Математические заметки

том 73 выпуск 4 апрель 2003

УДК 511

О КРИТЕРИИ НОРМАЛЬНОСТИ ПЯТЕЦКОГО-ШАПИРО

Н. Г. Мощевитин, И. Д. Шкредов

В данной работе критерию нормальности Постникова–Пятецкого придана более современная форма и получены его неулучшаемые аналоги для конечных цепей Маркова, цепных дробей и обобщенного сдвига Бернулли.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Пусть X – пространство с сигма-алгеброй измеримых множеств Φ и мерой μ, а T – измеримое эргодическое отображение пространства X в себя, сохраняющее эту меру. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X)=1$.

Для произвольной измеримой функции $f(x)$ рассмотрим биркгофовское среднее

$$S_l(T,x,f)=S_l(x,f)=\sum_{m=0}^{l-1} f(T^m x).$$

Пусть $\{C_m\}$ – не более чем счетное семейство измеримых подмножеств X. Определим аналог хаусдорфовой меры $H(\,\cdot\,)$ для множества E относительно этого семейства, как $\inf\{\sum\mu(C_i)\}$, где inf берется по не более чем счетным покрытиям E. Будем говорить, что меры μ и H *согласованы*, если любое μ-измеримое множество является H-измеримым.

Обозначим через Γ семейство μ-измеримых множеств $\{V\}$, которые с любой точностью аппроксимируются множествами семейства $\{C_m\}$. (То есть для произвольного V из Γ и любого $\varepsilon>0$ существуют наборы непересекающихся множеств $\{M_i\}$ и $\{N_i\}$ из семейства $\{C_m\}$, так что $\bigsqcup M_i\subseteq V\subseteq\bigsqcup N_i$ и $\sum\mu(N_i)-\varepsilon<\mu(V)<\sum\mu(M_i)+\varepsilon$).

Пусть χ_I – характеристическая функция измеримого множества I. Знаменитая эргодическая теорема Биркгофа (см., например, [1]) утверждает, что для почти всех точек x_0 выполнено

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu}=\mu(I). \tag{1}$$

В работе [2] Пятецким-Шапиро для динамической системы, порожденной отображением $x\mapsto\{qx\}$, $q\in\mathbb{N}$, $q>1$, интервала $[0,1)$ в себя, был дан критерий того, чтобы для данной точки x_0 выполнялось (1). Ряд последующих работ Пятецкого-Шапиро и Постникова [2]–[5] и других (библиографию см. в [4], [5]) содержал обобщения и усиления первоначального критерия из работы [2].

Достаточно общая формулировка выглядит следующим образом (ср. с [5, теорема 6]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00912, и фонда INTAS.

Теорема А. *Пусть точка $x_0\in X$. Пусть меры μ и H согласованы и для любого μ-измеримого A выполнено $\mu(A)=H(A)$. Если существует положительная постоянная C, что для любого множества I из семейства $\{C_m\}$ выполняется*

$$\limsup_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu}\leqslant C\mu(I),$$

то для любого множества I из Γ выполняется

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu}=\mu(I).$$

Пусть q – целое число, $q>1$, α – вещественное число. Обозначим через $P_\nu(\alpha,\Delta)$, где Δ – некоторый интервал из отрезка $[0,1]$, число попаданий в Δ дробных долей $\{\alpha q^k\}$, $k=0,1,\dots,\nu-1$.

Для динамической системы, соответствующей распределению дробных долей $\{\alpha q^k\}$, с $X=[0,1)$ и $Tx=\{qx\}$ в работе [3] Пятецким-Шапиро был доказан результат, значительно улучшающий общую теорему А.

Теорема Б. *Пусть $\varphi(t)$ – монотонно возрастающая положительнозначная функция такая, что для любого $\varepsilon>0$ выполняется*

$$\liminf_{t\to0}\frac{\varphi(t)}{t^{1-\varepsilon}}=0. \tag{2}$$

Если для любого интервала Δ выполняется

$$\limsup_{\nu\to\infty}\frac{P_\nu(\alpha,\Delta)}{\nu}\leqslant\varphi(|\Delta|),$$

то дробные доли $\{\alpha q^k\}$ равномерно распределены.

Как известно, хаусдорфова размерность множества чисел, не являющихся нормальными по основанию q, равна 1. (Более того, как показал Шмидт [6], хаусдорфова размерность множества чисел, не являющихся нормальными ни по какому основанию, равна единице.) С другой стороны, теорема Б означает, что хаусдорфова мера чисел, не нормальных по фиксированному основанию q, относительно функции φ равна 0.

В данной заметке теорема Б перенесена на некоторые другие динамические системы (в том числе и рассматривавшиеся в [4]), при этом функция φ будет выбираться так, чтобы хаусдорфова мера “исключительного” (в смысле эргодической теоремы) множества точек была равна 0.

2. Общая постановка задачи. Возьмем произвольное $\delta>0$ и произвольное натуральное l. Рассмотрим множества

$$A_l(T,f,\delta)=A_l(f,\delta)=\left\{x\in X:\left|\frac{S_l(T,x,f)}{l}-\int f\,d\mu\right|>\delta\right\}.$$

Как утверждает статистическая эргодическая теорема, для любого $\delta>0$ мера множеств $A_l(f,\delta)$ стремится к нулю при $l\to\infty$. (По поводу скорости сходимости см. [7], [8]).

Пусть $\{C_m\}$ – не более чем счетное семейство измеримых подмножеств X, а $\varphi(t)$ – монотонно возрастающая положительнозначная функция аргуметна $t \in \mathbb{R}_+$. Определим меру $H_\varphi(\cdot)$ для множества E относительно этого семейства, как $\inf\{\sum\varphi(\mu(C_i))\}$, где inf берется по не более чем счетным покрытиям E. (При $\varphi(t) = t$ мера H_φ совпадает с рассматривавшейся выше мерой H.)

Мы сформулируем критерий Пятецкого для произвольной эргодической динамической системы и проведем доказательство, аналогичное доказательству из [2].

Теорема 1. *Пусть точка $x_0 \in X$. Если для произвольного множества I из семейства $\{C_m\}$ выполнено*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu} \leqslant \varphi(\mu(I))$$

и для любого $\delta > 0$ выполнено $H_\varphi(A_l(T,\chi_I,\delta)) \to 0$ при $l \to \infty$, то для произвольного множества V из Γ имет место асимптотическое равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi_V)}{\nu} = \mu(V). \tag{3}$$

Доказательство. Возьмем любое $\delta > 0$ и характеристическую функцию χ произвольного множества I из семейства $\{C_m\}$. Для любых натуральных ν и l справедлива формула

$$S_\nu(x_0,\chi) = \frac{1}{l}\sum_{t=0}^{\nu-1} S_l(T^t x_0,\chi) + O(l). \tag{4}$$

Из этой формулы получаем

$$\begin{aligned}\left|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} - \mu(I)\right| &= \frac{1}{\nu}\left|\sum_{t=0}^{\nu-1}\left(\frac{S_l(T^t x_0,\chi)}{l} - \mu(I)\right)\right| + O\left(\frac{l}{\nu}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\nu}\sum_t^1 \left|\frac{S_l(T^t x_0,\chi)}{l} - \mu(I)\right| + \frac{1}{\nu}\sum_t^2 \left|\frac{S_l(T^t x_0,\chi)}{l} - \mu(I)\right| + O\left(\frac{l}{\nu}\right) \\ &\leqslant \delta + \frac{2R_\nu}{\nu} + O\left(\frac{l}{\nu}\right),\end{aligned} \tag{5}$$

где суммирование в первой сумме распространено на те слагаемые, для которых

$$\left|\frac{S_\nu(T^t x_0,\chi)}{l} - \mu(I)\right| \leqslant \delta,$$

а R_ν обозначает количество слагаемых во второй сумме, для которых

$$\left|\frac{S_\nu(T^t x_0,\chi)}{l} - \mu(I)\right| > \delta.$$

Итак, для индексов t из области суммирования в $\sum^2$ выполняется $T^t x_0 \in A_l(\chi,\delta)$. Возьмем покрытие $A_l(\chi,\delta)$ множествами из семейства $\{C_m\}$, так что

$$\sum_i \varphi(\mu(C_i)) < H_\varphi(A_l(\chi,\delta)) + \delta.$$

По условию теоремы $H_\varphi(A_l(\chi,\delta)) \to 0$ при $l \to \infty$, значит

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{R_\nu}{\nu} \leqslant \sum_i \varphi(\mu(C_i)) < 2\delta \tag{6}$$

при достаточно больших l. Значит,

$$\limsup_{\nu\to\infty}\left|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} - \mu(I)\right| = 0,$$

т.е.

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} - \mu(I)\right| = 0.$$

Пусть теперь χ – характеристическая функция произвольного множества V из Γ. Для всякого положительного ε найдется набор множеств N_i из семейства $\{C_m\}$ таких, что $V \subseteq \bigsqcup N_i$ и $\mu(V) > \sum\mu(N_i) - \varepsilon$. Теперь имеем

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T,x_0,\chi)}{\nu} \leqslant \sum \limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T,x_0,\chi_i)}{\nu} = \sum\mu(N_i) < \mu(V) + \varepsilon,$$

где $\chi_i = \chi_{N_i}$. Итак,

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T,x_0,\chi)}{\nu} \leqslant \mu(V).$$

Аналогично,

$$\liminf_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T,x_0,\chi)}{\nu} \geqslant \mu(V).$$

Значит, для χ выполнено (3). Теорема доказана.

Часто оказывается, что семейство $\{C_m\}$ имеет специальный вид.

Пусть ξ – не более чем счетное измеримое разбиение пространства X. Если ξ и η – два таких разбиения, то их совместное разбиение определяется следующим образом: $\xi \vee \eta := \{A \cap B : A \in \xi,\ B \in \eta\}$. Для измеримого разбиения ξ, сохраняющего меру преобразования T, и произвольного натурального n определим итерированное разбиение $\xi_{-n}^T := \xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n+1}\xi$, $\xi_0^T = \xi$.

Мы будем считать, что семейство $\{C_m\}$ есть совокупность всех элементов разбиений $\xi_{-\infty}^T$. Множество всех этих элементов иногда обозначают через $\xi_{-\infty}^T = \{\xi_{-n}^T\}_{n=0}^\infty$ (эта ситуация была фактически рассмотрена в [4]). Как и прежде, Γ обозначает семейство μ-измеримых множеств $\{V\}$, которые с любой точностью аппроксимируются множествами семейства $\{C_m\}$.

Теорема 1′. *Пусть точка $x_0 \in X$. Если для любого n и характеристической функции χ_I произвольного элемента $I \in \xi_{-n}^T$ выполняется*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu} \leqslant \varphi(\mu(I)) \tag{7}$$

и, кроме того, для любого $\delta > 0$ выполняется $H_\varphi(A_l(T^n,\chi_I,\delta)) \to 0$ при $l \to \infty$, то для характеристической функции χ произвольного множества $V \in \Gamma$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} = \mu(V). \tag{8}$$

Доказательство. По теореме 1 для любого элемента начального разбиения ξ выполнено (8). Пусть χ – характеристическая функция множества $K = E_1 \cap T^{-1}E_2 \cap \dots \cap T^{-k+1}E_k$, $E_i \in \xi$, которое является элементом разбиения ξ_{-k}^T для некоторого k. Рассмотрим преобразование T^k и будем считать разбиение $\eta = \xi_{-k}^T$ начальным для этой новой динамической системы. Возьмем точки $x_0, Tx_0, \dots, T^{k-1}x_0$. Для них выполнено условие (7) теоремы. Очевидно, что для преобразования T^k и этих точек выполнено

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T^k, T^j x_0, \chi_I)}{\nu} \leqslant k\cdot\varphi(\mu(I)), \qquad j = 0,\dots,k-1.$$

Меры H_φ и $H_{k\varphi}$ стремятся к нулю одновременно. Таким образом, все условия теоремы 1 для динамической системы, порожденной преобразованием T^k, с начальным разбиением η выполнены. Применяя формулу

$$S_\nu(T,x,\chi) = \sum_{j=0}^{k-1} S_{[\nu/k]}(T^k, T^j x, \chi) + O(k), \tag{9}$$

получаем

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T,x_0,\chi)}{\nu} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k} \lim_{\nu\to\infty} \frac{S_{[\nu/k]}(T^k, T^j x_0, \chi)}{[\nu/k]} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{k}\mu(K) = \mu(K).$$

Далее будем действовать также, как и в конце доказательства теоремы 1. Пусть теперь χ – характеристическая функция произвольного множества V из Γ. Для всякого положительного ε найдется набор множеств N_i из семейства $\{C_m\}$ таких, что $V \subseteq \bigsqcup N_i$ и $\mu(V) > \sum \mu(N_i) - \varepsilon$. Теперь снова

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T,x_0,\chi)}{\nu} \leqslant \mu(V) + \varepsilon.$$

Аналогично,

$$\liminf_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T,x_0,\chi)}{\nu} \geqslant \mu(V) - \varepsilon,$$

и теорема доказана.

3. Случай конечного разбиения. Пусть теперь ξ – конечное измеримое разбиение пространства X с q элементами.

Пусть $\gamma_1,\dots,\gamma_N$, $0 \leqslant \gamma_i < q$, $1 \leqslant i \leqslant N$, – некоторая система целых чисел, $0 \leqslant a < q$, $T_{N,a}$ – количество чисел, равных a, в этой системе. В работе [3] было доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Существует некоторое положительное $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta)$, $\varepsilon_1(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$, такое, что количество систем с $|T_{N,a} - N/q| \geqslant \delta N$ есть $O(q^{N(1-\varepsilon_1)})$.*

Пусть монотонно возрастающая функция φ представляется в виде $\varphi(t) = t\psi(t)$, где $\psi(t)$ – невозрастающая функция, которая удовлетворяет следующему условию: для произвольных $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и для всех характеристических функций χ элементов разбиения ξ_{-n}^T выполнено

$$\lim_{l\to\infty} \max\left\{\mu(A_l(T^n,\chi,\delta)),\ \frac{1}{q^{ln\varepsilon_1(\delta)}}\right\}\psi\left(\frac{1}{q^{ln}}\right) = 0. \tag{10}$$

Замечание. Из условия, что для любых $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\psi(1/q^{ln})}{q^{ln\varepsilon_1(\delta)}} = 0$$

вытекает, что для φ выполнено (2).

Теорема 2. *Пусть точка $x_0 \in X$ и ψ удовлетворяет* (10). *Если для любого n и характеристической функции χ произвольного элемента $I \in \xi_{-n}^T$ выполнено*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} \leqslant \mu(I)\psi(\mu(I)), \tag{11}$$

то для характеристической функции χ произвольного множества $E \in \Gamma$ выполнено

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} = \mu(E). \tag{12}$$

Замечание. Так как для динамической системы с $X = [0,1]$ и $Tx = \{qx\}$

$$\mu(A_l(T^n,\chi,\delta)) = O\left(\frac{1}{q^{ln\varepsilon_1(\delta)}}\right),$$

то из теоремы 2 следует теорема Б Пятецкого.

Доказательство. Возьмем любое $\delta > 0$ и характеристическую функцию χ элемента K разбиения ξ. Заметим, что множество $A_l(\chi,\delta)$ *разбивается* на объединение некоторых элементов разбиения ξ_{-l}^T. Проводим выкладку, аналогичную выкладке (5) из теоремы 1. Для оценки слагаемого R_ν/ν в правой части (5) нам нужен следующий аналог оценки (6):

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{R_\nu}{\nu} \leqslant \sum\nolimits_{\lambda}^{*} \mu(\lambda)\psi(\mu(\lambda)), \tag{13}$$

где знаком $\sum^*{}_\lambda$ обозначено суммирование по всем элементам λ разбиения ξ_{-l}^T, на которые разбивается $A_l(\chi,\delta)$.

Разобьем (13) на сумму $\sum_1$ по $\xi_{-l}^T(x)$ с мерами $< 1/q^l$ и на сумму $\sum_2$ по $\xi_{-l}^T(x)$ с мерами $\geqslant 1/q^l$. По утверждению 1 количество слагаемых в (13) есть $O(q^{l(1-\varepsilon_1)})$; следовательно, $\sum_1 \ll \varphi(1/q^l)q^{l(1-\varepsilon_1)} = \psi(1/q^l)/q^{l\varepsilon_1(\delta)}$ (используем монотонность функции φ). Из того, что ψ не возрастает, получаем $\sum_2 \leqslant \mu(A_l(\chi,\delta))\psi(1/q^l)$. По условию (10) теоремы оба этих выражения $< \delta$ при достаточно большом l. Значит,

$$\limsup_{\nu\to\infty}\left|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} - \mu(K)\right| = 0,$$

т.е.

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} - \mu(K)\right| = 0.$$

Пусть теперь χ – характеристическая функция $E_1 \cap T^{-1}E_2 \cap \dots \cap T^{-k+1}E_k$, $E_i \in \xi$, элемента ξ_{-k}^T для некоторого k. Рассмотрим преобразование T^k и будем считать разбиение $\eta = \xi_{-k}^T$ с q^k элементами начальным для этой новой динамической системы. Условие (10) для этой динамической системы выполнено. Также выполнено (7). Следовательно, применяя теорему $1'$, получаем (12) для характеристической функции χ произвольного множества E из Γ. Теорема доказана.

4. О больших уклонениях. Для оценки мер множеств $A_l(\chi,\delta)$ бывают полезны центральная предельная теорема и оценки больших уклонений.

Пусть $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1,2,\dots}$ – убывающая к нулю последовательность положительных чисел.

Определение. Динамическая система (X,Φ,μ,T) с начальным разбиением ξ *обладает свойством α-перемешивания*, если

$$\sup_{M_1\in\xi_{-k}^T,\, M_2\in T^{-(n+k)}(\xi_{-\infty}^T)}\bigl\{|\mu(M_1\cap M_2) - \mu(M_1)\mu(M_2)|\bigr\} \leqslant \alpha(n)\mu(M_1) = \alpha_n\mu(M_1).$$

Пусть рассматриваемая динамическая система обладает свойством α-перемешивания. Рассмотрим функцию $f(x) = \chi(x) - \int\chi\,d\mu$, где $\chi(x)$ – характеристическая функция произвольного элемента ξ_{-n}^T. Для таких систем выполнена

Центральная предельная теорема [11, гл. 4, § 20]. *Пусть $\sum\alpha_n^{1/2} < \infty$ и $\sigma^2 = \mathsf{E}f^2 + 2\sum_{k=1}^\infty \mathsf{E}(f\cdot f(T^k)) > 0$. Тогда случайные величины $S_n(f,T)/(\sigma\sqrt{n})$ сходятся по распределению к нормальной случайной величине $N(0,\sigma^2)$.* (Символом E обозначено математическое ожидание.)

Нам понадобятся теоремы больших уклонений из [13] для вероятностей $\mathsf{P}(x : |S_l(f,\delta)/l| > \delta)$. Теоремы о больших уклонениях при наличии перемешивания устанавливают оценки следующего вида:

$$\mu(A_l(\chi,\delta)) = \mathsf{P}\left(x : \left|\frac{S_l(f,\delta)}{l}\right| > \delta\right) \ll e^{-\rho(l)} \tag{14}$$

с некоторой функцией $\rho(l) = \rho_\delta(l) \to \infty$, $l \to \infty$. Формулировки этих результатов в общем виде достаточно громоздки, поэтому в следующих двух пунктах мы сформулируем лишь необходимые нам следствия.

Отметим, что использованное нами утверждение 1 из п. 3 (принадлежащее Пятецкому-Шапиро) как раз является простейшим примером теоремы о больших уклонениях (см. [10, гл. 1, § 6; гл. 4, § 5]).

5. Теорема Пятецкого для марковских цепей. Пусть матрица

$$P = \{p_{ij}\}_{i,j=0,\dots,n-1}$$

стохастическая, т.е. такая, что $p_{ij} \geqslant 0$ и $\sum_j p_{ij} = 1$. Матрица P называется *транзитивной*, если для некоторого m все элементы матрицы P^m положительны. Тогда [1], [10] существует вектор $\pi = (\pi_1,\dots,\pi_n)$ с положительными компонентами такой, что $P^*\pi = \pi$ (P^* – транспонированная матрица).

Рассмотрим пространство бесконечных вправо последовательностей Ω, составленных из знаков $0,\dots,n-1$. Меру μ элементарного цилиндра, т.е. множества, у которого фиксировано какое-то количество первых знаков, положим равной π_{δ_1}, если фиксирован первый знак δ_1, и равной $\pi_{\delta_1}p_{\delta_1\delta_2}\cdots p_{\delta_{s-1}\delta_s}$, если фиксированы знаки $\delta_1,\dots,\delta_s$. Мера пустого множества равна 0, всего пространства – 1. Эту меру можно продолжить на минимальную σ-алгебру, содержащую алгебру цилиндрических множеств. Легко проверить, что полученная таким образом мера μ, будет инвариантна относительно сдвига влево T. Это преобразование эргодично (см. [1], [12]). Конечная транзитивная цепь Маркова обладает свойством α-перемешивания с $\alpha_n = ae^{-bn}$, $a,b > 0$ (см. [11, гл. 4, § 20]). Более того, для мер множеств $A_l(T^k,\chi,\delta)$, где $\chi(x)$ – характеристическая функция элементарного цилиндра с k фиксироваными знаками, выполнена оценка (см. [13, лемма 2.4 и теорема 4.26])

$$\mu(A_l(\chi,\delta)) \ll e^{-cl} \tag{15}$$

с некоторым $c = c(\delta) > 0$.

Теорема 3. *Пусть $x_0 \in \Omega$. Пусть также для всякого положительного η выполнено $\psi(t) = O(t^{-\eta})$, $t \to 0$. Если для любого элементарного цилиндра I выполнено*

$$\limsup_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(x_0,I)}{\nu} \leqslant \mu(I)\psi(\mu(I)),$$

то для произвольного множества V из Γ выполняется

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(x_0,V)}{\nu} = \mu(V).$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение пространства Ω на элементарные цилиндры с первым фиксированным знаком. Возьмем любой элементарный цилиндр I_k, у которого k первых знаков фиксировано. Обозначим через χ его характеристическую функцию, и пусть $f(x) = \chi(x) - \int\chi\,d\mu$. Из оценки (15) имеем

$$\lim_{l\to\infty}\max\left\{\mu(A_l(T^k,\chi,\delta)),\ \frac{1}{n^{lk\varepsilon_1(\delta)}}\right\}\psi\left(\frac{1}{n^{lk}}\right) = 0.$$

Применяя теорему 2, получаем теорему 3.

6. Примеры со счетным разбиением. В следующих двух примерах динамических систем со счетным начальным разбиением ξ можно явно указать функцию φ.

а) Первый пример относится к теории цепных дробей.

Цепной дробью, соответствующей числу α, называется выражение

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Число a_n называется *n-м неполным частным числа* α, а рациональное число $p_k/q_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ – *подходящей дробью порядка* k. Если $\alpha \in [0,1)$, то будем писать $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$. *Интервалом k-го ранга* $I_k = I_k(a_1, \dots, a_k)$ называется множество всех чисел α, у которых цепные дроби начинаются с $a_1, \dots, a_k$. Обозначим через $S_\nu(\alpha, I_k)$ число повторений комбинации $(a_1, \dots, a_k)$ в разложении α до ν-го места.

Как известно, преобразование Гаусса $Tx = \{1/x\}$, $x \neq 0$, $T0 = 0$, является левым сдвигом при разложении в цепную дробь и сохраняет меру

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{1}{1+x}\, dx,$$

которая эквивалентна мере Лебега dx. Соответствующая динамическая система обладает свойством α-перемешивания (теорема Леви, см. [11, гл. 4, § 20], а также [9, примечание, с. 83]) с $\alpha_n = Ke^{-\gamma n}$, $K, \gamma > 0$. В рассматриваемом случае теорема больших уклонений для слабо зависимых случайных величин (см. [13, лемма 2.4 и теорема 4.23]) обеспечивает оценки для мер

$$\mu(A_l(\chi, \delta)) \ll e^{-c\sqrt{l}} \tag{16}$$

с некоторым $c = c(\delta) > 0$.

Теорема 4. *Пусть* $x_0 \in [0,1)$. *Пусть также для всякого положительного* η *выполнено* $\psi(t) = O(e^{\eta\sqrt{\log 1/t}})$, $t \to 0$. *Если для любого интервала k-го ранга* I_k *имеет место неравенство*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, I_k)}{\nu} \leqslant \mu(I_k)\psi(\mu(I_k)),$$

то для любого интервала $I = (a,b)$ *выполнено*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, I)}{\nu} = \mu(I).$$

Доказательство. Возьмем любое $\delta > 0$, и пусть I_k – произвольный интервал k-го ранга. Обозначим через $E_l(g)$ $(g \geqslant 1)$ множество чисел отрезка $[0,1]$, для которых $a_1a_2\cdots a_l \geqslant g$. Это множество представляет собой систему интервалов ранга l. Длина $|I_l|$ какого-либо из этих интервалов равна $1/(q_l(q_l+q_{l-1}))$ и $1/(2q_l^2) \leqslant |I_l| \leqslant 1/q_l^2$. Далее, по индукции получаем, что $a_1a_2\cdots a_l \leqslant q_l \leqslant 2^l a_1a_2\cdots a_l$.

Оценим хаусдорфову меру $E_l(g)$ относительно функции φ, т.е. сумму

$$H_\varphi(E_l(g)) = \sum_{a_1a_2\cdots a_l \geqslant g} |I_l|\psi(|I_l|).$$

Обозначая $t^{-\eta}$ через $\rho(t)$, имеем

$$H_\varphi(E_l(g)) \leqslant \sum_{a_1a_2\cdots a_l \geqslant g} \frac{\rho((2^{l+1}a_1a_2\cdots a_l)^2)}{(a_1a_2\cdots a_l)^2} = \rho(4^{l+1}) \sum_{a_1a_2\cdots a_l \geqslant g} \prod_{i=1}^{l} \frac{\rho(a_i^2)}{a_i^2}. \tag{17}$$

По аналогии с рассуждениями из [9] получим оценку для (17). Заметим, что

$$\prod_{i=1}^{l} \frac{\rho(a_i^2)}{a_i^2} = \prod_{i=1}^{l} \biggl(1 + \frac{1}{a_i}\biggr) \frac{\rho(a_i^2)}{a_i(a_i+1)} \leqslant 2^l \prod_{i=1}^{l} \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{\rho(x_i^2)}{x_i^2}\, dx_i.$$

Следовательно,

$$H_\varphi(E_l(g)) \leqslant 2^l\rho(4^{l+1})J_l(g) = 2^l\rho(4^{l+1}) \int\cdots\int \frac{\rho(x_1^2\cdots x_l^2)\, dx_1\cdots dx_l}{x_1^2\cdots x_l^2},$$

где интегрирование распространяется на область $x_i \geqslant 1$, $x_1x_2\cdots x_l \geqslant g$. По индукции доказывается, что

$$J_n(g) = \frac{\rho(g^2)}{g} \biggl(\sum_{k=0}^{n-2} C^{n-k-1} \frac{\log^k g}{k!} + C\frac{\log^{n-1} g}{(n-1)!}\biggr),$$

где $C = 1/(1-2\eta)$. Дальнейший подсчет показывает, что, полагая $g = e^{Al}$, где A достаточно большое, имеем

$$H_\varphi(E_l(e^{Al})) \ll e^{-Bl}, \qquad B > 0. \tag{18}$$

Далее,

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{R_\nu}{\nu} \leqslant \sum\nolimits_I^{**} \mu(I)\psi(\mu(I)), \tag{19}$$

где, в отличие от теоремы 2 (ср. с формулой (13)), суммирование $\sum^{**}{}_I$ распространяется на *счетное* количество интервалов k-го ранга I. Разобьем (19) на сумму по $I_l \subseteq E_l(g)$ и на сумму по $I_l \subseteq A_l(I_k, \delta) \setminus E_l(g)$. Так как для I_l, не принадлежащих $E_l(g)$, имеет место неравенство $|I_l| \geqslant \frac{1}{2}(2^l g)^2 = 1/e^{Kl}$, где $K > 0$ – некоторая новая константа, используя (18), мы получаем, что

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{R_\nu}{\nu} \ll e^{-Bl} + \psi\biggl(\frac{1}{e^{Kl}}\biggr)\mu(A_l(I_k, \delta)). \tag{20}$$

Из оценки (16) следует, что при достаточно малом η правая часть (20) стремится к 0 при $\nu \to \infty$. Значит, для характеристической функции χ интервала I_k выполнено

$$\limsup_{\nu\to\infty} \biggl|\frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} - \mu(I_k)\biggr| = 0,$$

т.е.

$$\lim_{\nu\to\infty} \biggl|\frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} - \mu(I_k)\biggr| = 0.$$

Возьмем теперь произвольный интервал (a,b). Так как длины интервалов I_n убывают, то (a,b) может быть аппроксимирован с любой точностью такими интервалами. Теорема 4 доказана.

б) Второй пример является обобщением теоремы Пятецкого-Шапиро на случай системы с бесконечным алфавитом.

Пусть p_a, $a=1,2,3,\dots$, – положительные числа, $\sum_{a=1}^{\infty}p_a=1$. Рассматривается пространство Ω бесконечных вправо последовательностей

$$\xi=(\xi_1,\dots,\xi_\nu,\dots)$$

с мерой μ, определенной на элементарных цилиндрических множествах

$$\Delta(a_1,\dots,a_n)=\{\xi:\xi_j=a_j,\ j=1,\dots,n\}$$

по правилу $\mu\Delta(a_1,\dots,a_n)=p(a_1,\dots,a_n)=p_{a_1}\cdots p_{a_n}$ и продолженной на всю σ-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами. Для набора $a=(a_1,\dots,a_n)$ будем использовать обозначение $p(a)=p(a_1,\dots,a_n)$. Преобразовние сдвига влево мы будем снова обозначать T (хорошо известно, что оно эргодично).

Теорема 5. *Пусть при некотором положительном η_0 ряд*

$$\sum_{a=1}^{\infty}p_a^{1-\eta_0}$$

сходится. Пусть $\varphi(t)$ – произвольная положительнозначная функция, стремящаяся к 0 при $t\to0$ и такая, что для всякого положительного η выполнено $\varphi(t)=O(t^{1-\eta})$, $t\to0$. Если для любого элементарного цилиндра I выполнено

$$\limsup_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu}\leqslant\varphi(\mu(I)), \tag{21}$$

то для характеристической функции χ произвольного множества $E\in\Gamma$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu}=\mu(E).$$

Доказательство. Определим

$$\sigma_{n,\delta}(p,q;x,y)=\sum_{k:k/n\notin[p-\delta,p+\delta]}C_n^kp^{(1-x)k}q^{(1-y)(n-k)}$$

и для набора $a=(a_1,\dots,a_t)$ величину

$$\sigma_{n,\delta}(a,\eta)=\sum_{k:k/n\notin[p(a)-\delta,p(a)+\delta]}C_n^k\bigl(p(a)^{(1-\eta)}\bigr)^k\cdot\Biggl(\sum_{b=(b_1,\dots,b_t)\neq a}p(b)^{1-\eta}\Biggr)^{n-k}.$$

Лемма. *Для любых вещественных чисел $p,q>0$, $p+q=1$, существует постоянная $\delta_0(p,q)$ такая, что для каждого положительного $\delta<\delta_0(p,q)$ найдутся величины*

$$w_\delta(p,q),\ \varepsilon_\delta(p,q),\ n_\delta(p,q)$$

такие, что при всех $n>n_\delta(p,q)$ выполнено

$$\sup_{x,y\in[0,w_\delta(p,q)]}\sigma_{n,\delta}(p,q;x,y)<\exp(-\varepsilon_\delta(p,q)n).$$

Доказательство леммы полностью аналогично соотетствующему утверждению из [3]: надо заметить, что максимум функции $g(k)=C_n^kp_1^kq_1^{n-k}$ достигается при

$$\frac{k}{n}\sim\frac{p_1}{p_1+q_1}$$

(и при переходе через этот максимум возрастание сменяется убыванием) и что

$$\sigma_{n,\delta}(p,q;x,y)\leqslant\biggl(\kappa_\delta^{(+)}(p,q,;x,y,)\Bigl(1+O\Bigl(\frac1n\Bigr)\Bigr)\biggr)^n+\biggl(\kappa_\delta^{(-)}(p,q,;x,y)\Bigl(1+O\Bigl(\frac1n\Bigr)\Bigr)\biggr)^n,$$

где

$$\kappa_\delta^{(\pm)}(p,q,;x,y)=\frac{p^{(1-x)(p\pm\delta)}q^{(1-y)(q\mp\delta)}}{(p\pm\delta)^{p\pm\delta}(q\mp\delta)^{q\mp\delta}}$$

– непрерывная в нуле функция переменных x,y и

$$\lim_{x,y\to0}\kappa_\delta^{(\pm)}(p,q,;x,y,)=1-\frac{\delta^2}{2}\left(\frac1p+\frac1q\right)+O(\delta^3),\qquad\delta\to0.$$

Следствие леммы. *Пусть при некотором положительном η_0 ряд*

$$\sum_{a=1}^{\infty}p_a^{1-\eta_0}$$

сходится. Тогда для любого набора $a=(a_1,\dots,a_t)$ найдется положительное $\delta(a)$ такое, что для каждого положительного $\delta<\delta(a)$ найдутся положительные

$$\eta(\delta,a),\ \varepsilon(\delta,a),\ n(\delta,a)$$

такие, что при всех $\eta\in[0,\eta(\delta,a)]$ и при всех $n>n_\delta(p,q)$ выполнено

$$\sigma_{n,\delta}(a,\eta)<\exp(-\varepsilon(\delta,a)n). \tag{22}$$

Для того чтобы получить сформулированное следствие, полагаем $p=p(a)$, $q=1-p(a)$ и используем, что функции $f(\eta)=p(a)^{1-\eta}$ и $g(\eta)=\sum_{b:b\neq a}(p(b))^{1-\eta}$ при η близких к нулю являются непрерывными; в частности, на некотором интервале $0\leqslant\eta\leqslant\eta(\delta,a)$ имеем $g(0)=1-p(a)\leqslant g(\eta)\leqslant(1-p(a))^{w_\delta(p,q)}$. Затем применяем лемму.

Если теперь рассмотреть характеристическую функцию χ_a элементарного цилиндра с фиксированными первыми знаками $a=(a_1,\dots,a_t)$, то при достаточно большом n будет иметь место $H_\varphi(A_n(\chi_a,\delta))\ll\sigma_{n,\delta}(a,\eta)$. Теперь согласно (22) $H_\varphi(A_n(\chi_a,\delta))\to0$, $n\to\infty$, и теорема 5 вытекает из теоремы 1.

Теорема 5 доказана.

7. Замечания.

Замечание 1. Теоремы 1, $1'$ носят общий характер.

Замечание 2. Теоремы 3–5 имеют дело с конкретными динамическими системами. Легко видеть, что теоремы 3 и 5 неулучшаемы, т.е. ослабить условие на функцию ψ в этих теоремах нельзя (см. [3]). В теореме 4 вместо условия $\varphi(t) = O(te^{-\eta\sqrt{\log 1/t}})$, $t \to 0$, наверное, можно потребовать лишь условие $\varphi(t) = O(t^{1-\eta})$, $t \to 0$, но доказать это мы не можем.

Замечание 3. Теоремы 3, 4 доказаны нами с использованием сложных теорем о больших уклонениях [13]. Теорема 5 тоже может быть выведена из теоремы о больших уклонениях для сумм независимых случайных величин (см. [10, гл. 4, § 5]), однако по причине ее простоты мы привели элементарное доказательство.

Замечание 4. Не вызывает сомнения, что подобного рода усиленный критерий Пятецкого-Шапиро справедлив и в задаче о распределении дробных долей матричной показательной функции, рассматривавшейся в [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Изд-во “Факториал”, 1999.
[2] Пятецкий-Шапиро И. И. О законах распределения дробных долей показательной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. С. 47–52.
[3] Пятецкий-Шапиро И. И. О расспределении дробных долей показательной функции // Ученые записки МГПИ. 1957. Т. 58. № 2. С. 317–322.
[4] Постников А. Г. Арифметическое моделирование случайных процессов. Тр. МИАН. Т. 57. М.: Наука, 1960.
[5] Постников А. Г. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений. Тр. МИАН. Т. 82. М.: Наука, 1966.
[6] Schmidt W. M. Badly approximable numbers and certain games // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123. P. 178–199.
[7] von Neumann J. Physical applications of the ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. 1932. V. 18. P. 263–266.
[8] Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 73–124.
[9] Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Наука, 1978.
[10] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
[11] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
[12] Романовский В. И. Дискретные цепи Маркова. М.: Гостехиздат, 1949.
[13] Саулис Л., Статулявичус В. Предельные теоремы о больших уклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: moshche@mech.math.msu.su, ishkredov@rambler.ru

Поступило
10.04.2002