_ε является ε-сопровождающим множества Λ' и мощность множества

$$B=\bigl\{l\in\Lambda_1\mid \|f_l\|^4_{\Lambda'\times\Lambda_2,\varepsilon}>\alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'_\varepsilon|^4|\Lambda'|^2|\Lambda_2|\bigr\},$$

где $f_l(\vec{s}):=f(s_1+l,s_2)\Lambda'(s_1)$, $l\in\Lambda_1$, не превосходит $\alpha_1|\Lambda_1|$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\|f_l\|^4_{\Lambda'\times\Lambda_2,\varepsilon}&=\sum_{i\in\Lambda'}\sum_{j\in\Lambda_2}\sum_k\sum_{m,u}\Lambda''(m-k-i)\Lambda''(u-k-i)\\&\qquad\times\biggl|\sum_r\Lambda''(k+r-j)f_l(r,m)f_l(r,u)\biggr|^2\\&=\sum_{i\in\Lambda'+l}\sum_{j\in\Lambda_2}\sum_k\sum_{m,u}\Lambda''(m-k-i)\Lambda''(u-k-i)\\&\qquad\times\biggl|\sum_r\Lambda''(k+r-j)\tilde f_l(r,m)\tilde f_l(r,u)\biggr|^2,\end{aligned}$$

где $\Lambda''=\Lambda'_\varepsilon$ и $\tilde f_l$ – ограничение функции f на $(\Lambda'+l)\times\Lambda_2$.

Замечание 3.11. Нам необходим параметр α_1 (мы выбираем $\alpha_1=2^{-7}$; см. теорему 3.17 ниже) только для того, чтобы уменьшить константу c в теореме 1.5. Для доказательства теоремы 1.5 с константой c, равной, например, $1/1000$, можно взять параметр α_1 равным α.

Лемма 3.12. *Пусть Λ – множество Бора, Λ' – некоторое ε-сопровождающее множества Λ, Λ'' – ε-сопровождающее множества Λ' и ε^2-сопровождающее множества Λ, $\varepsilon=\alpha^2/(400d)$, $Q\subseteq\Lambda$, $|Q|=\delta\Lambda$ и $\alpha>0$. Пусть также*

$$\Omega_1=\biggl\{s\in\Lambda\mid |\delta_{\Lambda'+s}(Q)-\delta|\geqslant 4\alpha^{1/2}\ \textit{или}\ \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{n\in\Lambda'+s}|\delta_{\Lambda''+n}(Q)-\delta|^2\geqslant 4\alpha^{1/2}\biggr\},$$

$$\Omega_2=\bigl\{s\in\Lambda\mid \|(Q\cap(\Lambda'+s)-\delta(\Lambda'+s))\widehat{\ }\|_\infty\geqslant 4\alpha^{1/4}|\Lambda'|\bigr\}.$$

1) *Если выполнено*

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{n\in\Lambda}|\delta_{\Lambda''+n}(Q)-\delta|^2\leqslant\alpha^2, \tag{3.16}$$

то $|\Omega_1|\leqslant 4\alpha^{1/2}|\Lambda|$.

2) *Если мощность множества*

$$\Omega^*=\bigl\{s\in\Lambda \mid \|(Q\cap(\Lambda''+s)-\delta(\Lambda''+s))\widehat{\ }\|_\infty\geqslant\alpha|\Lambda''|\bigr\} \tag{3.17}$$

не превосходит $\alpha|\Lambda|$, *то* $|\Omega_2|\leqslant 4\alpha^{1/2}|\Lambda|$.

3) *Пусть* Q – *произвольное* (α,ε^2)*-равномерное подмножество множества* Λ *и* Λ'' – ε^2*-сопровождающее множества* Λ, *так что выполнены неравенства* (3.12)–(3.14). *Пусть* $\widetilde\Omega=\bigl\{s\in\Lambda \mid$ *множество* $(Q-s)\cap\Lambda'$ *не* $(8\alpha^{1/4},\varepsilon)$*-равномерно*$\bigr\}$. *Тогда* $|\widetilde\Omega|\leqslant 8\alpha^{1/2}|\Lambda|$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $\delta'_n=\delta_{\Lambda'+n}(Q)$, $\delta''_n=\delta_{\Lambda''+n}(Q)$, $\kappa=\alpha^2/4$ и $\varepsilon_3=\alpha^{1/2}$. Рассмотрим множества

$$B_s=\{n\in\Lambda'+s \mid |\delta''_n-\delta|\geqslant\varepsilon_3\},\quad G_s=\{n\in\Lambda'+s \mid |\delta''_n-\delta|<\varepsilon_3\},\qquad s\in\Lambda,$$

и множества

$$B=\{s\in\Lambda \mid |B_s|\geqslant\varepsilon_3|\Lambda'|\},\qquad G=\{s\in\Lambda \mid |B_s|<\varepsilon_3|\Lambda'|\}.$$

Если $s\in G$, то $|B_s|<\varepsilon_3|\Lambda'|$. Применяя лемму 2.10, находим

$$\begin{aligned}|\delta'_s-\delta|&\leqslant\left|\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{x\in\Lambda'+s}\delta''_x-\delta\right|+4\kappa\leqslant\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{x\in\Lambda'+s}|\delta''_x-\delta|+4\kappa\\&\leqslant\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{x\in B_s}|\delta''_x-\delta|+\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{x\in G_s}|\delta''_x-\delta|+4\kappa<\varepsilon_3+\frac{\varepsilon_3|G_s|}{|\Lambda'|}+4\kappa\leqslant4\varepsilon_3.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Кроме того, для всех $s\in G$ выполнено

$$\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{x\in\Lambda'+s}|\delta''_x-\delta|^2\leqslant\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{x\in B_s}|\delta''_x-\delta|^2+\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{x\in G_s}|\delta''_x-\delta|^2\leqslant\varepsilon_3+\varepsilon_3^2\leqslant2\varepsilon_3. \tag{3.19}$$

Оценим мощность множества B. Имеем

$$\begin{aligned}\alpha^2&\geqslant\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{s\in B}|\delta''_s-\delta|^2\geqslant\frac{1}{|\Lambda'|\,|\Lambda|}\sum_{s\in B}\sum_{n\in\Lambda'+s}|\delta''_n-\delta|^2-4\kappa\\&\geqslant\frac{1}{|\Lambda'|\,|\Lambda|}\sum_{s\in B}\sum_{n\in B_s}|\delta''_n-\delta|^2-4\kappa\geqslant\frac{|B|\varepsilon_3^3|\Lambda'|}{|\Lambda'|\,|\Lambda|}-4\kappa.\end{aligned}$$

Отсюда $|B|\leqslant 4\alpha^{1/2}|\Lambda|$. Из неравенств (3.18), (3.19) легко видеть, что $\Omega_1\subseteq B$.

Для доказательства утверждения 2) достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\Lambda|\,|\Lambda'|}&\sum_{s\in\Lambda}\|(Q\cap(\Lambda''+s)-\delta(\Lambda''+s))\widehat{\ }\|_\infty\\&=\frac{1}{|\Lambda|\,|\Lambda'|}\sum_{s\in\Omega^*}\|(Q\cap(\Lambda''+s)-\delta(\Lambda''+s))\widehat{\ }\|_\infty\\&\quad+\frac{1}{|\Lambda|\,|\Lambda'|}\sum_{s\in(\Lambda\setminus\Omega^*)}\|(Q\cap(\Lambda''+s)-\delta(\Lambda''+s))\widehat{\ }\|_\infty\\&\leqslant\alpha+\frac{\alpha|\Lambda'|}{|\Lambda|\,|\Lambda'|}|\Lambda\setminus\Omega^*|\leqslant 2\alpha,\end{aligned}$$

и определить следующие множества:

$$\begin{gathered}B'_s=\bigl\{n\in\Lambda'+s\mid\|(Q\cap(\Lambda''+n)-\delta(\Lambda''+n))\widehat{\ }\|_\infty\geqslant\varepsilon_4|\Lambda''|\bigr\},\\G'_s=\bigl\{n\in\Lambda'+s\mid\|(Q\cap(\Lambda''+n)-\delta(\Lambda''+n))\widehat{\ }\|_\infty<\varepsilon_4|\Lambda''|\bigr\},\quad s\in\Lambda,\\B'=\{s\in\Lambda\mid|B_s|\geqslant\varepsilon_4|\Lambda'|\},\qquad G'=\{s\in\Lambda\mid|B_s|<\varepsilon_4|\Lambda'|\},\end{gathered}$$

где $\varepsilon_4=\alpha^{1/4}$. После этого мы можем применить рассуждения, использованные выше (применяя лемму 2.7 вместо леммы 2.10).

Докажем утверждение 3). Поскольку Q есть (α,ε^2)-равномерное подмножество множества Λ, то для Q выполнено (3.16). Кроме того, $|\Omega^*|\leqslant\alpha|\Lambda|$ и $|B|,|B'|\leqslant 4\alpha^{1/2}|\Lambda|$ (см. выше). Легко видеть, что для всех $s\notin B\cup B'$ множество $(Q-s)\cap\Lambda'$ является $(8\alpha^{1/4},\varepsilon)$-равномерным.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующее предложение.

Предложение 3.13. *Пусть Λ – множество Бора и множество $Q\subseteq\Lambda$, $|Q|=\delta|\Lambda|$, является (α,ε)-равномерным, $\varepsilon=\alpha/(400d)$. Тогда*

$$\|(Q\cap\Lambda-\delta\Lambda)\widehat{\ }\|_\infty<4\alpha|\Lambda|. \tag{3.20}$$

Мы не будем использовать предложение 3.13 в доказательстве теоремы 1.5.

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1\leqslant\Lambda_2$, и $E_1\subseteq\Lambda_1$, $E_2\subseteq\Lambda_2$, $|E_1|=\beta_1|\Lambda_1|$, $|E_2|=\beta_2|\Lambda_2|$. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество $E_1\times E_2$. Пусть $A\subseteq\mathcal{P}$, $|A|=\delta|E_1|\,|E_2|$. Пусть H и W – две копии множества A.

Теорема 3.14. *Пусть $f\colon\mathcal{P}\to\mathbf{D}$ – (α,ε)-равномерная относительно прямоугольной нормы функция. Предположим, что множества E_1, E_2 являются (α_0,ε)-равномерными, $\alpha_0=2^{-50}\alpha^2\beta_1^{12}\beta_2^{12}$, $\varepsilon=2^{-10}\varepsilon_0^2$, $\varepsilon_0=2^{-10}\alpha_0^2/(100d)$. Пусть Λ_1 – ε_0-сопровождающее множества Λ_2. Тогда либо*

$$\biggl|\sum_{s_1,s_2,r}H(s_1,s_2)W(s_1+r,s_2+r)f(s_1,s_2+r)\biggr|\leqslant16\alpha^{1/4}\delta^{3/4}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|, \tag{3.21}$$

либо найдутся множество Бора Λ', два множества F_1, F_2 и вектор $\vec{y}=(y_1,y_2)\in G\times G$, $F_1\subseteq E_1\cap(\Lambda'+y_1)$, $F_2\subseteq E_2\cap(\Lambda'+y_2)$, такие, что Λ' – ε_0-сопровождающее множества Λ_1 и

$$|F_1|\geqslant2^{-2}\beta_1|\Lambda'|,\qquad|F_2|\geqslant2^{-2}\beta_2|\Lambda'|, \tag{3.22}$$

$$\delta_{F_1\times F_2}(A)\geqslant2\delta. \tag{3.23}$$

Доказательство. Пусть Λ' – некоторое ε_0-сопровождающее множества Λ_1, которое мы выберем позже. Пусть

$$\begin{aligned}
\Omega_1^{(1)} &= \bigl\{s \in \Lambda_1 \mid \|(E_1 \cap (\Lambda' + s) - \delta(\Lambda' + s))\widehat{\ }\|_\infty \geqslant \alpha_0\bigr\},\\
\Omega_2^{(1)} &= \bigl\{s \in \Lambda_1 \mid |\delta_{\Lambda'+s}(E_1) - \beta_1| \geqslant \alpha_0^{2/3}\bigr\},\\
\Omega_1^{(2)} &= \bigl\{s \in \Lambda_2 \mid \|(E_2 \cap (\Lambda' + s) - \delta(\Lambda' + s))\widehat{\ }\|_\infty \geqslant \alpha_0\bigr\},\\
\Omega_2^{(2)} &= \bigl\{s \in \Lambda_2 \mid |\delta_{\Lambda'+s}(E_2) - \beta_2| \geqslant \alpha_0^{2/3}\bigr\}.
\end{aligned}$$

Пусть также $\Omega_1 = \Omega_1^{(1)} \cup \Omega_2^{(1)}$ и $\Omega_2 = \Omega_1^{(2)} \cup \Omega_2^{(2)}$. По условию множества E_1, E_2 являются (α_0, ε)-равномерными. Пусть Λ' – ε_0-сопровождающее множества Λ_1 такое, что выполнены неравенства (3.12)–(3.14). Из определений и леммы 3.12 вытекает, что $|\Omega_l^{(1)}| \leqslant \alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$, $|\Omega_l^{(2)}| \leqslant \alpha_0^{2/3}|\Lambda_2|$, $l = 1, 2$. Следовательно, $|\Omega_1| \leqslant 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$ и $|\Omega_2| \leqslant 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_2|$.

Пусть $g_i(\vec{s}) = g_i(k, m) = W(k, m)\Lambda'(k - i)$, $i \in \Lambda_1$, и $h_j(\vec{s}) = h_j(k, m) = H(k, m)\Lambda'(m - j)$, $j \in \Lambda_2$. Имеем $k \in \Lambda_1$, $m \in \Lambda_2$ и $k + r \in \Lambda_1$ в (3.21). Значит, сумма (3.21) не превосходит $|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|$. Пусть также $\lambda_i = \Lambda' + i$ и $\mu_j = \Lambda' + j$. Применяя лемму 2.7, находим

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \sum_{s_1,s_2,r} H(s_1, s_2)W(s_1 + r, s_2 + r)f(s_1, s_2 + r)\\
&= \sum_{k,m}\sum_{r} H(k, m)W(k + r, m + r)f(k, m + r)\Lambda_1(k + r)\Lambda_2(m)\\
&= \frac{1}{|\Lambda'|^2}\sum_{k,m}\sum_{r} H(k, m)W(k + r, m + r)f(k, m + r)(\Lambda_1 * \Lambda')(k + r)(\Lambda_2 * \Lambda')(m)\\
&\qquad + 16\vartheta_0\kappa|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|\\
&= \frac{1}{|\Lambda'|^2}\sum_{i\in\Lambda_1}\sum_{j\in\Lambda_2}\sum_{k,m}\sum_{r} h_j(k, m)g_i(k + r, m + r)f(k, m + r) + 16\vartheta_0\kappa|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

где $|\vartheta_0| \leqslant 1$ и $\kappa \leqslant 2^{-10}\alpha_0^2$. Разобьем сумму σ_0 на четыре слагаемых:

$$\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 + \sigma_0' + \sigma_0'' + \sigma_0''' + R. \tag{3.25}$$

Суммирование в $\tilde{\sigma}_0$ проходит по $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$, в σ_0' – по $i \in \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$, в σ_0'' – по $i \notin \Omega_1$, $j \in \Omega_2$, в σ_0''' – по $i \in \Omega_1$, $j \in \Omega_2$, и $|R| \leqslant 16\varepsilon|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|$. Оценим слагаемые σ_0', σ_0'' и σ_0'''. Перепишем выражение для суммы σ_0 следующим образом:

$$\sigma_0 = \frac{1}{|\Lambda'|^2}\sum_{i\in\Lambda_1}\sum_{j\in\Lambda_2}\sum_{k,m}\sum_{r} h_j(k - r, m)g_i(k, m + r)f(k - r, m + r) + R. \tag{3.26}$$

Зафиксируем i и j в сумме (3.26). Имеем $k \in \lambda_i$ и $m \in \mu_j$. Далее, если $f(k - r, m + r)$ не равно нулю, то $k - r \in \Lambda_1$. Отсюда $r \in \lambda_i - \Lambda_1 = \Lambda' - \Lambda_1 + i$. Множество Λ' является ε_0-сопровождающим множества Λ_1. Применяя лемму 2.7, получаем, что r принадлежит некоторому множеству, мощность которого не превосходит $2|\Lambda_1|$. Отсюда

$$|\sigma_0'| \leqslant \frac{1}{|\Lambda'|^2}2|\Omega_1|\,|\Lambda_2|\,|\Lambda'|^2|\Lambda_1| \leqslant 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|. \tag{3.27}$$

Аналогично, $|\sigma_0''| \leqslant 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|$ и $|\sigma_0'''| \leqslant 2\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|$.

Выберем произвольные i и j такие, что $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$. Пусть $g(\vec{s}) = g_i(\vec{s})$, $h(\vec{s}) = h_j(\vec{s})$ и $\Lambda_1 \times \mu_j = \Lambda_1^{(1)} \times \Lambda_2^{(1)}$, $\lambda_i \times \Lambda_2 = \Lambda_1^{(2)} \times \Lambda_2^{(2)}$. Пусть также $E_2^{(1)} = E_2 \cap \Lambda_2^{(1)}$, $E_1^{(2)} = E_1 \cap \Lambda_1^{(2)}$, $\beta_2^{(1)} = |E_2^{(1)}|/|\Lambda_2^{(1)}|$ и $\beta_1^{(2)} = |E_1^{(2)}|/|\Lambda_1^{(2)}|$. Имеем

$$\sigma = \sigma_{i,j} = \sum_{s_1,s_2,r} h(s_1,s_2)g(s_1+r,s_2+r)f(s_1,s_2+r)$$
$$= \sum_{k,m} h(k,m)E_2^{(1)}(m)\sum_r g(k+r,m+r)f(k,m+r). \tag{3.28}$$

Заметим, что k в (3.28) принадлежит множеству $\Lambda_1^{(2)}$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|\sigma|^2 \leqslant \|h\|_2^2 \sum_{k,m} E_2^{(1)}(m)\biggl|\sum_r g(k+r,m+r)f(k,m+r)\biggr|^2$$
$$= \|h\|_2^2 \sum_{k,m} E_2^{(1)}(m)\sum_{r,p} g(k+r,m+r)f(k,m+r)g(k+p,m+p)f(k,m+p)$$
$$= \|h\|_2^2 \sum_{k,m,u} g(k,m)g(k+u,m+u)\sum_r E_2^{(1)}(m-r)f(k-r,m)f(k-r,m+u)$$
$$= \|h\|_2^2 \sum_{k,m,u} g(k,m)g(k+u,m+u)E_1^{(2)}(k)E_1^{(2)}(k+u)$$
$$\times \sum_r E_2^{(1)}(m-r)f(k-r,m)f(k-r,m+u). \tag{3.29}$$

Имеем $k \in \Lambda_1^{(2)}$ и $k - r \in \Lambda_1$. Отсюда $r \in k - \Lambda_1 \in \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1$. Поскольку $m - r \in \Lambda_2^{(1)}$, то $m \in \Lambda_2^{(1)} + r \in \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1$. С другой стороны, $k + u \in \Lambda_1^{(2)}$. Следовательно, $u \in \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1^{(2)}$ и $m + u \in \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1 + \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1^{(2)}$. Пусть $\tilde{\Lambda}_i = \Lambda' + \Lambda' + \Lambda' + \Lambda' + \Lambda_1 + i$. Тогда $m, m+u \in \tilde{\Lambda}_i + j = Q_{ij} = Q$. Применяя лемму 2.7 для множества Бора Λ_1 и его ε_0-сопровождающего Λ', получаем, что мощность множества $\tilde{\Lambda}_i$ не превосходит $5|\Lambda_1|$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$|\sigma|^4 \leqslant \|h\|_2^4 \biggl(\sum_k \sum_{m,u} g(k,m)g(k+u,m+u)\biggr)$$
$$\times \biggl(\sum_{k,m,u} E_1^{(2)}(k)E_1^{(2)}(k+u)\sum_{r,r'} E_2^{(1)}(m-r)E_2^{(1)}(m-r')$$
$$\times f(k-r,m)f(k-r,m+u)f(k-r',m)f(k-r',m+u)\biggr). \tag{3.30}$$

Пусть $\sigma^* = \sigma_{ij}^* = \sum_k \sum_{m,u} g(k,m)g(k+u,m+u)$, и пусть

$$\Omega' = \biggl\{ s \in \Lambda_2 \mid |\delta_{\Lambda_1+s}(E_2) - \beta_2| \geqslant 4\alpha_0^{1/2} \text{ или }$$
$$\frac{1}{|\Lambda_1|}\sum_{n\in\Lambda_1+s} |\delta_{\Lambda'+n}(E_2) - \beta_2|^2 \geqslant 4\alpha_0^{1/2} \biggr\}, \qquad G' = \Lambda_2 \setminus \Omega'.$$

По условию Λ_1 – ε_0-сопровождающее множества Λ_2, а E_2 – (α_0,ε)-равномерное подмножество множества Λ_2. Применяя лемму 3.12, находим $|\Omega'|\leqslant 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$. Пусть $\tilde\Lambda = \Lambda'+\Lambda'+\Lambda'+\Lambda'+\Lambda_1$. Поскольку Λ' – ε_0-сопровождающее множества Λ_1, то для всех $s\in G'$ выполнено $|\delta_{\tilde\Lambda+s}(E_2)-\beta_2|<8\alpha_0^{1/2}$ и $\sum_{n\in\tilde\Lambda+s}|\delta_{\Lambda'+n}(E_2)-\beta_2|^2<8\alpha_0^{1/2}|\tilde\Lambda|$. Для любого $i\in\Lambda_1$ рассмотрим множество

$$\Omega^*=\Omega_i^*=\biggl\{j\in\Lambda_2\mid|\delta_{\tilde\Lambda_i+j}(E_2)-\beta_2|\geqslant 8\alpha_0^{1/2}\\ \text{или } \frac{1}{|\tilde\Lambda_i|}\sum_{n\in\tilde\Lambda_i+j}|\delta_{\Lambda'+n}(E_2)-\beta_2|^2\geqslant 8\alpha_0^{1/2}\biggr\}. \tag{3.31}$$

Поскольку $(\Lambda_2\setminus\Omega_i^*)\supseteq(\Lambda_2\cap(G'-i))$, то $\Omega_i^*\subseteq(\Lambda_2\setminus(G'-i))$. Так как Λ_1 является ε_0-сопровождающим множества Λ_2, то

$$|\Lambda_2\setminus(G'-i)|=|(\Lambda_2+i)\setminus G'|\geqslant|\Lambda_2^-\cap G'|\geqslant(1-8\alpha_0^{1/2}-8\kappa_0)|\Lambda_2|,\qquad \kappa_0\leqslant\alpha_0^2.$$

Следовательно, $|\Omega_i^*|\leqslant 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|+8\kappa_0|\Lambda_2|\leqslant 16\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$. Отсюда имеем

$$\frac{1}{|\Lambda'|^2}\sum_{i\notin\Omega_1,j\in\Omega_i^*}|\sigma_{ij}|\leqslant\frac{1}{|\Lambda'|^2}\sum_{i\notin\Omega_1}(16\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|\cdot 2|\Lambda'|^2|\Lambda_1|)\leqslant 32\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|. \tag{3.32}$$

Имеем $j\notin\Omega_2$. Предположим дополнительно, что $j\notin\Omega_i^*$. Пусть $\Omega_2'=\Omega_2'(i)=\Omega_2\cup\Omega_i^*$.

Лемма 3.15. *Для всех $i\notin\Omega_1$ и для всех $j\notin\Omega_i^*$ выполнено следующее: либо*

$$|\sigma_{ij}^*|\leqslant 16\delta\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|, \tag{3.33}$$

либо найдутся два множества F_1, F_2 и вектор $\vec y=(y_1,y_2)\in G\times G$, $F_1\subseteq E_1\cap(\tilde\Lambda+y_1)$, $F_2\subseteq E_2\cap(\tilde\Lambda+y_2)$, для которых выполняются неравенства (3.22) *и* (3.23).

Замечание 3.16. Пусть T – подмножество множества G, $|T|=\delta|G|$, $E_1=E_2=G$, $\beta_1=\beta_2=1$, и пусть g – характеристическая функция множества $\mathcal A=\bigsqcup_{x\in G}(\{x\}\times\{T+x\})$. Легко видеть, что в этом случае неравенство (3.33) является точным. С другой стороны, для A, равного $\mathcal A$, неравенства (3.22), (3.23) не имеют места.

Доказательство леммы 3.15. Пусть $\widetilde E_2^{(2)}=E_2\cap Q$ и $\overline E_2^{(2)}(x)=\widetilde E_2^{(2)}(-x)$. Имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^*&=\sum_{k,m,u}g(k,m)g(k+u,m+u)\leqslant\sum_{k,m,u}g(k,m)E_1^{(2)}(k+u)\widetilde E_2^{(2)}(m+u)\\&=\sum_{k,m}g(k,m)(E_1^{(2)}*\overline E_2^{(2)})(k-m)=\sum_{k',m}g(k'+m,m)(E_1^{(2)}*\overline E_2^{(2)})(k').\end{aligned} \tag{3.34}$$

Если зафиксировать k' в сумме из (3.34), то переменная m будет принадлежать множеству мощности $|\Lambda'|$. Как было указано выше, $|Q_{ij}|\leqslant 5|\Lambda_1|$. Из леммы 2.7 вытекает, что k' в сумме (3.34) принадлежит некоторому множеству мощности не больше $8|\Lambda_1|$. Поскольку $i \notin \Omega_1$, то $E_1^{(2)}$ является α_0-равномерным. Применяя следствие 3.3, находим

$$\sigma_{ij}^* \leqslant \beta_1^{(2)} \sum_{k',m} g(k'+m,m)(\lambda_i * \overline{E}_2^{(2)})(k') + 16\alpha_0^{2/3}|\Lambda'|^2|\Lambda_1|.$$

Имеем $j \notin \Omega_i^*$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^* &\leqslant \beta_1^{(2)} \sum_{k',m} g(k'+m,m)(\lambda_i * E_2)(k') + 16\alpha_0^{2/3}|\Lambda'|^2|\Lambda_1|\\ &\leqslant \beta_1^{(2)}\beta_2|\Lambda'| \sum_{k,m} g(k,m) + 32\alpha_0^{1/6}|\Lambda'|^2|\Lambda_1|. \qquad (3.35)\end{aligned}$$

Предположим, что $\sigma_{ij}^* > 16\delta\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_1|$. Поскольку $i \notin \Omega_1$, то $\beta_1/2 \leqslant \beta_1^{(2)} \leqslant 2\beta_1$. Применяя последнее неравенство и неравенство (3.35), получаем

$$\sum_{k,m} g(k,m) \geqslant 8\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_1|. \qquad (3.36)$$

Напомним, что переменная m в сумме (3.36) принадлежит множеству $\tilde{\Lambda}_i + j$. Из леммы 2.7 вытекает оценка

$$\sum_{k,m} A(k,m)\Lambda'(k-i)\Lambda_1(m-i-j) \geqslant 4\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_1|. \qquad (3.37)$$

Имеем $i \notin \Omega_1$ и $j \notin \Omega_i^*$. Отсюда и из неравенства (3.37) легко видеть, что найдутся вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$ и два множества $F_1 \subseteq E_1 \cap (\Lambda' + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\Lambda' + y_2)$ такие, что неравенства (3.22), (3.23) выполнены. Лемма доказана.

Далее

$$\begin{aligned}|\sigma|^4 &\leqslant \|h\|_2^4\sigma^* \sum_{m,u}\sum_{r,r'} f(r,m)f(r,u)f(r',m)f(r',u)\\ &\quad\times \sum_k E_1^{(2)}(k)E_1^{(2)}(k-m+u)E_2^{(1)}(m-k+r)E_2^{(1)}(m-k+r')\\ &= \|h\|_2^4\sigma^* \sum_{m,u}\sum_{r,r'} f(r,m)f(r,u)f(r',m)f(r',u)\\ &\quad\times \sum_k E_1^{(2)}(m-k)E_1^{(2)}(u-k)E_2^{(1)}(k+r)E_2^{(1)}(k+r') = \|h\|_2^4\sigma^*\sigma'. \qquad (3.38)\end{aligned}$$

Перепишем сумму σ' в следующем виде:

$$\sigma' = \sum_k \sum_{r,r'} E_2^{(1)}(k+r)E_2^{(1)}(k+r')\left|\sum_m E_1^{(2)}(m-k)f(r,m)f(r',m)\right|^2. \qquad (3.39)$$

Имеем $r \in \Lambda_1$ и $k+r \in \Lambda_2^{(1)}$. Отсюда $k \in \Lambda_2^{(1)} - \Lambda_1$. С другой стороны, $m-k \in \Lambda_1^{(2)}$. Следовательно, $m \in \Lambda_1^{(2)} + k \in \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1$. Аналогично, $u \in \Lambda_2^{(1)} +$

$\Lambda_1^{(2)} - \Lambda_1$. Применяя лемму 2.7 для множества Λ_1 и его ε_0-сопровождающего Λ', получаем, что k и m, u принадлежат некоторым трансляциям *множеств Бора* $W_1 = \Lambda_1^+$ и $W_2 = W_1^+$ соответственно, причем мощности этих множеств не превосходят $3|\Lambda_1|$.

Если зафиксировать k в последней сумме (3.38), то переменные m, u, r, r' будут принимать значения из некоторых множеств мощности не больше $|\Lambda'|$.

Пусть

$$\Phi^1_{r,r'}(m) = f(r,-m)f(r',-m)W_2(m-i-j),$$
$$\Phi^2_{r,r'}(u) = f(r,-u)f(r',-u)W_2(u-i-j), \qquad \Phi^3_{m,u}(r) = f(-r,m)f(-r,u),$$
$$\Phi^4_{m,u}(r') = f(r',m)f(r',u).$$

Рассмотрим множества

$$B_1 = \bigl\{k \mid |(\Phi^1_{r,r'} * E_1^{(2)})(-k) - \beta_1^{(2)}(\Phi^1_{r,r'} * \Lambda_1^{(2)})(-k)| \geqslant \alpha_0^{2/3}|\Lambda'|\bigr\},$$
$$B_2 = \bigl\{k \mid |(\Phi^2_{r,r'} * E_1^{(2)})(-k) - \beta_1^{(2)}(\Phi^2_{r,r'} * \Lambda_1^{(2)})(-k)| \geqslant \alpha_0^{2/3}|\Lambda'|\bigr\},$$
$$B_3 = \bigl\{k \in \Lambda_1 \mid |(\Phi^3_{m,u} * E_2^{(1)})(k) - \beta_2^{(1)}(\Phi^3_{m,u} * \Lambda_2^{(1)})(k)| \geqslant \alpha_0^{2/3}|\Lambda'|\bigr\},$$
$$B_4 = \bigl\{k \in \Lambda_1 \mid |(\Phi^4_{m,u} * E_2^{(1)})(k) - \beta_2^{(1)}(\Phi^4_{m,u} * \Lambda_2^{(1)})(k)| \geqslant \alpha_0^{2/3}|\Lambda'|\bigr\}.$$

Имеем $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$. Применяя следствие 3.3, получаем $|B_1|, |B_2| \leqslant 3\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$ и $|B_3|, |B_4| \leqslant \alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$. Пусть $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$. Тогда $|B| \leqslant 8\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$. Разобьем сумму σ' следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma' &= \sum_{k\in B}\sum_{r,r'} E_2^{(1)}(k+r)E_2^{(1)}(k+r')\biggl|\sum_m E_1^{(2)}(m-k)f(r,m)f(r',m)\biggr|^2\\ &\quad+\sum_{k\notin B}\sum_{r,r'} E_2^{(1)}(k+r)E_2^{(1)}(k+r')\biggl|\sum_m E_1^{(2)}(m-k)f(r,m)f(r',m)\biggr|^2\\ &= \sigma_1+\sigma_2.\end{aligned}$$

Оценим σ_1. Поскольку $|B| \leqslant 8\alpha_0^{2/3}|\Lambda_1|$, выполнено

$$|\sigma_1| \leqslant 8\alpha_0^{2/3}|\Lambda'|^4|\Lambda_1|. \tag{3.40}$$

Если $k \notin B$, то $k \notin B_1$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sum_{k\notin B}\sum_u\sum_{r,r'} f(r,u)f(r',u)E_1^{(2)}(u-k)E_2^{(1)}(k+r)E_2^{(1)}(k+r')\\ &\qquad\times\sum_m f(r,m)f(r',m)E_1^{(2)}(m-k)\\ &= \sum_{k\notin B}\sum_u\sum_{r,r'} f(r,u)f(r',u)E_1^{(2)}(u-k)E_2^{(1)}(k+r)E_2^{(1)}(k+r')(\Phi^1_{r,r'} * E_1^{(2)})(-k)\\ &= \beta_1^{(2)}\sum_{k\notin B}\sum_u\sum_{r,r'} f(r,u)f(r',u)E_1^{(2)}(u-k)E_2^{(1)}(k+r)E_2^{(1)}(k+r')\\ &\qquad\times\sum_m f(r,m)f(r',m)\Lambda_1^{(2)}(m-k)\\ &\quad+\vartheta\alpha_0^{2/3}|\Lambda'|\sum_{k\notin B}\sum_u\sum_{r,r'} f(r,u)f(r',u)E_1^{(2)}(u-k)E_2^{(1)}(k+r)E_2^{(1)}(k+r')\end{aligned}$$

$$= \beta_1^{(2)} \sum_{k \notin B} \sum_u \sum_{r,r'} f(r,u) f(r',u) E_1^{(2)}(u-k) E_2^{(1)}(k+r) E_2^{(1)}(k+r')$$
$$\times \sum_m f(r,m) f(r',m) \Lambda_1^{(2)}(m-k) + 4\vartheta \alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|, \tag{3.41}$$

где $|\vartheta| \leqslant 1$. Применяя эти рассуждение для множеств B_2, B_3 и B_4, находим

$$|\sigma_2| \leqslant (\beta_1^{(2)})^2 (\beta_2^{(1)})^2 \sum_{m,u} \sum_{r,r'} f(r,m) f(r,u) f(r',m) f(r',u)$$
$$\times \sum_k \Lambda_1^{(2)}(m-k) \Lambda_1^{(2)}(u-k) \Lambda_2^{(1)}(k+r) \Lambda_2^{(1)}(k+r') + 16 \alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|. \tag{3.42}$$

Отсюда имеем

$$|\sigma'| \leqslant |\sigma_1| + |\sigma_2| \leqslant (\beta_1^{(2)})^2 (\beta_2^{(1)})^2 \sum_{m,u} \sum_{r,r'} f(r,m) f(r,u) f(r',m) f(r',u)$$
$$\times \sum_k \Lambda_1^{(2)}(m-k) \Lambda_1^{(2)}(u-k) \Lambda_2^{(1)}(k+r) \Lambda_2^{(1)}(k+r') + 32 \alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|. \tag{3.43}$$

Применяя неравенство (3.38), получаем

$$|\sigma|^4 \leqslant \|h\|_2^4 \sigma^* (\beta_1^{(2)})^2 (\beta_2^{(1)})^2 \sum_k \sum_{r,r'} \Lambda_2^{(1)}(k+r) \Lambda_2^{(1)}(k+r')$$
$$\times \left| \sum_m \Lambda_1^{(2)}(m-k) f(r,m) f(r',m) \right|^2 + 32 \|h\|_2^4 \sigma^* \alpha_0^{2/3} |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|. \tag{3.44}$$

Поскольку $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2$, то $\beta_1^{(2)} \leqslant 2\beta_1$ и $\beta_2^{(1)} \leqslant 2\beta_2$, откуда имеем

$$|\sigma_{ij}|^4 \leqslant 2^4 \beta_1^2 \beta_2^2 \|h\|_2^4 \sigma_{ij}^* \sum_k \sum_{r,r'} \Lambda_2^{(1)}(k+r) \Lambda_2^{(1)}(k+r')$$
$$\times \left| \sum_m \Lambda_1^{(2)}(m-k) f(r,m) f(r',m) \right|^2 + 2^5 \alpha_0^{2/3} \|h\|_2^4 \sigma_{ij}^* |\Lambda'|^4 |\Lambda_1|. \tag{3.45}$$

Пусть $\alpha_{ij} = \sum_k \sum_{r,r'} \Lambda_2^{(1)}(k+r) \Lambda_2^{(1)}(k+r') \left| \sum_m \Lambda_1^{(2)}(m-k) f(r,m) f(r',m) \right|^2$. Предположим, что существуют $i \notin \Omega_1$, $j \notin \Omega_2'(i)$ такие, что

$$\|h_j\|_2^2 \geqslant 8\delta \beta_1 \beta_2 |\Lambda'|\, |\Lambda_1|.$$

Тогда

$$\sum_{k,m} A(k,m) \Lambda'(m-j) \geqslant 8\delta \beta_1 \beta_2 |\Lambda'|\, |\Lambda_1|. \tag{3.46}$$

Пусть $F_1' = E_1$, $F_2' = E_2^{(1)}$. Имеем $j \notin \Omega_2'(i)$. Отсюда и из неравенства (3.46) получаем

$$|A \cap F_1' \times F_2'| \geqslant 4\delta \beta_1 \beta_2 |F_1'|\, |F_2'|,$$
$$|F_1'| = \beta_1 |\Lambda_1|, \qquad |F_2'| \geqslant 2^{-1} \beta_2 |\Lambda'|.$$

Применяя простые соображения, связанные со средними значениями, легко видеть, что найдутся вектор $\vec{y}=(y_1,y_2)\in G\times G$ и два множества $F_1\subseteq E_1\cap(\Lambda'+y_1)$, $F_2\subseteq E_2\cap(\Lambda'+y_2)$ такие, что неравенства (3.22), (3.23) выполнены.

Применяя лемму 3.15, получаем

$$\sum_{i\notin\Omega_1,j\notin\Omega_2'(i)}|\sigma_{ij}|\leqslant 8\delta^{3/4}\beta_1^{3/2}\beta_2^{3/2}|\Lambda'|\,|\Lambda_1|^{3/4}\biggl(\sum_{i\in\Lambda_1,j\in\Lambda_2}\alpha_{ij}\biggr)^{1/4}(|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|)^{3/4} + 4\alpha_0^{1/6}|\Lambda'|^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|.$$

По условию функция f является (α,ε)-равномерной относительно прямоугольной нормы. Ясно, что

$$\sum_{i\in\Lambda_1,j\in\Lambda_2}\alpha_{ij}=\sum_{i\in\Lambda_1,j\in\Lambda_2}\sum_k\sum_{r,r'}\mu_j(k+r)\mu_j(k+r')\biggl|\sum_m\lambda_i(m-k)f(r,m)f(r',m)\biggr|^2.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{i\notin\Omega_1,j\notin\Omega_2'(i)}|\sigma_{ij}|\leqslant 8\alpha^{1/4}\delta^{3/4}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|+4\alpha_0^{1/6}|\Lambda'|^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|. \tag{3.47}$$

Применяя неравенства (3.25), (3.27), (3.32) и (3.47), находим

$$|\sigma_0|\leqslant 16\kappa|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|+8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|+32\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|+4\alpha_0^{1/6}|\Lambda'|^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2| + 8\alpha^{1/4}\delta^{3/4}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|\leqslant 16\alpha^{1/4}\delta^{3/4}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|.$$

Теорема доказана.

Следующий результат является основным в настоящем параграфе.

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1\leqslant\Lambda_2$, $\Lambda_1=\Lambda(S,\varepsilon_1)$, $S\subseteq\widehat{G}$, и пусть $E_1\subseteq\Lambda_1$, $E_2\subseteq\Lambda_2$, $|E_1|=\beta_1|\Lambda_1|$, $|E_2|=\beta_2|\Lambda_2|$. Обозначим через $\mathcal{P}$ декартово произведение $E_1\times E_2$.

Теорема 3.17. *Пусть A – произвольное подмножество множества $E_1\times E_2$, имеющее мощность $\delta|E_1|\,|E_2|$. Предположим, что множества E_1,E_2 являются $(\alpha_0,2^{-10}\varepsilon^2)$-равномерными, $\alpha_0=2^{-2000}\delta^{96}\beta_1^{48}\beta_2^{48}$, $\varepsilon=2^{-100}\alpha_0^2/(100d)$. Пусть A – $(\alpha,\alpha_1,\varepsilon)$-равномерное относительно прямоугольной нормы множество, $\alpha=2^{-100}\delta^9$, $\alpha_1=2^{-7}$ и*

$$\log N\geqslant 2^{10}\,d\log\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon}\,. \tag{3.48}$$

Тогда либо A содержит тройку $\{(k,m),(k+s,m),(k,m+s)\}$, где $s\neq0$, либо найдутся множество Бора $\tilde\Lambda$, два множества F_1, F_2 и вектор $\vec{y}=(y_1,y_2)\in G\times G$, $F_1\subseteq E_1\cap(\tilde\Lambda+y_1)$, $F_2\subseteq E_2\cap(\tilde\Lambda+y_2)$, такие, что $\tilde\Lambda$ является $(2^{-4}\varepsilon^2)$-сопровождающим множества Λ_1 и

$$|F_1|\geqslant 2^{-20}\beta_1|\tilde\Lambda|,\qquad |F_2|\geqslant 2^{-20}\beta_2|\tilde\Lambda|, \tag{3.49}$$

$$\delta_{F_1\times F_2}(A)\geqslant\frac{3}{2}\delta. \tag{3.50}$$

Доказательство. Пусть Λ' – некоторое ε-сопровождающее множества Λ_1, которое мы выберем позже, и $\lambda_i = \Lambda' + i$, $i \in \Lambda_1$. Пусть $G_i = (\lambda_i \times \Lambda_2) \cap A$, $f_i(\vec{s}\,) = f(s_1 + i, s_2)\Lambda'(s_1, s_2)$, $i \in \Lambda_1$. Обозначим через G_i характеристическую функцию множества G_i. Пусть

$$B_1 = \big\{i \in \Lambda_1 \mid E_1 \cap \lambda_i \text{ не } (8\alpha_0^{1/4}, \varepsilon)\text{-равномерно}\big\},$$
$$B_2 = \big\{i \in \Lambda_1 \mid |\delta_{\lambda_i}(E_1) - \beta_1| \geqslant 4\alpha_0^{1/2}\big\},$$
$$B_3 = \{i \in \Lambda_1 \mid \|f_i\|^4_{\Lambda' \times \Lambda_2, \varepsilon} > \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'_\varepsilon|^4|\Lambda'|^2|\Lambda_2|\}, \qquad B = B_1 \cup B_2 \cup B_3.$$

По условию множество E_1 является (α_0, ε)-равномерным. Из леммы 3.12 вытекают неравенства $|B_1| \leqslant 8\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1|$ и $|B_2| \leqslant 8\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1|$. Поскольку множество A является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$-равномерным относительно прямоугольной нормы множеством, то $|B_3| \leqslant \alpha_1|\Lambda_1|$. Следовательно, $|B| \leqslant 16\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1| + \alpha_1|\Lambda_1| \leqslant 2\alpha_1|\Lambda_1|$.

Применяя лемму 2.7, получаем

$$A(\vec{s}\,) = \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{i \in \Lambda_1} G_i(\vec{s}\,) + \varepsilon(\vec{s}\,), \tag{3.51}$$

где $\|\varepsilon_3\|_1 \leqslant 2\kappa|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|$, $\kappa = \alpha_0^2$. Рассмотрим сумму

$$\sigma = \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{i \in \Lambda_1}\sum_{x,y} G_i(x + y, y). \tag{3.52}$$

Имеем $|A| = \delta\beta_1\beta_2|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|$. Применяя формулу (3.51), находим

$$\sigma \geqslant \frac{7\delta\beta_1\beta_2}{8}|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|. \tag{3.53}$$

Разобьем сумму σ следующим образом:

$$\sigma = \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{i \in B}\sum_{x,y} G_i(x + y, y) + \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{i \notin B}\sum_{x,y} G_i(x + y, y) = \sigma_1 + \sigma_2. \tag{3.54}$$

Оценим σ_1. Имеем

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{i \in B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)}\sum_{x,y} G_i(x + y, y) + \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{i \in B_1 \cup B_2}\sum_{x,y} G_i(x + y, y) \\ &\leqslant \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{i \in B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)}\sum_{x,y} G_i(x + y, y) + 16\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|. \end{aligned}\tag{3.55}$$

Предположим, что найдется $i \notin B_1 \cup B_2$ такое, что

$$\sum_{x,y} G_i(x + y, y) \geqslant 4\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_2|,$$

или

$$\sum_{x,y} G_i(x, y) \geqslant 4\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_2|.$$

Положим $y_1 = i$, $y_2 = 0$ и $F_1 = (\Lambda' + i) \cap E_1$. Поскольку $i \notin B_2$, то $|F_1| \geqslant \beta_1|\Lambda'|/2$. Применяя простые соображения, связанные со средними значениями, легко видеть, что найдется элемент a такой, что множество $F_2 = (\Lambda' + a) \cap E_2$ имеет мощность не меньше $\beta_2|\tilde{\Lambda}_1|/2$, а для вектора $\vec{y} = (i, a)$ выполнено

$$|A \cap (F_1 \times F_2)| > 2\delta |F_1|\,|F_2|.$$

Таким образом, справедливы неравенства (3.49), (3.50), и в этом случае теорема доказана.

Имеем $\alpha_1 = 2^{-7}$. Применяя $|B_3| \leqslant \alpha_1 |\Lambda_1|$ и $\alpha_0^{1/4} \leqslant 2^{-4}\alpha_1\beta_1\beta_2$, получаем

$$\sigma_1 \leqslant 4\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|B_3|\,|\Lambda_2| + 16\alpha_0^{1/4}|\Lambda_1|\,|\Lambda_2| \leqslant 2^{-3}\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|. \qquad (3.56)$$

Далее, из неравенства (3.56) и неравенств (3.53), (3.54) находим

$$\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{i \notin B}\sum_{x,y} G_i(x+y, y) \geqslant \frac{3\delta\beta_1\beta_2}{4}|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|. \qquad (3.57)$$

Из формулы (3.57) вытекает, что найдется $i_0 \notin B$ такой, что

$$\sum_{x,y} G_{i_0}(x+y, y) \geqslant \frac{3}{4}\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_2|. \qquad (3.58)$$

Пусть $G'(\vec{s}) = G_{i_0}(\vec{s})$. Имеем

$$\sum_k \sum_m G'(k+m, m) \geqslant 2^{-3}\delta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_2|. \qquad (3.59)$$

Кроме того, $m \in \Lambda_2$ и $k + m \in \lambda_i$. Отсюда $k \in \lambda_i - \Lambda_2$. Применяя лемму 2.7, получаем, что k принадлежит некоторому множеству, мощность которого не превосходит $2|\Lambda_2|$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$2^{-6}\delta^2\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2|^2 \leqslant \sum_k \left(\sum_m G'(k+m, m)\right)^2 \cdot 2|\Lambda_2|. \qquad (3.60)$$

Отсюда

$$\sum_k \left(\sum_m G'(k+m, m)\right)^2 = \sum_k \sum_{m,p} G'(k+m, m)G'(k+p, p) \geqslant 2^{-7}\delta^2\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2|. \qquad (3.61)$$

Рассмотрим сумму

$$\sigma_0 = \sum_{s_1, s_2, r} G'(s_1, s_2)G'(s_1 + r, s_2 + r)A(s_1, s_2 + r). \qquad (3.62)$$

Имеем

$$G'(s_1, s_2)G'(s_1 + r, s_2 + r)f(s_1, s_2 + r) = G'(s_1, s_2)G'(s_1 + r, s_2 + r)f_{i_0}(s_1, s_2 + r), \qquad (3.63)$$

где f_{i_0} – ограничение функции f на G'. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \delta \sum_{s_1,s_2,r} G'(s_1,s_2)G'(s_1+r,s_2+r)\mathcal{P}(s_1,s_2+r) \\ &\quad + \sum_{s_1,s_2,r} G'(s_1,s_2)G'(s_1+r,s_2+r)f(s_1,s_2+r) \\ &= \delta \sum_{s_1,s_2,r} G'(s_1,s_2)G'(s_1+r,s_2+r) \\ &\quad + \sum_{s_1,s_2,r} G'(s_1,s_2)G'(s_1+r,s_2+r)f_{i_0}(s_1,s_2+r). \qquad (3.64)\end{aligned}$$

Из неравенства в (3.61) вытекает, что первое слагаемое в формуле (3.64) не меньше $2^{-7}\delta^3\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2|$. Поскольку $i_0 \notin B$, то $\|f_{i_0}\|^4 \leqslant \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2|$ и $\delta_{\lambda_{i_0}}(E_1) \leqslant 2\beta_1$. По условию имеем $\alpha = 2^{-100}\delta^9$. Применяя теорему 3.14 и неравенство (3.58), получаем, что либо второе слагаемое в формуле (3.64) не превосходит

$$2^{10}\alpha^{1/4}\delta^{3/4}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2| \leqslant 2^{-8}\delta^3\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2|,$$

либо найдутся вектор $\vec{y} = (y_1,y_2) \in G\times G$ и два множества $F_1 \subseteq E_1 \cap (\tilde{\Lambda}+y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\tilde{\Lambda}+y_2)$, для которых справедливы неравенства (3.49), (3.50). В первом случае теорема доказана, причем $\tilde{\Lambda}$ есть ε-сопровождающее множества Λ'. Во втором случае $\sigma_0 \geqslant 2^{-7}\delta^3\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2|$.

Сумма (3.62) равна количеству троек $\{(k,m),(k+s,m),(k,m+s)\}$, где $k\in\Lambda_{i_0}$, $m\in\Lambda_2$, $s\in G$. Число троек с $s=0$ не превосходит $|\Lambda'|\,|\Lambda_2|$. По условию $\log N \geqslant 2^{10}d\log\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon}$. Применяя лемму 2.3, получаем $|\Lambda'| > 2^8(\delta^3\beta_1^2\beta_2^2)^{-1}$. Следовательно, $2^{-8}\delta^3\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^2|\Lambda_2| > |\Lambda'|\,|\Lambda_2|$. Отсюда множество A содержит тройку $\{(k,m),(k+s,m),(k,m+s)\}$, где $s\neq 0$. Теорема доказана.

§ 4. О структуре множеств, не являющихся α-равномерными относительно прямоугольной нормы

Лемма 4.1. *Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_2$ и Λ' – некоторое ε-сопровождающее множества Λ_1, $\varepsilon = \kappa/(100d)$. Пусть $A\subseteq C\subseteq \Lambda_1\times\Lambda_2$ и $|A| = \delta|C|$, $0\leqslant\delta\leqslant 1$. Обозначим через B множество тех $s\in\Lambda_1$, для которых выполнено $|A\cap((\Lambda'+s)\times\Lambda_2)| < (\delta-\eta)|C\cap((\Lambda'+s)\times\Lambda_2)|$, где $\eta>0$. Тогда*

$$\begin{aligned}\sum_{s\in\Lambda_1\setminus B} |A\cap((\Lambda'+s)\times\Lambda_2)| &\geqslant \delta \sum_{s\in\Lambda_1\setminus B} |C\cap((\Lambda'+s)\times\Lambda_2)| \\ &\quad + \eta\sum_{s\in B}|C\cap((\Lambda'+s)\times\Lambda_2)| - 4\kappa|\Lambda'|\,|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|.\end{aligned}$$

Доказательство. Применяя лемму 2.7, находим

$$\delta|C| = \sum_{\vec{s}} A(\vec{s})\Lambda_1(k)\Lambda_2(m) = \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{n\in\Lambda_1}\sum_{\vec{s}} A(\vec{s})((\Lambda'+n)\times\Lambda_2)(\vec{s}) + 2\vartheta\kappa|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|, \qquad (4.1)$$

где $|\vartheta| \leqslant 1$. Разобьем (4.1) на сумму по $n \in B$ и на сумму по $n \in \Lambda_1 \setminus B$. Получим

$$\delta|C| < \frac{1}{|\Lambda'|}(\delta-\eta)\sum_{n\in B}|C\cap((\Lambda'+n)\times\Lambda_2)| \\ + \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{n\in\Lambda_1\setminus B}|A\cap((\Lambda'+n)\times\Lambda_2)| + 2\kappa|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|. \tag{4.2}$$

Аналогично,

$$|C| = \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{n\in B}|C\cap((\Lambda'+n)\times\Lambda_2)| + \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{n\in\Lambda_1\setminus B}|C\cap((\Lambda'+n)\times\Lambda_2)| + 2\vartheta_1\kappa|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|, \tag{4.3}$$

где $|\vartheta_1| \leqslant 1$. Объединяя неравенства (4.2) и (4.3), получаем требуемый результат.

Пусть X – конечное множество, μ – мера на X, и пусть $Z\colon X \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Обозначим через $\mathbf{E}Z$ сумму $\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} Z(x)$. Следующая лемма хорошо известна (см., например, [21]).

Лемма 4.2. *Пусть p – действительное число. Пусть $Z\colon X \to [-1,1]$ – некоторая функция такая, что $\mathbf{E}Z = 0$ и $\mathbf{E}|Z|^p = \sigma^p$. Тогда*

$$\mu\biggl\{x\in X\colon Z > \frac{\sigma^p}{5}\biggr\} \geqslant \frac{\sigma^p}{5}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (4.4) не верно. Поскольку $\mathbf{E}Z = 0$, то

$$-\mathbf{E}Z\mathbf{1}_{\{Z<0\}} = \mathbf{E}Z\mathbf{1}_{\{Z>0\}} \leqslant \mu\{x\colon Z > 5^{-1}\sigma^p\} + \mathbf{E}Z\mathbf{1}_{\{0<Z\leqslant 5^{-1}\sigma^p\}} \leqslant \frac{2}{5}\sigma^p,$$

где $\mathbf{1}_{\{Z<0\}}$, $\mathbf{1}_{\{Z>0\}}$ – характеристические функции множеств $\{x\colon Z(x) < 0\}$ и $\{x\colon Z(x) > 0\}$ соответственно. Для всех $x \in X$ выполнено $|Z(x)| \leqslant 1$. Отсюда имеем

$$\sigma^p = \mathbf{E}|Z|^p = \mathbf{E}|Z|^p\mathbf{1}_{\{Z<0\}} + \mathbf{E}|Z|^p\mathbf{1}_{\{Z>0\}} \leqslant 2\mathbf{E}Z\mathbf{1}_{\{Z>0\}} \leqslant \frac{4}{5}\sigma^p. \tag{4.5}$$

Противоречие. Лемма доказана.

Нам понадобится одно предложение, касающееся свойств не α-равномерных множеств. Аналоги следующего предложения были доказаны в работах [14], [18], [20], [21].

Предложение 4.3. *Пусть A – подмножество множества $E_1 \times E_2$, имеющее мощность $\delta|E_1|\,|E_2|$. Пусть $\alpha > 0$ – действительное число, $\alpha \leqslant \delta^4/8$, и A – не α-равномерное относительно прямоугольной нормы множество. Тогда существуют два множества $F_1 \subseteq E_1$ и $F_2 \subseteq E_2$ такие, что*

$$|A\cap(F_1\times F_2)| > (\delta + 2^{-15}\alpha^2\delta^{-5})|F_1|\,|F_2|, \tag{4.6}$$

$$|F_1| \geqslant 2^{-15}\alpha^2\delta^{-5}|E_1|, \qquad |F_2| \geqslant 2^{-15}\alpha^2\delta^{-5}|E_2|. \tag{4.7}$$

Доказательство. Пусть f – балансовая функция множества A. Предположим, что

$$\sum_x \Big|\sum_y f(x,y)\Big|^2 \leqslant \frac{\alpha\delta^{-2}}{16}|E_1|\,|E_2|^2, \tag{4.8}$$

$$\sum_y \Big|\sum_x f(x,y)\Big|^2 \leqslant \frac{\alpha\delta^{-2}}{16}|E_1|^2|E_2|. \tag{4.9}$$

Предположим, что одно из неравенств (4.8) или (4.9) не выполнено. В этом случае существование множеств F_1, F_2, для которых справедливы неравенства (4.6), (4.7), легко вытекает из леммы 4.2. Докажем неравенство

$$\|A\|^4 \geqslant \Big(\delta^4 + \frac{\alpha}{2}\Big)|E_1|^2|E_2|^2. \tag{4.10}$$

По условию $\|f\|^4 \geqslant \alpha|E_1|^2|E_2|^2$. Применяя очевидные формулы $A = f + \delta(E_1 \times E_2)$ и $\sum_{x,y} f(x,y) = 0$, находим

$$\begin{aligned}
\|A\|^4 \geqslant{}& (\delta^4+\alpha)|E_1|^2|E_2|^2 \\
&+ \delta \sum_{x,x',y,y'} f(x,y)f(x',y)f(x,y') + \delta \sum_{x,x',y,y'} f(x,y)f(x',y)f(x',y') && (4.11)\\
&+ \delta \sum_{x,x',y,y'} f(x,y)f(x,y')f(x',y') + \delta \sum_{x,x',y,y'} f(x',y)f(x,y')f(x',y') && (4.12)\\
&+ \delta^2 \sum_{x,x',y,y'} f(x,y)f(x',y') + \delta^2 \sum_{x,x',y,y'} f(x',y)f(x,y') && (4.13)\\
&+ \delta^2 \sum_{x,x',y,y'} f(x,y)f(x',y)E_2(y') + \delta^2 \sum_{x,x',y,y'} f(x,y)f(x,y')E_1(x') && (4.14)\\
&+ \delta^2 \sum_{x,x',y,y'} f(x',y)f(x',y')E_1(x) + \delta^2 \sum_{x,x',y,y'} f(x,y')f(x',y')E_2(y). && (4.15)
\end{aligned}$$

Легко видеть, что оба слагаемых в строке (4.13) равны нулю. Применяя (4.8) и (4.9), находим, что сумма четырех слагаемых в строках (4.14), (4.15) не превосходит $\alpha|E_1|^2|E_2|^2/4$. Докажем, что каждое слагаемое в (4.11), (4.12) не больше $\alpha/(16\delta)|E_1|^2|E_2|^2$. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что первое слагаемое в строке (4.11) не меньше $\alpha/(16\delta)|E_1|^2|E_2|^2$. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{16\delta}|E_1|^2|E_2|^2 &\leqslant \Big(\sum_{x,y}|f(x,y)|^3\Big)^{1/3}\Big(\sum_{x,y}\Big|\sum_{x'} f(x',y)\Big|^{3/2}\Big|\sum_{y'} f(x,y')\Big|^{3/2}\Big)^{2/3} \\
&\leqslant 2\delta^{1/3}(|E_1|\,|E_2|)^{1/3}\Big(\sum_y\Big|\sum_{x'} f(x',y)\Big|^{3/2}\sum_x\Big|\sum_{y'} f(x,y')\Big|^{3/2}\Big)^{2/3}.
\end{aligned}$$

Отсюда, не ограничивая общности, получаем

$$\sum_y \left|\sum_{x'} f(x',y)\right|^{3/2} \geqslant \frac{\alpha^{3/4}}{16\delta}|E_1|^{3/2}|E_2| \geqslant \frac{\alpha^2}{16\delta^5}|E_1|^{3/2}|E_2|.$$

Применяя лемму 4.2, находим множества F_1, F_2, для которых выполнены неравенства (4.6), (4.7). Таким образом, каждое слагаемое в строках (4.11), (4.12) не превосходит $\alpha/(16\delta)|E_1|^2|E_2|^2$, и мы получаем неравенство (4.10).

Пусть $e(x,y) = \{(\bar{x},\bar{y}) \in A \mid (\bar{x},y) \in A,\ (x,\bar{y}) \in A\}$. Пусть также $N_x = \{y \mid (x,y) \in A\}$, $N_y = \{x \mid (x,y) \in A\}$. Ясно, что

$$\|A\|^4 = \sum_{(x,y)\in A} e(x,y). \tag{4.16}$$

Пусть $\widetilde{X} = \bigl\{x \in E_1 \colon \bigl|\sum_y f(x,y)\bigr| \leqslant \alpha|E_2|/(32\delta^3)\bigr\}$, $\widetilde{Y} = \bigl\{y \in E_2 \colon \bigl|\sum_x f(x,y)\bigr| \leqslant \alpha|E_1|/(32\delta^3)\bigr\}$, и пусть $X^c = E_1 \setminus \widetilde{X}$, $Y^c = E_2 \setminus \widetilde{Y}$. Заметим, что $|X^c| \leqslant \zeta|E_1|$, $|Y^c| \leqslant \zeta|E_2|$, где $\zeta = \alpha/(128\delta^2)$. В самом деле, если, например, $|X^c| > \zeta|E_1|$, то $\sum_x\bigl|\sum_y f(x,y)\bigr| > \alpha^2|E_1|\,|E_2|/(2^{12}\delta^5)$. Применяя лемму 4.2, мы находим множества F_1, F_2, для которых выполнены неравенства (4.6), (4.7).

Докажем, что

$$\sum_{x\in\widetilde{X},y\in\widetilde{Y}} A(x,y)e(x,y) \geqslant \left(\delta^4 + \frac{\alpha}{4}\right)|E_1|^2|E_2|^2. \tag{4.17}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\|A\|^4 = &\sum_{x\in\widetilde{X},y\in\widetilde{Y},x',y'} A(x,y)A(x',y)A(x,y')A(x',y')\\ &+ \sum_{x\in\widetilde{X},y\in Y^c,x',y'} A(x,y)A(x',y)A(x,y')A(x',y')\\ &+ \sum_{x\in X^c,y\in\widetilde{Y},x',y'} A(x,y)A(x',y)A(x,y')A(x',y')\\ &+ \sum_{x\in X^c,y\in Y^c,x',y'} A(x,y)A(x',y)A(x,y')A(x',y') = \sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.\end{aligned}$$

Ясно, что $\sigma_3 \leqslant |X^c|\,|Y^c|\delta|E_1|\,|E_2| \leqslant \alpha|E_1|^2|E_2|^2/16$. Далее,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\leqslant |Y^c|\sum_{x,x',y'} A(x,y')A(x',y') = |Y^c|\sum_{y'\in\widetilde{Y}}\left|\sum_x A(x,y')\right|^2 + |Y^c|\sum_{y'\in Y^c}\left|\sum_x A(x,y')\right|^2\\ &\leqslant 4\delta^2|Y^c|\,|E_1|^2|E_2| + |Y^c|^2|E_1|^2 \leqslant \frac{\alpha}{16}|E_1|^2|E_2|^2.\end{aligned}$$

Аналогично, $\sigma_2 \leqslant \alpha|E_1|^2|E_2|^2/16$. Применяя (4.10) и (4.16), получаем (4.17).

Из неравенства (4.17) вытекает, что найдется $(x_0,y_0) \in A \cap (\widetilde{X} \times \widetilde{Y})$ такое, что

$$e(x_0,y_0) \geqslant \left(\delta^3 + \frac{\alpha}{4\delta}\right)|E_1|\,|E_2|. \tag{4.18}$$

Положим $F_1 = N_{y_0}$, $F_2 = N_{x_0}$. По определению множеств $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ мы имеем $|\,|N_x| - \delta|E_2|\,| \leqslant \alpha|E_2|/(32\delta^3)$ и $|\,|N_y| - \delta|E_1|\,| \leqslant \alpha|E_1|/(32\delta^3)$. В частности, $|F_1|, |F_2| \geqslant \delta/2$, и неравенство (4.6) выполнено. Очевидно, что $e(x,y) = |(N_y \times N_x) \cap A|$. Применяя неравенство (4.18) и оценку $\alpha \leqslant \delta^4/8$, находим

$$|A \cap (F_1 \times F_2)| \geqslant \left(\delta + \frac{\alpha}{4\delta^3}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{32\delta^4}\right)^{-2}|F_1|\,|F_2|$$
$$\geqslant \left(\delta + \frac{\alpha}{4\delta^3}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{16\delta^4}\right)|F_1|\,|F_2| \geqslant \left(\delta + \frac{\alpha}{8\delta^3}\right)|F_1|\,|F_2|$$

и получаем (4.7). Предложение доказано.

Предложение 4.3 показывает, что множества, не α-равномерные относительно прямоугольной нормы, не являются квазислучайными (см. [30]).

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \Lambda(S, \varepsilon_0)$, $|S| = d$ и $E_1 \subseteq \Lambda_1$, $E_2 \subseteq \Lambda_2$, $|E_1| = \beta_1|\Lambda_1|$, $|E_2| = \beta_2|E_2|$. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество $E_1 \times E_2$.

Теорема 4.4. *Пусть A – подмножество множества $\mathcal{P}$ мощности $\delta|E_1|\,|E_2|$.!!!! Предположим, что A не содержит троек $\{(k,m),(k+d,m),(k,m+d)\}$, где $d \neq 0$, множества E_1, E_2 являются $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$-равномерными, $\alpha_0 = 2^{-2000}\delta^{96}\beta_1^{48}\beta_2^{48}$,!!!! $\varepsilon = 2^{-100}\alpha_0^2/(100d)$, $\varepsilon' = 2^{-10}\varepsilon^2$ и*

$$\log N \geqslant 2^{10}\, d \log \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Тогда существуют множество Бора $\tilde{\Lambda}$, множества F_1, F_2 и вектор $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$, $F_1 \subseteq E_1 \cap (\tilde{\Lambda} + y_1)$, $F_2 \subseteq E_2 \cap (\tilde{\Lambda} + y_2)$, такие, что

$$|F_1| \geqslant 2^{-500}\delta^{22}\beta_1|\tilde{\Lambda}|, \qquad |F_2| \geqslant 2^{-500}\delta^{22}\beta_2|\tilde{\Lambda}|, \tag{4.19}$$
$$\delta_{F_1 \times F_2}(A) \geqslant \delta + 2^{-500}\delta^{22}. \tag{4.20}$$

Кроме того, $\tilde{\Lambda} = \Lambda(\widetilde{S}, \tilde{\varepsilon})$, где $\widetilde{S} = S$ и $\tilde{\varepsilon} \geqslant 2^{-5}\varepsilon'\varepsilon_0$.

Доказательство. Пусть Λ' является ε-сопровождающим множества Λ_1, а Λ'' – ε-сопровождающим множества Λ'. Мы уточним наш выбор Λ', Λ'' ниже. Предположим, что A является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$-равномерным относительно прямоугольной нормы с параметрами $\alpha = 2^{-100}\delta^9$, $\alpha_1 = 2^{-7}$. Применяя теорему 3.17, получаем, что либо A содержит тройку $\{(k,m),(k+d,m),(k,m+d)\}$, где $d \neq 0$, либо выполнены неравенства (4.19), (4.20). Поскольку по условию множество A не содержит уголков, то мы получаем требуемый результат. Следовательно, A не является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$-равномерным относительно прямоугольной нормы.

Пусть

$$B_1 = \bigl\{s \in \Lambda_1 \mid |\delta_{\Lambda'+s}(E_1) - \beta_1| \geqslant 4\alpha_0^{1/2}\bigr\},$$
$$B_2 = \bigl\{s \in \Lambda_1 \mid \Lambda' \cap (E_1 - s) \text{ не } (8\alpha_0^{1/4}, \varepsilon)\text{-равномерно}\bigr\},$$
$$B = \bigl\{i \in \Lambda_1 \mid \|f_i\|^4_{\Lambda' \times \Lambda_2, \varepsilon} > \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'_\varepsilon|^4|\Lambda'|^2|\Lambda_2|\bigr\}.$$

Поскольку A не является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$-равномерным относительно прямоугольной нормы, $|B| > \alpha_1|\Lambda_1|$. По условию E_1, E_2 суть (α_0, ε')-равномерные множества.

Применяя лемму 3.12, получаем $|B_1| \leqslant 4\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|$, $|B_2| \leqslant 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|$. Пусть $B_3 = B_1 \cup B_2$. Тогда $|B_3| \leqslant 12\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|$. Пусть $B' = B \setminus B_3$. Поскольку $32\alpha_0^{1/2} < \alpha_1$, то $|B'| \geqslant \alpha_1|\Lambda_1|/2$. Заметим, что для всех $l \in B'$ выполнено

$$|\delta_{\Lambda'+s}(E_1) - \beta_1| < 4\alpha_0^{1/2}. \tag{4.21}$$

Пусть $\eta = 2^{-100}\alpha^3\delta^{-5}$ и $\lambda_l = \Lambda' + l$, $l \in \Lambda_1$. Предположим, что для всех $l \in B'$ справедливо неравенство

$$|A \cap (\lambda_l \times \Lambda_2)| \leqslant (\delta - \eta)|\lambda_l \cap E_1|\,|\Lambda_2 \cap E_2|. \tag{4.22}$$

Пусть $(B')^c = \Lambda_1 \setminus B'$. Применяя лемму 4.1 и неравенство (4.21), находим

$$\begin{aligned}
&\sum_{l\in(B')^c} |A \cap (\lambda_l \times \Lambda_2)| \\
&\qquad \geqslant \delta|\Lambda_2 \cap E_2| \sum_{l\in(B')^c} |\lambda_l \cap E_1| + \eta|\Lambda_2 \cap E_2| \sum_{l\in B'} |\lambda_l \cap E_1| - \alpha_0^2|\Lambda'|\,|\Lambda_1|\,|\Lambda_2| \\
&\qquad \geqslant \delta\beta_2|\Lambda_2| \sum_{l\in(B')^c} |\lambda_l \cap E_1| + \eta\frac{\alpha_1|\Lambda_1|}{2}\,\frac{\beta_1|\Lambda'|}{4}\beta_2|\Lambda_2| \\
&\qquad \geqslant \delta\beta_2|\Lambda_2| \sum_{l\in(B')^c} |\lambda_l \cap E_1| + 2^{-3}\alpha_1\eta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Имеем

$$\sum_{l\in B_1} |A \cap (\lambda_l \times \Lambda_2)| \leqslant 4\alpha_0^{1/2}|\Lambda_1|\,|\Lambda'|\,|\Lambda_2| \leqslant 2^{-4}\alpha_1\eta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|. \tag{4.24}$$

Объединяя неравенства (4.23) и (4.24), получаем

$$\sum_{l\in(B')^c\setminus B_1} |A\cap(\lambda_l\times\Lambda_2)| \geqslant \delta\beta_1|\Lambda_2| \sum_{l\in(B')^c} |\lambda_l\cap E_1| + 2^{-4}\alpha_1\eta\beta_1\beta_2|\Lambda'|\,|\Lambda_1|\,|\Lambda_2|. \tag{4.25}$$

Отсюда найдется $l \in (B')^c \setminus B_1$ такое, что

$$|A \cap (\lambda_l \times \Lambda_2)| > (\delta + 2^{-5}\alpha_1\eta)|\lambda_l \cap E_1|\,|\Lambda_2 \cap E_2|. \tag{4.26}$$

Положим $\tilde\Lambda = \Lambda'$, $y_1 = l_0$ и $F_1 = (\tilde\Lambda + l_0) \cap E_1$. Поскольку $l_0 \notin B_1$, то $|F_1| \geqslant \beta_1|\tilde\Lambda|/2$. Множество E_2 является $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$-равномерным. Следовательно, найдется элемент a такой, что множество $F_2 = (\tilde\Lambda + a) \cap E_2$ имеет мощность по крайней мере $\beta_2|\tilde\Lambda_1|/2$, и, кроме того, для $\vec y = (l_0, a)$ выполнено

$$|A \cap (\tilde\Lambda + \vec y)| > (\delta + 2^{-6}\alpha_1\eta)|F_1|\,|F_2|.$$

В этом случае теорема доказана.

Пусть $f(\vec x)$ – балансовая функция множества A. Существует $l_0 \in B'$ такое, что

$$|A \cap (\lambda_{l_0} \times \Lambda_2)| > (\delta - \eta)|\lambda_{l_0} \cap E_1|\,|\Lambda_2 \cap E_2|.$$

Если

$$|A \cap (\lambda_{l_0} \times \Lambda_2)| \geqslant (\delta + \eta)|\lambda_{l_0} \cap E_1|\,|\Lambda_2 \cap E_2|, \tag{4.27}$$

то теорема доказана. Значит, найдется $l_0 \in B'$ такое, что

$$\left|\sum_{r,m} f(r,m)\lambda_{l_0}(r)\Lambda_2(m)\right| < \eta|\lambda_{l_0} \cap E_1|\,|\Lambda_2 \cap E_2|. \tag{4.28}$$

Пусть $\Lambda_0 = \Lambda' + l_0$. Положим $\nu_i = \Lambda'' + i$, $i \in \Lambda_0$, и $\mu_j = \Lambda'' + j$, $j \in \Lambda_2$. Рассмотрим сумму

$$\sigma^* = \sum_{i\in\Lambda_0}\sum_{j\in\Lambda_2}\sum_k\sum_m\sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r). \tag{4.29}$$

Предположим, что в сумме (4.29) зафиксированы i и j. Применяя лемму 2.7, получаем, что k пробегает некоторое множество, мощность которого не превосходит $2|\Lambda_0|$. Кроме того, если зафиксированы i, j, k, то переменные m, r пробегают множества, мощность которых не превосходит $|\Lambda''|$. Применяя лемму 2.7 еще раз, находим

$$\sigma^* = |\Lambda''|^2\sum_k\sum_m\sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\Lambda_0(m-k)\Lambda_2(k+r) + \vartheta\alpha_0^2|\Lambda''|^2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|, \tag{4.30}$$

где $|\vartheta| \leqslant 1$. Пусть $\Lambda_3 = \Lambda_2 - \Lambda' - l_0$. Снова применяя лемму 2.7, получаем $|\Lambda_2| \leqslant |\Lambda_3| \leqslant (1+\alpha_0^2)|\Lambda_2|$. Заметим, что в неравенстве (4.30) переменная k принадлежит множеству Λ_3. Если $k \in \Lambda_2^- - l_0$, то $\Lambda_2(k+r) = 1$ для всех $r \in \Lambda_0$. Наконец, если зафиксировать k в (4.30), то r и m будут пробегать некоторые множества, мощность которых не превосходит $|\Lambda_0|$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^*}{|\Lambda''|^2} &= \sum_{k\in(\Lambda_2^- - l_0)}\sum_m\sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\Lambda_0(m-k) \\
&\quad + \sum_{k\in(\Lambda_3\setminus(\Lambda_2^- - l_0))}\sum_m\sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\Lambda_0(m-k)\Lambda_2(k+r) \\
&= \sum_{k\in(\Lambda_2^- - l_0)}\sum_m\sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\Lambda_0(m-k) + \alpha_0^2\vartheta_1|\Lambda_0|^2|\Lambda_2| \\
&= \sum_k\sum_m\sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\Lambda_0(m-k) + 2\alpha_0^2\vartheta_2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2| \\
&= |\Lambda_0|\sum_m\sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m) + 2\alpha_0^2\vartheta_2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|,
\end{aligned}$$

где $|\vartheta_1|, |\vartheta_2| \leqslant 1$. Применяя (4.28), находим

$$|\sigma^*| < \eta|\Lambda''|^2|\Lambda_0|\,|\Lambda_0 \cap E_1|\,|\Lambda_2 \cap E_2| + 4\alpha_0^2|\Lambda''|^2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|. \tag{4.31}$$

Если зафиксировать j, то в неравенстве (4.29) переменная k пробегает множество $-\Lambda_0 + j + \Lambda''$. Ясно, что мощность этого множества не превосходит $(1+\alpha_0^2)|\Lambda'|$. Следовательно, заменяя в (4.31) член $4\alpha_0^2|\Lambda''|^2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|$ на $8\alpha_0^2|\Lambda''|^2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|$, мы можем предположить, что в (4.29) переменная k принадлежит множеству $-\Lambda_0 + j$.

Поскольку $l \in B'$, то $\beta_1|\Lambda_0|/2 \leqslant |\Lambda_0 \cap E_1| \leqslant 2\beta_1|\Lambda_0|$. Кроме того, $16\alpha_0^2 < \eta\beta_1\beta_2$. Отсюда имеем

$$\left|\sum_{i\in\Lambda_0}\sum_{j\in\Lambda_2}\sum_{k\in-\Lambda_0+j}\sum_{m}\sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r)\right| \\ < 2\eta|\Lambda''|^2|\Lambda_0|\,|\Lambda_0\cap E_1|\,|\Lambda_2\cap E_2| \leqslant 4\eta\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|. \tag{4.32}$$

Пусть

$$\Omega = \left\{ j \in \Lambda_2 \;\middle|\; \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{k\in\Lambda'+j} |\delta_{\Lambda''+k}(E_2) - \beta_2|^2 \geqslant 4\alpha_0^{1/2} \right\}, \qquad G = \Lambda_2 \setminus \Omega.$$

Так как множество E_2 является (α_0, ε')-равномерным, то $|\Omega| \leqslant 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$. Зафиксируем $i \in \Lambda_0$. Пусть

$$\Omega(i) = \left\{ j \in \Lambda_2 \;\middle|\; \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{k\in-\Lambda_0+j} |\delta_{\Lambda''+i+k}(E_2) - \beta_2|^2 \geqslant 4\alpha_0^{1/2} \right\}, \qquad G(i) = \Lambda_2 \setminus \Omega(i).$$

Поскольку

$$\sum_{k\in-\Lambda_0+j} |\delta_{\Lambda''+i+k}(E_2) - \beta_2|^2 = \sum_{k\in\Lambda'+j+(i-l_0)} |\delta_{\Lambda''+k}(E_2) - \beta_2|^2,$$

то $\Lambda_2 \cap (G + l_0 - i) \subseteq G(i)$. Следовательно, $|\Omega(i)| \leqslant |\Lambda_2| - |\Lambda_2 \cap (G + l_0 - i)|$. Так как $i \in \Lambda_0$, то $a := l_0 - i$ принадлежит Λ'. Применяя лемму 2.7 для множества Бора Λ_2 и его ε-сопровождающего Λ', получаем $(G \cap \Lambda_2^-) + a \subseteq \Lambda_2$ и

$$|\Lambda_2 \cap (G + a)| \geqslant |\Lambda_2 \cap ((G \cap \Lambda_2^-) + a)| \geqslant |(G \cap \Lambda_2^-) + a| = |G \cap \Lambda_2^-| \geqslant |G| - 8\alpha_0^2|\Lambda_2|.$$

Следовательно, $|\Omega(i)| \leqslant 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$.

Поскольку $l_0 \in B'$, то

$$\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{k\in\Lambda'} |\delta_{\Lambda''+k}(E_1 - l_0 \cap \Lambda') - \beta_1|^2 \leqslant 2^6\alpha_0^{1/2}. \tag{4.33}$$

Ясно, что для всех j сумма (4.33) равна сумме

$$\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_{k\in-\Lambda_0+j} |\delta_{\Lambda''+j-k}(E_1 \cap \Lambda_0) - \beta_1|^2.$$

В самом деле,

$$\sum_{k\in-\Lambda_0+j} |\delta_{\Lambda''+j-k}(E_1 \cap \Lambda_0) - \beta_1|^2 = \sum_{k\in\Lambda'+l_0} |\delta_{\Lambda''+k}(E_1 \cap \Lambda' + l_0) - \beta_1|^2 \\ = \sum_{k\in\Lambda'} |\delta_{\Lambda''+k}(E_1 - l_0 \cap \Lambda') - \beta_1|^2.$$

Пусть

$$\Omega_1(i,j) = \bigl\{ k \in -\Lambda_0 + j \colon |\delta_{\Lambda''+i+k}(E_2) - \beta_2| \geqslant 4\alpha_0^{1/8} \bigr\},$$
$$\Omega_2(i,j) = \bigl\{ k \in -\Lambda_0 + j \colon |\delta_{\Lambda''+j-k}(E_1 \cap \Lambda_0) - \beta_1| \geqslant 4\alpha_0^{1/8} \bigr\},$$
$$\Omega_3(i,j) = \Omega_1(i,j) \cup \Omega_2(i,j).$$

Для всех $j \notin \Omega(i)$ имеем $|\Omega_1(i,j)| \leqslant 2\alpha_0^{1/4}|\Lambda'|$. Из неравенства (4.33) вытекает оценка $|\Omega_2(i,j)| \leqslant 4\alpha_0^{1/4}|\Lambda'|$. Следовательно, если $j \notin \Omega(i)$, то $|\Omega_3(i,j)| \leqslant 8\alpha_0^{1/4}|\Lambda'|$.

Поскольку $l_0 \in B'$, то

$$\begin{aligned}\sigma = \sum_{i\in\Lambda_0}\sum_{j\in\Lambda_2}\sum_{k}\sum_{m,u}\nu_i(m-k)\nu_i(u-k)\left|\sum_r \mu_j(k+r)\tilde f_{l_0}(r,m)\tilde f_{l_0}(r,u)\right|^2 \\ \geqslant \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda''|^4|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|,\end{aligned} \tag{4.34}$$

где $\tilde f_{l_0}$ – ограничение функции f на $\lambda_{l_0}\times\Lambda_2$. Зафиксируем j в формуле (4.34). Тогда переменная k будет пробегать множество $-\Lambda_0+j+\Lambda''$. Ясно, что мощность этого множества не превосходит $(1+\alpha_0^2)|\Lambda'|$. Заменив в формуле (4.34) число α на $\alpha/2$, мы можем предполагать, что k пробегает множество $-\Lambda_0+j$. Применяя оценку $|\Omega(i)| \leqslant 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$, находим

$$\begin{aligned}\sigma = \sum_{i\in\Lambda_0}\sum_{j\notin\Omega(i)}\sum_{k}\sum_{m,u}\nu_i(m-k)\nu_i(u-k)\left|\sum_r \mu_j(k+r)\tilde f_{l_0}(r,m)\tilde f_{l_0}(r,u)\right|^2 \\ \geqslant \frac{\alpha}{4}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda''|^4|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Приступим к непосредственному доказательству теоремы. Пусть

$$\begin{aligned}J = \Biggl\{(i,j,k) \mid i\in\Lambda_0,\ j\notin\Omega(i),\ k\notin\Omega_3(i,j)\colon \\ \sum_{m,u}\nu_i(m-k)\nu_i(u-k)\left|\sum_r \mu_j(k+r)\tilde f_{l_0}(r,m)\tilde f_{l_0}(r,u)\right|^2 \geqslant \frac{\alpha}{64}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda''|^4\Biggr\}.\end{aligned}$$

Применяя (4.35), находим

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\Lambda_0}\sum_{j\notin\Omega(i)}\sum_{k\notin\Omega_3(i,j)}\sum_{m,u}\nu_i(m-k)\nu_i(u-k)\left|\sum_r \mu_j(k+r)\tilde f_{l_0}(r,m)\tilde f_{l_0}(r,u)\right|^2 \\ \geqslant \frac{\alpha}{8}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda''|^4|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j,k)\in J}\sum_{m,u}\nu_i(m-k)\nu_i(u-k)\left|\sum_r \mu_j(k+r)\tilde f_{l_0}(r,m)\tilde f_{l_0}(r,u)\right|^2 \\ \geqslant \frac{\alpha}{16}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda''|^4|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|.\end{aligned} \tag{4.37}$$

Оценим мощность множества J. Для любой тройки (i,j,k) из J выполнено

$$\|E_2\cap(\nu_i+k)|-\beta_2|\Lambda''\| \leqslant 4\alpha_0^{1/8}|\Lambda''|, \qquad \|(E_1\cap\Lambda_0)\cap(\mu_j-k)|-\beta_1|\Lambda''\| \leqslant 4\alpha_0^{1/8}|\Lambda''|.$$

Применяя неравенство (4.37), получаем

$$32|J|\,|\Lambda''|^4\beta_1^2\beta_2^2 \geqslant \frac{\alpha}{16}\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda''|^4|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|. \tag{4.38}$$

Отсюда имеем $|J| \geqslant 2^{-12}\alpha|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|$.

Предположим, что для всех $(i,j,k) \in J$ выполнено

$$\sum_m \sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r) < -2^{15}\frac{\eta}{\alpha}\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2. \tag{4.39}$$

Применяя неравенство (4.32), находим

$$\sum_{(i,j,k)\in\bar J} \sum_m \sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r) \geqslant 4\eta\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|, \tag{4.40}$$

где $\bar J = \{(i,j,k)\colon (i,j,k) \in (\Lambda_0 \times \Lambda_2 \times (-\Lambda_0 + j)) \setminus J\}$. Поскольку $|\Omega(i)| \leqslant 8\alpha_0^{1/2}|\Lambda_2|$, $i \in \Lambda_0$, то

$$\sum_{(i,j,k)\in\bar J, j\notin\Omega(i)} \sum_m \sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r) \geqslant 2\eta\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2|\Lambda_0|^2|\Lambda_2|. \tag{4.41}$$

Следовательно, существуют i и j, $j \notin \Omega(i)$, такие, что

$$\sum_{k\in Q(i,j)} \sum_m \sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r) \geqslant \frac{\eta}{2}\beta_1\beta_2|\Lambda'|^2|\Lambda_0|, \tag{4.42}$$

где $Q(i,j)$ – подмножество множества $-\Lambda_0 + j$. Так как $j \notin \Omega(i)$, то $|\Omega_3(i,j)| \leqslant 8\alpha_0^{1/4}|\Lambda'|$. Следовательно,

$$\sum_{k\in Q(i,j)\setminus\Omega_3(i,j)} \sum_m \sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r) \geqslant \frac{\eta}{4}\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2|\Lambda_0|. \tag{4.43}$$

Отсюда найдется $k \notin \Omega_3(i,j)$ такое, что

$$\sum_m \sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r) \geqslant \frac{\eta}{8}\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2. \tag{4.44}$$

Положим $\tilde\Lambda = \Lambda''$, $\vec y = (j-k, k+i)$ и $F_1 = (\tilde\Lambda + y_1)\cap(E_1\cap\Lambda_0)$, $F_2 = (\tilde\Lambda + y_2)\cap E_2$. Поскольку $k \notin \Omega_3(i,j)$, то $\beta_1|\Lambda''|/2 \leqslant |F_1| \leqslant 2\beta_1|\Lambda''|$, $\beta_2|\Lambda''|/2 \leqslant |F_2| \leqslant 2\beta_2|\Lambda''|$. Применяя эти оценки и неравенство (4.44), получаем

$$\begin{aligned}
|A\cap(F_1\times F_2)| &= \bigl|A\cap(((\mu_j-k)\cap\Lambda_0)\times((\nu_i+k)\cap\Lambda_2))\bigr| \\
&\geqslant \delta|(\mu_j-k)\cap E_1\cap\Lambda_0|\,|(\nu_i+k)\cap E_2| + \frac{\eta}{8}\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2 \\
&\geqslant \left(\delta + \frac{\eta}{32}\right)|F_1|\,|F_2|.
\end{aligned}$$

Следовательно, если для всех $(i,j,k) \in J$ выполнено (4.39), то теорема доказана.

Предположим теперь, что найдется тройка $(i,j,k) \in J$ такая, что

$$\sum_m \sum_{r\in\Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r) \geqslant -2^{15}\frac{\eta}{\alpha}\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2. \tag{4.45}$$

Мы можем предположить, что для всех $(i,j,k) \in J$ выполнено

$$\left| \sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r) \right| \leqslant 2^{15}\frac{\eta}{\alpha}\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2. \tag{4.46}$$

В самом деле, если

$$\sum_m \sum_{r \in \Lambda_0} f(r,m)\nu_i(m-k)\mu_j(k+r) > 2^{15}\frac{\eta}{\alpha}\beta_1\beta_2|\Lambda''|^2,$$

то мы применяем рассуждения, использованные выше. Для множеств $\tilde{\Lambda}_1 = \Lambda''$, $\tilde{\Lambda}_2 = \Lambda''$, вектора $\vec{y} = (j-k, k+i)$ и множеств $F_1 = (\tilde{\Lambda}_1 + y_1) \cap (E_1 \cap \Lambda_0)$, $F_2 = (\tilde{\Lambda}_2 + y_2) \cap E_2$ выполнено $|F_1| \geqslant \beta_1|\tilde{\Lambda}_1|/2$, $|F_2| \geqslant \beta_2|\tilde{\Lambda}_2|/2$ и

$$|A \cap (F_1 \times F_2)| \geqslant \left(\delta + 2^6\frac{\eta}{\alpha}\right)|F_1|\,|F_2|.$$

Поскольку $(i,j,k) \in J$, то выполнено неравенство

$$\sum_{m,u \in \nu_i + k} \left| \sum_{r \in \mu_j - k} \tilde{f}_{l_0}(r,m)\tilde{f}_{l_0}(r,u) \right|^2 \geqslant 2^{-6}\alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda''|^4. \tag{4.47}$$

Заметим, что в формуле (4.47) переменные m, u принадлежат множеству $\nu_i + k \cap \Lambda_2$, а переменная r – множеству $\mu_j - k \cap \Lambda_0$. Положим $\mathcal{L}_1 = \mu_j - k \cap \Lambda_0$, $\mathcal{L}_2 = \nu_i + k \cap \Lambda_2$, $E_1' = E_1 \cap \mathcal{L}_1$ и $E_2' = E_2 \cap \mathcal{L}_2$. Можно считать, что в формуле (4.47) функция $\tilde{f}_{l_0}$ равна нулю вне $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$. Пусть $A_1 = A \cap (\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2)$, $\delta_1 = \delta_{E_1' \times E_2'}(A)$ и f_1 – балансовая функция множества A_1. Применяя (4.46), получаем $|\delta_1 - \delta| \leqslant 2^{20}\frac{\eta}{\alpha}$. Имеем $k \notin \Omega_3(i,j)$. Отсюда

$$\|\tilde{f}_{l_0} - f_1\|^4 = |E_1'|^2|E_2'|^2(\delta_1 - \delta)^2 \leqslant 2^{44}\beta_1^2\beta_2^2\frac{\eta^2}{\alpha^2}|\Lambda''|^4. \tag{4.48}$$

Применяя лемму 3.5, находим

$$\sum_{m,u \in \nu_i + k} \left| \sum_{r \in \mu_j - k} f_1(r,m)f_1(r,u) \right|^2 \geqslant 2^{-7}\alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda''|^4. \tag{4.49}$$

Поскольку $k \notin \Omega_3(i,j)$, то $2^{-1}\beta_1|\Lambda''| \leqslant |E_1'| \leqslant 2\beta_1|\Lambda''|$, $2^{-1}\beta_2|\Lambda''| \leqslant |E_2'| \leqslant 2\beta_2|\Lambda''|$. Следовательно,

$$\sum_{m,u \in \nu_i + k} \left| \sum_{r \in \mu_j - k} f_1(r,m)f_1(r,u) \right|^2 \geqslant 2^{-11}\alpha|E_1'|^2|E_2'|^2. \tag{4.50}$$

Применяя предложение 4.3, получаем множества $F_1 \subseteq E_1' \subseteq \mu_j - k$, $F_2 \subseteq E_2' \subseteq \nu_i + k$ такие, что

$$\begin{aligned} |A \cap (F_1 \times F_2)| &\geqslant |A_1 \cap (F_1 \times F_2)| \geqslant \left(\delta_1 + 2^{-37}\frac{\alpha^2}{\delta_1^5}\right)|F_1|\,|F_2| \\ &\geqslant \left(\delta + 2^{-40}\frac{\alpha^2}{\delta^5}\right)|F_1|\,|F_2| \geqslant (\delta + 2^{-240}\delta^{13})|F_1|\,|F_2|, \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$|F_i| \geqslant 2^{-40}\frac{\alpha^2}{\delta^5}|E_i'| \geqslant 2^{-300}\delta^{13}\beta_i|\Lambda''|, \qquad i = 1,2.$$

Положим $\tilde{\Lambda} = \Lambda''$, $\vec{y} = (j-k, k+i)$ и $F_1 = (\tilde{\Lambda}_1+y_1)\cap(E_1\cap\Lambda_0)$, $F_2 = (\tilde{\Lambda}_2+y_2)\cap E_2$. Множества $\tilde{\Lambda}$ и F_1, F_2 удовлетворяют неравенствам (4.19), (4.20). Теорема доказана.

§ 5. О плотных подмножествах множеств Бора

Следующие леммы были доказаны в [15].

Лемма 5.1. *Пусть Λ – множество Бора, Λ' – некоторое ε-сопровождающее множества Λ, $\varepsilon = \kappa/(100d)$ и Q – подмножество множества Λ. Пусть $g\colon 2^G \times (G\times G) \to \mathbf{D}$ – функция такая, что $g(\Lambda, \vec{x}) := \delta^2_{\Lambda_{\vec{x}}}(Q)$. Тогда*

$$\frac{1}{|\Lambda|^2}\sum_{\vec{x}\in\Lambda} g(\Lambda', \vec{x}) \geqslant g(\Lambda, 0) - 8\kappa. \tag{5.1}$$

Лемма 5.2. *Пусть Λ – множество Бора, Λ' – некоторое ε-сопровождающее множества Λ, $\varepsilon = \kappa/(100d)$, $\alpha > 0$ – действительное число и Q – подмножество множества Λ, $|Q| = \delta|\Lambda|$. Предположим, что*

$$\frac{1}{|\Lambda|^2}\sum_{\vec{n}\in\Lambda} |\delta_{\Lambda'_{\vec{n}}}(Q) - \delta|^2 \geqslant \alpha. \tag{5.2}$$

Тогда

$$\sum_{\vec{n}\in\Lambda} \delta^2_{\Lambda'_{\vec{n}}}(Q) \geqslant \delta^2 + \alpha - 4\kappa. \tag{5.3}$$

Замечание 5.3. Ясно, что справедливы и одномерные аналоги леммы 5.1 и леммы 5.2.

Также в работе [15] было доказано следствие.

Следствие 5.4. *Пусть Λ – множество Бора, $\alpha > 0$ – действительное число и E_1, E_2 – некоторые множества, $|E_1\cap\Lambda| = \beta_1|\Lambda|$, $|E_2\cap\Lambda| = \beta_2|\Lambda|$. Предположим, что либо для множества E_1, либо для множества E_2 не выполнено неравенство (3.13). Пусть также Λ' – произвольное $(2^{-10}\alpha^2\beta_1^2\beta_2^2/(100d))$-сопровождающее множества Λ. Тогда*

$$\frac{1}{|\Lambda|^2}\sum_{\vec{n}\in\Lambda} \delta^2_{\Lambda'_{\vec{n}}}(E_1\times E_2) \geqslant \beta_1^2\beta_2^2\biggl(1+\frac{\alpha^2}{2}\biggr). \tag{5.4}$$

Следующая лемма была доказана Ж. Бургеном в [27]. Для полноты изложения мы приведем ее доказательство.

Лемма 5.5. *Пусть $\Lambda = \Lambda(S,\varepsilon)$ – множество Бора, $|S| = d \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ – действительное число и Q – множество, $|Q\cap\Lambda| = \delta|\Lambda|$. Предположим, что*

$$\|(Q\cap\Lambda - \delta\Lambda)\widehat{\ }\|_\infty \geqslant \alpha|\Lambda|. \tag{5.5}$$

Тогда существует множество Бора $\Lambda' = \Lambda(S', \varepsilon')$, $|S'| = d+1$, такое, что Λ' является ε_1-сопровождающим множества Λ, $\varepsilon_1 = \kappa/(100d)$, $\kappa \leqslant \alpha/32$ и

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{n\in\Lambda} |\delta_{\Lambda'+n}(Q) - \delta|^2 \geqslant \frac{\alpha^2}{4}. \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть $Q_1 = Q \cap \Lambda$. Применяя неравенство (5.5), получаем

$$|\widehat{Q}_1(\xi_0) - \delta\hat{\Lambda}(\xi_0)| \geqslant \alpha|\Lambda|, \tag{5.7}$$

где $\xi_0 \in \widehat{G}$. Имеем $\Lambda = \Lambda_{S,\varepsilon}$, причем $S \subseteq \widehat{G}$. Положим $S' = S \cup \{\xi_0\} \subseteq \widehat{G}$, и пусть $\Lambda' = \Lambda_{S',\varepsilon'}$ – некоторое ε_1-сопровождающее множества Λ. Применяя лемму 2.7, находим

$$\widehat{Q}_1(\xi_0) = \sum_n Q(n)\Lambda(n)e^{-2\pi i(\xi_0\cdot n)} = \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_n (\Lambda * \Lambda')(n)Q(n)e^{-2\pi i(\xi_0\cdot n)} + 2\kappa\vartheta|\Lambda|,$$

где $|\vartheta| \leqslant 1$. Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_1(\xi_0) &= \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_m\sum_n \Lambda'(n-m)\Lambda(m)Q(n)e^{-2\pi i(\xi_0\cdot n)} + 2\kappa\vartheta|\Lambda| \\ &= \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_m\sum_n \Lambda'(n-m)\Lambda(m)Q(n)e^{-2\pi i(\xi_0\cdot m)} \\ &\quad + \frac{1}{|\Lambda'|}\sum_m\sum_n \Lambda'(n-m)\Lambda(m)Q(n)[e^{-2\pi i(\xi_0\cdot n)} - e^{-2\pi i(\xi_0\cdot m)}] + 2\kappa\vartheta|\Lambda| \\ &= \sum_{m\in\Lambda} \delta_{\Lambda'+m}(Q)e^{-2\pi i(\xi_0\cdot m)} \\ &\quad + \vartheta_1\frac{1}{|\Lambda'|}\sum_m\sum_n \Lambda'(n-m)\Lambda(m)Q(n)|e^{-2\pi i(\xi_0\cdot(n-m))} - 1| + 2\kappa\vartheta|\Lambda| \\ &= \sum_{m\in\Lambda} \delta_{\Lambda'+m}(Q)e^{-2\pi i(\xi_0\cdot m)} + (14\kappa\vartheta_1 + 2\kappa\vartheta)|\Lambda|, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $|\vartheta_1| \leqslant 1$. Применяя неравенства (5.5) и (5.8), получаем

$$\left|\sum_{m\in\Lambda} \delta_{\Lambda'+m}(Q)e^{-2\pi i(\xi_0\cdot m)} - \delta\sum_{m\in\Lambda} e^{-2\pi i(\xi_0\cdot m)}\right| \geqslant \frac{\alpha}{2}|\Lambda|. \tag{5.9}$$

Следовательно,

$$\sum_{m\in\Lambda} |\delta_{\Lambda'+m}(Q) - \delta| \geqslant \frac{\alpha}{2}|\Lambda|. \tag{5.10}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, окончательно находим

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{\vec{n}\in\Lambda} |\delta_{\Lambda'_{\vec{n}}}(Q) - \delta|^2 \geqslant \frac{\alpha^2}{4}. \tag{5.11}$$

Лемма доказана.

Следствие 5.6. *Пусть $\Lambda = \Lambda(S,\varepsilon)$ – множество Бора, $\alpha > 0$ – действительное число и E_1, E_2 – некоторые множества, $|E_1 \cap \Lambda| = \beta_1|\Lambda|$, $|E_2 \cap \Lambda| = \beta_2|\Lambda|$. Предположим, что либо для E_1, либо для E_2 выполнено неравенство* (5.5). *Тогда существует множество Бора $\Lambda' = \Lambda(S',\varepsilon')$, $\varepsilon' = (2^{-10}\alpha^2\beta_1^2\beta_2^2)/(100d)$, являющееся ε'-сопровождающим множества Λ и такое, что*

$$\frac{1}{|\Lambda|^2}\sum_{\vec{n}\in\Lambda} \delta^2_{\Lambda'_{\vec{n}}}(E_1 \times E_2) \geqslant \beta_1^2\beta_2^2\left(1 + \frac{\alpha^2}{8}\right), \tag{5.12}$$

$$|S'| = d + 1. \tag{5.13}$$

Доказательство. Пусть $\vec{n} = (x, y)$ и $\kappa = 2^{-10}\alpha^2\beta_1^2\beta_2^2$. Имеем

$$\frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n}\in\Lambda} \delta^2_{\Lambda'_{\vec{n}}}(E_1 \times E_2) = \left(\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x\in\Lambda} \delta^2_{\Lambda'+x}(E_1)\right)\left(\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{y\in\Lambda} \delta^2_{\Lambda'+y}(E_2)\right). \tag{5.14}$$

Без ограничения общности можно считать, что неравенство (5.5) справедливо для множества E_1. Применяя лемму 5.5 и лемму 5.2, получаем

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x\in\Lambda} \delta^2_{\Lambda'+x}(E_1) \geqslant \beta_1^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 4\kappa. \tag{5.15}$$

Оценим второй член в (5.14). Применяя лемму 5.1, находим

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{y\in\Lambda} \delta^2_{\Lambda'+y}(E_2) \geqslant \beta_2^2 - 8\kappa. \tag{5.16}$$

Объединяя (5.15) и (5.16), получаем

$$\frac{1}{|\Lambda|^2} \sum_{\vec{n}\in\Lambda} \delta^2_{\Lambda'_{\vec{n}}}(E_1 \times E_2) \geqslant \left(\beta_1^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 4\kappa\right)(\beta_2^2 - 8\kappa) \geqslant \beta_1^2\beta_2^2\left(1 + \frac{\alpha^2}{8}\right).$$

Следствие доказано.

Будем говорить, что множество S' из (5.13) было получено из следствия 5.6.

Ясно, что все доказанные леммы применимы и для трансляций множеств Бора.

В наших дальнейших рассуждениях мы следуем работе [15].

Пусть $\mathbf{\Lambda}$ – объединение семейства множеств Бора $\Lambda_0^*, \Lambda_1^*(\vec{x}_0), \dots, \Lambda_n^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-1})$ и семейства некоторых трансляций множеств Бора $\Lambda_0, \Lambda_1(\vec{x}_0), \dots, \Lambda_n(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-1})$ такое, что множества $\Lambda_1(\vec{x}_0)$ и $\Lambda_1^*(\vec{x}_0)$ определены тогда и только тогда, когда $\vec{x}_0 \in \Lambda_0$; множества $\Lambda_2(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ и $\Lambda_2^*(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ определены тогда и только тогда, когда $\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)$, $\vec{x}_0 \in \Lambda_0$; $\dots$; множества $\Lambda_n(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-1})$ и $\Lambda_n^*(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-1})$ определены тогда и только тогда, когда

$$\vec{x}_{n-1} \in \Lambda_{n-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-2}), \qquad \vec{x}_{n-2} \in \Lambda_{n-2}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{n-3}), \qquad \dots, \qquad \vec{x}_0 \in \Lambda_0. \tag{5.17}$$

Пусть $m \geqslant 0$ – целое число и $\mathbf{\Lambda}$ – семейство множеств Бора, для которых выполнено (5.17). Пусть $g\colon 2^G \times (G \times G) \to \mathbf{D}$ – некоторая функция. Для всех $k = 0, \dots, m$ определим *индекс* функции g относительно $\mathbf{\Lambda}$ по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_k(\mathbf{\Lambda})(g) = \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0\in\Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1\in\Lambda_1(\vec{x}_0)} \dots \\ \dots \sum_{\vec{x}_k\in\Lambda_k(x_1,\dots,x_{k-1})} \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y}\in\Lambda_k(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{k-1})} g(\Lambda_k^*(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{k-1}), \vec{y}). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Пусть $M_k = M_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ – произвольное семейство множеств таких, что $M_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) \subseteq \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ для всех $(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$. Для любого

$k=0,\dots,m$ величина $\operatorname{ind}_k(\mathbf{\Lambda},M)(g)$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{ind}_k(\mathbf{\Lambda},M)(g)=\frac{1}{|\Lambda_0|^2}\sum_{\vec{x}_0\in\Lambda_0}\frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2}\sum_{\vec{x}_1\in\Lambda_1(\vec{x}_0)}\dots$$
$$\dots\sum_{\vec{x}_k\in\Lambda_k(x_1,\dots,x_{k-1})}\frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{k-1})|^2}\sum_{\vec{y}\in M_k(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{k-1})}g(\Lambda_k^*(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{k-1}),\vec{y}). \tag{5.19}$$

Ясно, что для всех целых $k\geqslant 0$, любого семейства M_k и произвольной функции $g\colon 2^G\times(G\times G)\to\mathbf{D}$ выполнено $|\operatorname{ind}_k(\mathbf{\Lambda},M)(g)|\leqslant 1$.

Следующая лемма была доказана в [15].

Лемма 5.7. *Пусть Q – подмножество множества $\Lambda_0\times\Lambda_0$ и $|Q|=\delta|\Lambda_0|^2$. Пусть $\Lambda_k^*(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{k-1})$ – некоторое ε-сопровождающее множества $\Lambda_k(\vec{x}_0,\dots$ $\dots,\vec{x}_{k-1})$, $\varepsilon=\kappa/(100d)$, и $g(M,\vec{x})=\delta_{M+\vec{x}}(Q)$. Тогда для всех $k=0,\dots,n$ выполнено*
$$|\operatorname{ind}_k(\mathbf{\Lambda})(g)-\delta|\leqslant 4\kappa(k+1). \tag{5.20}$$

Следующий результат является основным в настоящем параграфе.

Предложение 5.8. *Пусть $\Lambda=\Lambda(S,\varepsilon_0)$ – множество Бора, $|S|=d$ и $\vec{s}=(s_1,s_2)$ – некоторый вектор. Пусть $\varepsilon,\sigma,\tau,\delta\in(0,1)$ – действительные числа, E_1, E_2 – некоторые множества, $E_i=\beta_i|\Lambda|$, $i=1,2$. Предположим, что $\mathbf{E}=E_1\times E_2$ – произвольное подмножество множества $(\Lambda+s_1)\times(\Lambda+s_2)$, $A\subset\mathbf{E}$, $\delta_{\mathbf{E}}(A)=\delta+\tau$ и $\varepsilon\leqslant\kappa/(100d)$, $\kappa=2^{-100}(\tau\beta_1\beta_2)^5\sigma^3$. Пусть*
$$N\geqslant(2^{-100}\varepsilon_0\varepsilon)^{-2^{100}((\tau\beta_1\beta_2)^{-5}\sigma^{-3}+d)^2} \tag{5.21}$$
и $\sigma\leqslant 2^{-100}\tau\beta_1\beta_2$. Тогда существуют множество Бора $\Lambda'=\Lambda(S',\varepsilon')$, $|S'|=D$, $D\leqslant 2^{30}(\tau\beta_1\beta_2)^{-5}\sigma^{-3}+d$, $\varepsilon'\geqslant(2^{-10}\varepsilon)^D\varepsilon_0$, и вектор $\vec{t}=(t_1,t_2)$ такие, что для множеств $E_1'=(E_1-t_1)\cap\Lambda'$, $E_2'=(E_2-t_2)\cap\Lambda'$, $\mathbf{E}'=E_1'\times E_2'$ выполнено:
1) $|\mathbf{E}'|\geqslant\beta_1\beta_2\tau|\Lambda'|/16$;
2) E_1', E_2' *являются (σ,ε)-равномерными подмножествами в Λ';*
3) $\delta_{\mathbf{E}'}(A-\vec{t})\geqslant\delta+\tau/16$.

Доказательство. Пусть $\beta=\beta_1\beta_2$ и $\widetilde{E}_1=E_1-s_1$, $\widetilde{E}_2=E_2-s_2$, $\widetilde{E}=\widetilde{E}_1\times\widetilde{E}_2$. Если множества $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{E}_2$ являются (σ,ε)-равномерными подмножествами множества Λ, то предложение доказано.

Предположим, что $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{E}_2$ не являются (σ,ε)-равномерными подмножествами множества Λ. Построим семейство множеств Бора $\mathbf{\Lambda}$, удовлетворяющее включениям (5.17). Доказательство предложения представляет собой алгоритм. На нулевом шаге нашего алгоритма положим $\Lambda_0=\Lambda=\Lambda(S,\varepsilon_0)$. Если множество $\widetilde{E}_1$ или множество $\widetilde{E}_2$ не удовлетворяет неравенству (3.14) с $\alpha=\sigma/2$, то пусть Λ_0^* есть ε-сопровождающее множества Λ_0, полученное из следствия 5.6. В остальных случаях пусть Λ_0^* – произвольное ε-сопровождающее множества Λ_0 с тем же самым множеством S. Пусть также $R_0=\bigl\{\vec{p}=(p_1,p_2)\in\Lambda_0\mid\widetilde{E}_1-p_1,\widetilde{E}_2-p_2$ являются (σ,ε)-равномерными в Λ_0^* или $\delta_{(\Lambda_0^*+p_1)\times(\Lambda_0^*+p_2)}(\widetilde{E}_1\times\widetilde{E}_2)<\beta\tau/16\bigr\}$ и $\overline{R}_0=(\Lambda_0\times\Lambda_0)\setminus R_0$.

Пусть $\tilde{\Lambda}$ – произвольное множество Бора и $\vec{n}\in G\times G$ – любой вектор. Положим $g(\tilde{\Lambda},\vec{n})=\delta^2_{\tilde{\Lambda}_{\vec{n}}}(\widetilde{E})$, $g_1(\tilde{\Lambda},\vec{x})=\delta_{\tilde{\Lambda}_{\vec{n}}}(A)$, $g_2(\tilde{\Lambda},\vec{n})=\delta_{\widetilde{E}\cap\tilde{\Lambda}_{\vec{n}}}(A)$ и

$g_3(\tilde\Lambda,\vec n) = \delta_{\tilde\Lambda_{\vec n}}(\widetilde E)$. Ясно, что $g(\tilde\Lambda,\vec n) = g_3^2(\tilde\Lambda,\vec n)$ и $g_1(\tilde\Lambda,\vec x) \leqslant g_3(\tilde\Lambda,\vec n)$. Кроме того, выполнено

$$g_1(\tilde\Lambda,\vec n) = g_2(\tilde\Lambda,\vec n)g_3(\tilde\Lambda,\vec n).$$

Пусть $\mathbf{\Lambda}_0 = \{\Lambda_0\}$. Если $\mathrm{ind}_0(\mathbf{\Lambda}_0,\overline{R}_0)(g_3) < \tau\beta/4$, то мы останавливаем наш алгоритм на нулевом шаге.

Применяя лемму 2.10 и неравенство Коши–Буняковского, находим

$$\mathrm{ind}_0(\mathbf{\Lambda}_0)(g) \geqslant \left(\frac{1}{|\Lambda_0|^2}\sum_{y_1,y_2\in\Lambda_0}\delta_{(\Lambda_0^*+y_1)\times(\Lambda_0^*+y_2)}(\widetilde E)\right)^2 \geqslant \frac{\beta}{2}. \tag{5.22}$$

Предположим, что на k-м шаге алгоритма, $k\geqslant 0$, мы построили семейство множеств Бора $\mathbf{\Lambda}_k$. Пусть

$$\Lambda_{k+1}(\vec x_0,\dots,\vec x_k) = \Lambda_k^*(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1})_{\vec x_k}, \qquad \vec x_k\in\Lambda_k(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1}).$$

Пусть также $\vec x_k = (a,b)$ и $\Lambda_k^* = \Lambda_k^*(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1})$. В случае, если множество $(\widetilde E_1 - a)\cap\Lambda_k^*$ или множество $(\widetilde E_2 - b)\cap\Lambda_k^*$ не удовлетворяет неравенству (3.14) с $\alpha = \sigma/2$, пусть $\Lambda_{k+1}^*(\vec x_0,\dots,\vec x_k)$ – произвольное ε-сопровождающее множества $\Lambda_k^*(\vec x_0,\dots,\vec x_k)$ такое, что множество $\Lambda_{k+1}^*(\vec x_0,\dots,\vec x_k)$ получено в результате применения следствия 5.6. В остальных случаях пусть $\Lambda_{k+1}^*(\vec x_0,\dots,\vec x_k)$ – произвольное ε-сопровождающее множества $\Lambda_k^*(\vec x_0,\dots,\vec x_k)$ с тем же самым порождающим множеством.

Обозначим через $R_{k+1}(\vec x_0,\dots,\vec x_k)$, $\overline{R}_{k+1}(\vec x_0,\dots,\vec x_k)$ множества $R_{k+1}(\vec x_0,\dots,\vec x_k) = \bigl\{\vec p = (p_1,p_2)\in\Lambda_k^*(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1})_{\vec x_k} \mid \widetilde E_1 - p_1, \widetilde E_2 - p_2$ являются (σ,ε)-равномерными в $\Lambda_{k+1}^*(\vec x_0,\dots,\vec x_k)$ или $\delta_{\Lambda_{k+1}^*(\vec x_0,\dots,\vec x_k)_{\vec p}}(\widetilde E_1\times\widetilde E_2) < \tau\beta/16\bigr\}$ и $\overline{R}_{k+1}(\vec x_0,\dots,\vec x_k) = (\Lambda_k^*(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1})_{\vec x_k})\setminus R_{k+1}(\vec x_0,\dots,\vec x_k)$ соответственно. Пусть также

$$\begin{aligned}&E_k(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1})\\ &\quad=\bigl\{\vec p=(p_1,p_2)\in\Lambda_{k-1}^*(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-2})_{\vec x_{k-1}} \mid \delta_{\Lambda_k^*(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1})_{\vec p}}(\widetilde E_1\times\widetilde E_2)<\tau\beta/16\bigr\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что $E_k(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1})\subseteq R_k(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1})$, $k=0,1,\dots$.

Пусть $\mathbf{\Lambda}'_{k+1} = \{\Lambda_{k+1}(\vec x_0,\dots,\vec x_k)\}$, $\vec x_k\in\Lambda_k(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-1})$, и $\mathbf{\Lambda}_{k+1} = \{\mathbf{\Lambda}_k,\mathbf{\Lambda}'_{k+1}\}$. Если $\mathrm{ind}_{k+1}(\mathbf{\Lambda}_{k+1},\overline{R}_{k+1})(g_3) < \tau\beta/4$, то мы останавливаем алгоритм на $(k+1)$-м шаге.

Пусть $\Lambda_{k-1}^* = \Lambda_{k-1}^*(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-2})$ и $\beta'_k = \delta_{\Lambda_{k-1}^*}(\widetilde E_1)$, $\beta''_k = \delta_{\Lambda_{k-1}^*}(\widetilde E_2)$. Предположим, что $\vec x_{k-1} = (a',b')$ принадлежит $\overline{R}_{k-1}(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-2})$. Тогда вектор $\vec x_{k-1}$ не принадлежит $E_{k-1}(\vec x_0,\dots,\vec x_{k-2})$. Рассмотрим три ситуации:

1) либо множество $(\widetilde E_1 - a')\cap\Lambda_{k-1}^*$, либо множество $(\widetilde E_2 - b')\cap\Lambda_{k-1}^*$ не удовлетворяет (3.12);

2) либо множество $(\widetilde E_1 - a')\cap\Lambda_{k-1}^*$, либо множество $(\widetilde E_2 - b')\cap\Lambda_{k-1}^*$ не удовлетворяет (3.13);

3) либо множество $(\widetilde E_1 - a')\cap\Lambda_{k-1}^*$, либо множество $(\widetilde E_2 - b')\cap\Lambda_{k-1}^*$ не удовлетворяет (3.14).

Заметим, что во всех трех случаях число α равно σ.

Рассмотрим следующую ситуацию: либо множество $(\widetilde{E}_1 - a') \cap \Lambda^*_{k-1}$, либо множество $(\widetilde{E}_2 - b') \cap \Lambda^*_{k-1}$ не удовлетворяет (3.14) с $\alpha = 2^{-4}\sigma^{3/2}$. Пусть

$$S_0 = \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}), \tag{5.23}$$

где $\Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ – некоторое ε-сопровождающее множества $\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$, полученное в результате применения следствия 5.6. Используя это следствие, находим

$$\begin{aligned} S_0 &\geqslant g(\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), 0)(1 + 2^{-11}\sigma^3) \\ &= g(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-11}\sigma^3). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Заметим, что в этом случае выполнено

$$\dim \Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) = \dim \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) + 1.$$

Предположим, что либо множество $(\widetilde{E}_1 - a') \cap \Lambda^*_{k-1}$, либо множество $(\widetilde{E}_2 - b') \cap \Lambda^*_{k-1}$ не удовлетворяет (3.13) с $\alpha = 2^{-4}\sigma^{3/2}$. Применяя следствие 5.4, получаем

$$S_0 \geqslant g(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-11}\sigma^3) \tag{5.25}$$

и, кроме того, $\dim \Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) = \dim \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$.

Наконец, предположим, что либо множество $(\widetilde{E}_1 - a') \cap \Lambda^*_{k-1}$, либо множество $(\widetilde{E}_2 - b') \cap \Lambda^*_{k-1}$ не удовлетворяет (3.12) с $\alpha = \sigma$. Заметим, что для множеств $(\widetilde{E}_1 - a') \cap \Lambda^*_{k-1}$ *и* $(\widetilde{E}_2 - b') \cap \Lambda^*_{k-1}$ выполнено неравенство (3.13) с $\alpha = 2^{-4}\sigma^{3/2}$. Пусть $\Lambda^*_k = \Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$. Положим

$$\begin{aligned} B_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) = \bigl\{ &\vec{p} = (p_1, p_2) \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) \colon \\ &\|((\widetilde{E}_1 - p_1) - \beta'_k \Lambda^*_k)\widehat{\ }\|_\infty \geqslant \sigma |\Lambda^*_k| \text{ или } \|((\widetilde{E}_2 - p_2) - \beta''_k \Lambda^*_k)\widehat{\ }\|_\infty \geqslant \sigma |\Lambda^*_k| \bigr\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$|B_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})| \geqslant \sigma |\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2. \tag{5.26}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) = \Bigl\{ &\vec{p} = (p_1, p_2) \in B_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) \colon \\ &|\delta_{\Lambda^*_k}(\widetilde{E}_1 - p_1) - \beta'_k| \leqslant \frac{\sigma}{8},\ |\delta_{\Lambda^*_k}(\widetilde{E}_2 - p_2) - \beta''_k| \leqslant \frac{\sigma}{8} \Bigr\}. \end{aligned}$$

Для всех $\vec{p} \in \widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ выполнено следующее: либо множество $(\widetilde{E}_1 - p_1) \cap \Lambda^*_k$, либо множество $(\widetilde{E}_2 - p_2) \cap \Lambda^*_k$ не является $(\sigma/2)$-равномерным. Для множеств $(\widetilde{E}_1 - a') \cap \Lambda^*_{k-1}$ и $(\widetilde{E}_2 - b') \cap \Lambda^*_{k-1}$ справедливо неравенство (3.13) с $\alpha = 2^{-4}\sigma^{3/2}$. Отсюда имеем

$$|\widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})| \geqslant \frac{\sigma}{2} |\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2. \tag{5.27}$$

Предположим, что
$$g_3(\Lambda^*_{k-1}, \vec{x}_{k-1}) = \beta'_k \beta''_k \geqslant \frac{\tau\beta}{8}\,. \tag{5.28}$$
Из неравенства (5.28) вытекает, что для всех $\vec{p} \in \widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$ выполнено
$$g_3(\Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{p}\,) \geqslant \beta'_k \beta''_k - \frac{\sigma}{2} \geqslant \frac{\tau\beta}{16}\,. \tag{5.29}$$

Рассмотрим сумму
$$S = S(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) = \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{x}_k \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} \frac{1}{|\Lambda_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)|^2} \times \sum_{\vec{y} \in \Lambda_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)} g(\Lambda^*_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k), \vec{y}\,).$$

Разобьем сумму S на два слагаемых: $S = S' + S''$, причем суммирование в S' идет по $\vec{x}_k \in \widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$, а суммирование в S'' – по $\vec{x}_k \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) \setminus \widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$. Заметим, что если $\vec{x}_k \in \widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})$, то множество Бора $\Lambda^*_{k+1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k)$ получено в результате применения следствия 5.6. Используя это следствие, находим
$$S' \geqslant \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}\,)\biggl(1 + \frac{\sigma^2}{32}\biggr). \tag{5.30}$$

Оценим сумму S''. Применяя лемму 5.1, получаем
$$S'' \geqslant \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}) \setminus \widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}\,) - 8\kappa. \tag{5.31}$$
Объединяя неравенства (5.29)–(5.31) и (5.27), находим
$$\begin{aligned} S &\geqslant \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}\,) \\ &\quad + \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \widetilde{B}_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} 2^{-13}\tau^2\beta^2\sigma^2 - 2^4\kappa \\ &\geqslant \frac{1}{|\Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})|^2} \sum_{\vec{y} \in \Lambda_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1})} g(\Lambda^*_k(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}), \vec{y}\,) + 2^{-14}\tau^2\beta^2\sigma^3 - 2^4\kappa. \end{aligned}$$

Применяя лемму 5.1, получаем
$$\begin{aligned} S &\geqslant g(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) + 2^{-14}\tau^2\beta^2\sigma^3 - 2^5\kappa \\ &\geqslant g(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3 \\ &\geqslant g(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3). \end{aligned} \tag{5.32}$$

С другой стороны, сумма S_0 является оценкой для суммы S. Точнее, применяя лемму 5.1, находим
$$S \geqslant S_0 - 8\kappa.$$

Таким образом, если вектор $\vec{x}_{k-1}$ принадлежит множеству $\overline{R}_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$ и для $\vec{x}_{k-1}$ выполнено (5.28), то мы имеем оценку

$$S \geqslant g(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3) - 8\kappa. \tag{5.33}$$

Теперь предположим, что $\vec{x}_{k-1}$ – произвольный вектор, $\vec{x}_{k-1} \in \Lambda_{k-1}(\vec{x}_0, \dots$ $\dots, \vec{x}_{k-2})$. Дважды применяя лемму 5.1, получаем неравенство

$$S \geqslant g(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) - 16\kappa. \tag{5.34}$$

Оценим величину $\mathrm{ind}_{k+1}(\mathbf{\Lambda}_{k+1})(g)$ снизу. Имеем

$$\mathrm{ind}_{k+1}(\mathbf{\Lambda}_{k+1})(g) = \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \cdots \sum_{\vec{x}_{k-1} \in \Lambda_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} S(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}).$$

По условию $\mathrm{ind}_{k-1}(\mathbf{\Lambda}_{k-1}, \overline{R}_{k-1})(g_3) \geqslant \tau\beta/4$, или

$$\frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \cdots \sum_{\vec{x}_{k-1} \in \overline{R}_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} g_3(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) \geqslant \frac{\tau\beta}{4}. \tag{5.35}$$

Обозначим через $M_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$ множество тех $\vec{x}_{k-1} \in \overline{R}_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})$, для которых справедливо неравенство (5.28). Применяя (5.35), получаем

$$S_M := \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \cdots \sum_{\vec{x}_{k-1} \in M_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} g_3(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) \geqslant \frac{\tau\beta}{8}. \tag{5.36}$$

Применяя неравенства (5.28), (5.33), (5.34) и (5.36), находим

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_{k+1}(\mathbf{\Lambda}_{k+1})(g) &\geqslant \frac{1}{|\Lambda_0|^2} \sum_{\vec{x}_0 \in \Lambda_0} \frac{1}{|\Lambda_1(\vec{x}_0)|^2} \sum_{\vec{x}_1 \in \Lambda_1(\vec{x}_0)} \cdots \\
&\cdots \Biggl\{ \sum_{\vec{x}_{k-1} \in M_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} (g(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1})(1 + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3) - 8\kappa) \\
&+ \sum_{\vec{x}_{k-1} \in \Lambda_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}) \setminus M_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2})} (g(\Lambda^*_{k-1}(\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-2}), \vec{x}_{k-1}) - 16\kappa) \Biggr\} \\
&\geqslant \mathrm{ind}_{k-1}(\mathbf{\Lambda}_{k-1})(g) + 2^{-15}\tau^2\beta^2\sigma^3 \left(\frac{\tau\beta}{8}\right) S_M - 24\kappa \\
&\geqslant \mathrm{ind}_{k-1}(\mathbf{\Lambda}_{k-1})(g) + 2^{-24}\tau^4\beta^4\sigma^3 - 24\kappa \\
&\geqslant \mathrm{ind}_{k-1}(\mathbf{\Lambda}_{k-1})(g) + 2^{-25}\tau^4\beta^4\sigma^3.
\end{aligned}$$

Другими словами, для всех $k \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\mathrm{ind}_{k+1}(\mathbf{\Lambda}_{k+1})(g) \geqslant \mathrm{ind}_{k-1}(\mathbf{\Lambda}_{k-1})(g) + 2^{-25}\tau^4\beta^4\sigma^3. \tag{5.37}$$

Поскольку для всех k выполнено $\mathrm{ind}_k(\mathbf{\Lambda}_k)(g) \leqslant 1$, то общее число шагов нашего алгоритма не превосходит $K_0 = 2^{30}\tau^{-4}\beta^{-4}\sigma^{-3}$.

Предположим, что наш алгоритм остановился на K-м шаге, $K \geqslant 1$, $K \leqslant 2^{30}\tau^{-4}\beta^{-4}\sigma^{-3}$. Имеем

$$\mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K, \overline{R}_K)(g_3) < \frac{\tau\beta}{4}\,. \tag{5.38}$$

Применяя лемму 5.7, находим

$$\mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K)(g_1) \geqslant (\delta+\tau)\beta - 8\kappa K \geqslant \biggl(\delta + \frac{7\tau}{8}\biggr)\beta.$$

Применяя неравенство (5.38), получаем

$$\mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K, R_K)(g_1) \geqslant \biggl(\delta + \frac{3\tau}{8}\biggr)\beta. \tag{5.39}$$

Суммирование в неравенстве (5.39) проходит по множеству $\Lambda_K^*(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1})_{\vec{y}}$, где $\vec{y} \in R_K(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1})$.

Пусть E_K – семейство векторов $\vec{y}$ таких, что $\vec{y} \in E_K(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1})$, а R_K^* – семейство векторов $\vec{y}$ таких, что $\vec{y} \in R_K(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1})$, но $\vec{y}$ не принадлежит $E_K(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1})$. Имеем

$$\mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K, E_K)(g_1) < \frac{\tau\beta}{16}\,\mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K)(1) \leqslant \frac{\tau\beta}{16}\,. \tag{5.40}$$

Объединяя неравенства (5.39) и (5.40), находим

$$\mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K, R_K^*)(g_1) > \biggl(\delta + \frac{\tau}{4}\biggr)\beta. \tag{5.41}$$

Предположим, что для всех $\vec{y} \in R_K^*(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1})$ выполнено $g_2(\Lambda_K^*(\vec{x}_0,\dots$ $\dots,\vec{x}_{K-1}),\vec{y}\,) < \delta + \tau/16$. Тогда

$$\begin{aligned}\biggl(\delta + \frac{\tau}{4}\biggr)\beta < \mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K, R_K^*)(g_1) &\leqslant \biggl(\delta + \frac{\tau}{16}\biggr)\mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K, R_K^*)(g_3) \\ &\leqslant \biggl(\delta + \frac{\tau}{16}\biggr)\mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K)(g_3).\end{aligned} \tag{5.42}$$

Применяя лемму 5.7 еще раз, получаем противоречивое неравенство

$$\biggl(\delta + \frac{\tau}{4}\biggr)\beta < \biggl(\delta + \frac{\tau}{16}\biggr)\mathrm{ind}_K(\mathbf{\Lambda}_K)(g_3) \leqslant \biggl(\delta + \frac{\tau}{16}\biggr)(\beta + 8\kappa K) \leqslant \biggl(\delta + \frac{\tau}{4}\biggr)\beta.$$

Следовательно, существуют векторы $\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1}$, $\vec{y}$ такие, что выполнены неравенство $g_2(\Lambda_K^*(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1}),\vec{y}\,) \geqslant (\delta+\tau/16)$ и включение $\vec{y} \in R_K(\vec{x}_0,\dots$ $\dots,\vec{x}_{K-1}) \setminus E_K(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1})$. Положим $\vec{t} = \vec{y} + \vec{s}$ и $\Lambda' = \Lambda_K^*(\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_{K-1})$. Мы нашли вектор $\vec{t}$, множества $E_1' = (\widetilde{E}_1 - y_1) \cap \Lambda'$, $E_2' = (\widetilde{E}_2 - y_2) \cap \Lambda'$ и множество Бора Λ', удовлетворяющие условиям 1)–3).

Оценим величины D и ε'. На каждом шаге нашего алгоритма мы строим новые множества Бора, причем их размерность увеличивается не более чем на 1. Поскольку общее число шагов не превосходит K_0, то $D \leqslant d + 2^{30}\tau^{-5}\beta^{-5}\sigma^{-3}$ и $\varepsilon' \geqslant (2^{-10}\varepsilon)^D\varepsilon_0$. Применяя лемму 2.3 и неравенство (5.21), получаем, что множество Λ' не пусто. Предложение доказано.

§ 6. Доказательство основного результата

Объединим теорему 4.4 и предложение 5.8 в единое утверждение.

Предложение 6.1. *Пусть* $\Lambda = \Lambda(S, \varepsilon_0)$ *– множество Бора,* $|S| = d$ *и* $\vec{s} = (s_1, s_2) \in G \times G$. *Пусть* E_1, E_2 *– некоторые множества,* $E_i = \beta_i|\Lambda|$, $i = 1, 2$, $\beta = \beta_1\beta_2$. *Пусть* $\mathbf{E} = E_1 \times E_2$ *– подмножество множества* $(\Lambda+s_1)\times(\Lambda+s_2)$, *множества* E_1, E_2 *являются* $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$*-равномерными подмножествами множеств* $\Lambda+s_1$, $\Lambda+s_2$ *соответственно,* $\alpha_0 = 2^{-2000}\delta^{96}\beta_1^{48}\beta_2^{48}$, $\varepsilon = 2^{-100}\alpha_0^2/(100d)$. *Предположим, что* A *– подмножество множества* $\mathbf{E}$, $\delta_{\mathbf{E}}(A) = \delta$ *и* A *не содержит троек* $\{(k, m), (k + s, m), (k, m + s)\}$, *где* $s \neq 0$. *Пусть*

$$\log N \geqslant 2^{1000000}(2^{250000}\delta^{-20000}\beta^{-200} + d)^3 \log \frac{1}{\delta\beta\varepsilon_0}\,. \tag{6.1}$$

Тогда существуют множество Бора $\tilde\Lambda$, *вектор* $\vec{y} = (y_1, y_2) \in G \times G$ *и множества* $E_1' \subseteq (E_1 - y_1 \cap \tilde\Lambda)$, $E_2' \subseteq (E_2 - y_2 \cap \tilde\Lambda)$ *такие, что*:

1) *при* $|E_1'| = \beta_1'|\tilde\Lambda|$, $|E_2'| = \beta_2'|\tilde\Lambda|$ *и* $\beta' = \beta_1'\beta_2'$ *выполнено* $\beta' \geqslant 2^{-1500}\delta^{100}\beta$;

2) E_1', E_2' *являются* $(\alpha_0', 2^{-10}\varepsilon'^2)$*-равномерными, где* $\alpha_0' = 2^{-2000}\delta^{96}\beta'^{48}$, $\varepsilon' = 2^{-100}\alpha_0'^2/(100D')$, $D \leqslant D' = 2^{250000}\delta^{-20000}\beta^{-200} + d$;

3) *для* $\tilde\Lambda = \Lambda(\widetilde{S}, \tilde\varepsilon)$ *выполнено* $|\widetilde{S}| = D$ *и* $\tilde\varepsilon \geqslant (2^{-100}\varepsilon'^2)^D\varepsilon_0$;

4) $\delta_{E_1'\times E_2'}(A) \geqslant \delta + 2^{-600}\delta^{22}$.

Доказательство теоремы 1.5. Предположим, что $A \subseteq G \times G$, $|A| = \delta N^2$ и A не содержит троек $\{(k, m), (k + s, m), (k, m + s)\}$, где $s \neq 0$.

Доказательство представляет собой алгоритм. На i-м шаге алгоритма строится вектор $\vec{s}_i = (s_i^{(1)}, s_i^{(2)})$ и следующие множества: регулярное множество Бора $\Lambda_i = \Lambda(S_i, \varepsilon_i)$, а также $E_i^{(1)} - s_i^{(1)} \subseteq \Lambda_i$, $E_i^{(2)} - s_i^{(2)} \subseteq \Lambda_i$. Пусть $|E_i^{(1)}| = \beta_i^{(1)}|\Lambda_i|$, $|E_i^{(2)}| = \beta_i^{(2)}|\Lambda_i|$, $\beta_i = \beta_i^{(1)}\beta_i^{(2)}$, $\mathbf{E}_i = E_i^{(1)} \times E_i^{(2)}$.

Множества Λ_i, $E_i^{(1)}$, $E_i^{(2)}$ обладают следующими свойствами:

1) $\beta_i \geqslant 2^{-1500}\delta^{100}\beta_{i-1}$;

2) $E_i^{(1)}$, $E_i^{(2)}$ являются $(\alpha_0^{(i)}, 2^{-10}(\varepsilon_i')^2)$-равномерными, $\alpha_0^{(i)} = 2^{-2000}\delta^{96}\beta_i^{48}$, $\varepsilon_i' = 2^{-100}(\alpha_0^{(i)})^2/(100d_i)$;

3) $\Lambda_i = \Lambda(S_i, \varepsilon_i)$, $|S_i| = d_i$, $d_i \leqslant 2^{250000}\delta^{-20000}\beta_{i-1}^{-200} + d_{i-1}$, $\varepsilon_i \geqslant (2^{-100}(\varepsilon_i')^2)^{d_i}\varepsilon_{i-1}$;

4) $\delta_{\mathbf{E}_i}(A') \geqslant \delta_{\mathbf{E}_{i-1}}(A') + 2^{-600}\delta^{22}$.

Предложение 6.1 позволяет провести $(i + 1)$-й шаг алгоритма. По этому предложению существуют новый вектор $\vec{s}_{i+1} = (s_{i+1}^{(1)}, s_{i+1}^{(2)}) \in G\times G$ и регулярное множество Бора $\Lambda_{i+1} = \Lambda(S_{i+1}, \varepsilon_{i+1})$, а также множества $E_{i+1}^{(1)} - s_i^{(1)} \subseteq \Lambda_{i+1}$, $E_{i+1}^{(2)} - s_{i+1}^{(2)} \subseteq \Lambda_{i+1}$, $\mathbf{E}_{i+1} = E_{i+1}^{(1)} \times E_{i+1}^{(2)}$, удовлетворяющие 1)–4).

Положим $S_0 = \{0\}$, $\Lambda_0 = \Lambda(S_0, 1)$ и $E_1 = E_2 = G$, $\beta_0 = 1$. Ясно, что множества E_1, E_2 являются $(2^{-2000}\delta^{96}, 2^{-10000}\delta^{400})$-равномерными. Значит, мы провели нулевой шаг алгоритма.

Оценим общее число шагов нашей процедуры. Для любого i мы имеем $\delta_{\mathbf{E}_i}(A') \leqslant 1$. Используя последнее неравенство и свойство 4), получаем, что общее число шагов не превосходит $2^{700}\delta^{-21} = K$.

Из свойства 3) вытекает, что $\beta_i \geqslant (2^{-1500}\delta^{100})^i$. Следовательно, $d_i \leqslant (C_1\delta)^{-C_1'i}$, где $C_1, C_1' > 0$ – абсолютные константы.

Для доказательства теоремы мы должны проверить выполнение условия (6.1) на последнем шаге нашего алгоритма. Перепишем (6.1) в виде

$$N \geqslant (C_2'\delta)^{-C_3'\delta^{-C_4'K}} = \exp(\delta^{-C'\delta^{-21}}), \tag{6.2}$$

где $C_2', C_3', C_4', C' > 0$ – абсолютные константы. По условию

$$\delta \gg \frac{1}{(\log\log N)^{1/22}}\,,$$

и мы получаем (6.2). Следовательно, множество A' не содержит троек $\{(k,m),(k+s,m),(k,m+s)\}$, где $d \neq 0$. Это противоречие доказывает теорему.

Замечание 6.2. Безусловно, константа 22 в теореме 1.5 (см. замечание 1.6) может быть несколько понижена. Тем не менее, по мнению автора эта константа не может быть заменена на число, близкое к единице, без использования какой-то новой идеи.

Применяя следующую лемму Б. Грина (см., например, [15] или [31]), можно вывести следствие из теоремы 1.5 относительно подмножеств $\{-N,\dots,N\}^2$, не содержащих уголков (детали доказательства могут быть найдены в [15]).

Лемма 6.3. *Пусть N – натуральное число. Пусть A – подмножество множества $\{-N,\dots,N\}^2$, $|A| = \delta(2N+1)^2$, не содержащее троек вида $\{(k,m),(k+d,m),(k,m+d)\}$, $d > 0$. Тогда существует множество $A_1 \subseteq A$ такое, что*:

1) $|A_1| \geqslant \delta^2(2N+1)^2/4$;
2) A_1 *не содержит троек* $\{(k,m),(k+s,m),(k,m+s)\}$, $s \neq 0$.

Следствие 6.4. *Пусть $\delta > 0$ и $N \gg \exp\exp(\delta^{-43})$. Пусть A – подмножество множества $\{1,\dots,N\}^2$, имеющее мощность не меньше δN^2. Тогда A содержит тройку $\{(k,m),(k+s,m),(k,m+s)\}$, $s > 0$.*

Список литературы

1. E. Szemerédi, "On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression", *Acta Arith.*, **27** (1975), 199–245.
2. T. Tao, V. H. Vu, *Additive combinatorics*, Cambridge Stud. Adv. Math., **105**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
3. H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
4. B. L. van der Waerden, "Beweis einer Baudetschen Vermutung", *Nieuw Archief*, **15** (1927), 212–216.
5. K. F. Roth, "On certain sets of integers", *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 104–109.
6. J. Bourgain, "Roth's theorem on progressions revisited", *J. Anal. Math.*, **104**:1 (2008), 155–192.
7. H. Furstenberg, "Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions", *J. Analyse Math.*, **31**:1 (1977), 204–256.
8. H. Furstenberg, Y. Katznelson, "An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations", *J. Analyse Math.*, **34**:1 (1978), 275–291.
9. H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein, "The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **7**:3 (1982), 527–552.

10. F. A. Behrend, "On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **23** (1946), 331–332.
11. R. A. Rankin, "Sets of integers containing not more than a given number of terms in arithmetical progression", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **65**:4 (1961), 332–344.
12. W. T. Gowers, "A new proof of Szemerédi's theorem", *Geom. Funct. Anal.*, **11**:3 (2001), 465–588.
13. M. Ajtai, E. Szemerédi, "Sets of lattice points that form no squares", *Stud. Sci. Math. Hungar.*, **9** (1974), 9–11.
14. И. Д. Шкредов, "Об одном обобщении теоремы Семереди", *Докл. РАН*, **405**:3 (2005), 315–319; англ. пер.: I. D. Shkredov, "On a generalization of Szemerédi's theorem", *Dokl. Math.*, **72**:3 (2005), 899–902.
15. I. D. Shkredov, "On a generalization of Szemerédi's theorem", *Proc. London Math. Soc.*, **93**:3 (2006), 723–760.
16. J. Solymosi, "Note on a generalization of Roth's theorem", *Discrete and computational geometry*, Algorithms Combin., **25**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 825–827.
17. V. H. Vu, "On a question of Gowers", *Ann. Comb.*, **6**:2 (2002), 229–233.
18. И. Д. Шкредов, "Об одной задаче Гауэрса", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:2 (2006), 179–221; англ. пер.: I. D. Shkredov, "On a problem of Gowers", *Math. USSR-Izv.*, **70**:2 (2006), 385–425.
19. И. Д. Шкредов, "Об одной задаче Гауэрса", *Докл. РАН*, **400**:2 (2005), 169–172; англ. пер.: I. D. Shkredov, "On a problem of Gowers", *Dokl. Math.*, **71**:1 (2005), 46–48.
20. B. Green, "Finite field models in additive combinatorics", *Surveys in combinatorics* 2005 (University of Durham, Durham, UK, 2005), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **327**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 1–27.
21. M. T. Lacey, W. McClain, "On an argument of Shkredov on two-dimensional corners", *Online J. Anal. Comb.*, **2** (2007), article 2; `arXiv: math.CO/0510491`.
22. T. C. Brown, J. C. Buhler, "A density version of a geometric Ramsey theorem", *J. Combin. Theory Ser. A*, **32**:1 (1982), 20–34.
23. P. Frankl, R. L. Graham, V. Rödl, "On subsets of abelian groups with no 3-term arithmetic progression", *J. Combin. Theory Ser. A*, **45**:1 (1987), 157–161.
24. R. Meshulam, "On subsets of finite abelian groups with no 3-term arithmetic progressions", *J. Combin. Theory Ser. A*, **71**:1 (1995), 168–172.
25. V. F. Lev, "Progression-free sets in finite Abelian groups", *J. Number Theory*, **104**:1 (2004), 162–169.
26. B. Green, T. Tao, *An inverse theorem for the Gowers U^3 norm*, `arXiv: math.NT/0503014`.
27. J. Bourgain, "On triples in arithmetic progression", *Geom. Funct. Anal.*, **9**:5 (1999), 968–984.
28. B. Green, "A Szemerédi-type regularity lemma in Abelian groups, with applications", *Geom. Funct. Anal.*, **15**:2 (2005), 340–376.
29. T. Tao, *Lecture notes 5 for Math 254A: Behrend's example; Bourgain's refinement of Roth's theorem*, `http://math.ucla.edu/ tao/254a.1.03w/`.
30. F. R. K. Chung, R. L. Graham, R. M. Wilson, "Quasi-random graphs", *Combinatorica*, **9**:4 (1989), 345–362.
31. W. T. Gowers, "Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs", *Combin. Probab. Comput.*, **15**:1–2 (2006), 143–184.

И. Д. Шкредов (I. D. Shkredov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: `ishkredov@rambler.ru`

Поступило в редакцию
03.05.2007