ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2005, том 400, № 2, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 511.218+511.336

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГАУЭРСА

© 2005 г. И. Д. Шкредов

Представлено академиком В.В. Козловым 26.05.2004 г.

Поступило 27.05.2004 г.

1. В 1927 г. Б.Л. Ван дер Варден доказал свою знаменитую теорему об арифметических прогрессиях [1]:

Теорема 1. *Пусть h и k – натуральные числа. Существует такое число $N(h, k)$, что для любого натурального $N \geq N(h, k)$ и любого разбиения множества* 1, 2, …, N *на h подмножеств, одно из подмножеств содержит арифметическую прогрессию длины k.*

Пусть N – натуральное число. Положим

$$a_k(N) = \frac{1}{N}\max\{|A|: A \subseteq [1, N] \text{ и } A \text{ не содержит арифметических прогрессий длины } k\},$$

где $|A|$ означает мощность множества A. В [2] П. Эрдеш и П. Туран высказали гипотезу, согласно которой в любом множестве положительной плотности найдется арифметическая прогрессия заданной длины. Другими словами, они предположили, что для любого $k \geq 3$

$$a_K(N) \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{1}$$

Ясно, что из этого предположения вытекает теорема Ван дер Вардена.

Простейший случай $k = 3$ гипотезы (1) был доказан К.Ф. Ротом в [3], который, используя метод Харди–Литлвуда, доказал неравенство $a_3(N) \ll \frac{1}{\ln\ln N}$. Наилучший на сегодняшний день результат об оценке сверху величины $a_3(N)$ принадлежит Дж. Бургейну [4]. Он доказал, что

$$a_3(N) \ll \sqrt{\frac{\ln\ln N}{\ln N}}. \tag{2}$$

Для произвольного k гипотеза (1) была доказана Е. Семереди [5] в 1975 г. В своем доказательстве Семереди использует трудные комбинаторные аргументы. Альтернативное доказательство было предложено Х. Фёстенбергом в [12]. Его подход использует методы эргодической теории. Фёстенберг показал, что теорема Е. Семереди эквивалентна утверждению о кратной возвращаемости для почти всех точек в произвольной динамической системе.

Ф.А. Беренд в работе [7] получил нижнюю оценку величины $a_3(N)$:

$$a_3(N) \gg \exp\left(-C(\ln N)^{\frac{1}{2}}\right),$$

где C – некоторая положительная вычислимая константа. Оценку снизу величины $a_k(N)$ для произвольного k см. в [8].

К сожалению, методы Семереди дают очень слабые верхние оценки для $a_k(N)$. Эргодический подход вообще не дает никаких оценок. Только в 2001 г. В.Т. Гауэрс [6] получил количественный результат о скорости стремления к нулю величины $a_k(N)$ для $k \geq 4$. Он доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\delta > 0$, $k \geq 4$ и $N \geq \exp\exp(C\delta^{-K})$, где $C, K > 0$ – некоторые эффективные константы. Пусть A – произвольное множество из $\{1, 2, \ldots, N\}$, $|A| \geq \delta N$.*

Тогда в A есть арифметическая прогрессия длины k.

Другими словами, В.Т. Гауэрс доказал, что для произвольного $k \geq 4$ имеет место неравенство $a_k(N) \gg \frac{1}{(\ln\ln N)^{c_k}}$, где константа c_k зависит только от k.

В настоящей работе мы будем решать следующую задачу. Рассмотрим двумерную решетку $[1, N]^2$ с базисом $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Пусть

$$L(N) = \frac{1}{N^2}\max\{|A|: A \subseteq [1, N^2] \text{ и } A \text{ не содержит троек вида } (k, m), (k + d, m), (k, m + d), d > 0\}. \tag{3}$$

Тройку из (3) мы будем называть уголком. В работах [9, 12] было доказано, что величина $L(N)$ стремится к 0, когда N стремится к бесконечнос-

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

ти. В.Т. Гауэрс (см. [6]) поставил вопрос о скорости сходимости $L(N)$ к 0.

В работе [11] В. Ву предложил следующее решение этого вопроса. Пусть $\ln_{[1]} = \ln N$ и для $l \geq$ $\geq \ln_{[l]} N = \ln(\ln_{[l-1]} N)$. Пусть k – наибольшее натуральное число такое, что $\ln_{[k]} N \geq 2$. Тогда положим $\ln_* N = k$. В. Ву доказал

$$L(N) \leq \frac{100}{\ln_*^{1/4} N}.$$

Основным результатом нашего сообщения является

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\delta > 0$, $N \geq \exp\exp\exp(\delta^{-c})$, $c > 0$ – *некоторая абсолютная константа и* $A \subseteq$ $\subseteq \{1, 2, \ldots, N\}^2$ *произвольное подмножество мощности не меньше* δN^2.

Тогда A содержит тройку вида (k, m), $(k + d, m)$, $(k, m + d)$, *где* $d > 0$.

Таким образом, мы доказываем оценку $L(N) \ll$ $\ll \frac{1}{(\ln\ln\ln N)^{C_1}}$, где $C_1 > 0$ – некоторая абсолютная константа.

Кроме того, мы получим простейшую оценку снизу для величины $L(N)$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ *такое, что для всех натуральных* $N \geq N_\varepsilon$ *выполнено*

$$L(N) \geq N^{-\frac{\ln 2 + \varepsilon}{\ln\ln N}}.$$

Использованные конструкции развивают подход из работ [6, 10].

2. С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Вначале мы дадим несколько определений (см. [6]).

Пусть A – произвольное множество из $\mathbf{Z}_N$, $|A| =$ $= \delta N$. Обозначим через $\chi_A(s)$ характеристическую функцию множества A. Функция $f(s) = \chi_A(s) - \delta$ называется балансовой функцией множества A. Обозначим через D замкнутый диск на комплексной плоскости с центром в 0 и радиусом 1.

О п р е д е л е н и е 1. Функция f из $\mathbf{Z}_N$ в D называется α-р а в н о м е р н о й, если

$$\sum_k \left| \sum_s f(s)\overline{f(s-k)} \right|^2 \leq \alpha N^3. \qquad (4)$$

Будем говорить, что множество A является α-р а в н о м е р н ы м, если его балансовая функция α-равномерна.

Пусть $E_1 \times E_2$ – некоторое подмножество $\mathbf{Z}_N^2$ и f: $\mathbf{Z}_N^2 \to D$ – некоторая функция. Будем писать f: $E_1 \times E_2 \to D$, если вне $E_1 \times E_2$ функция f равна 0.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть α – любое действительное число, $\alpha \in [0, 1]$. Пусть $E_1 \times E_2$ – некоторое подмножество $\mathbf{Z}_N^2$. Функция f: $E_1 \times E_2 \to D$ называется α-р а в н о м е р н о й относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, если

$$\sum_{\mathbf{s}, r} \sum_r f(\mathbf{s})\overline{f(\mathbf{s} + u\mathbf{e}_2) f(\mathbf{s} + r\mathbf{e}_1)} f(\mathbf{s} + u\mathbf{e}_2 + r e_1) \leq$$
$$\leq \alpha |E_1|^2 |E_2|^2. \qquad (5)$$

Пусть множество A принадлежит некоторому множеству $E_1 \times E_2$ и $\chi(\mathbf{s}) = \chi_A(\mathbf{s})$ – его характеристическая функция. Определим плотности $\delta_m = \delta_m^{\mathbf{e}_1}$ и $\gamma_k = \gamma_k^{\mathbf{e}_2}$ по формулам

$$\delta_m = \frac{1}{|E_1|} \sum_{p=1}^{N} \chi(m\mathbf{e}_2 + p\mathbf{e}_1),$$

$$\gamma_k = \frac{1}{|E_2|} \sum_{p=1}^{N} \chi(k\mathbf{e}_1 + p\mathbf{e}_2).$$

Функцию $f(\mathbf{s}) = (\chi(\mathbf{s}) - \delta_m)\chi_{E_1 \times E_2}(\mathbf{s})$ назовем балансовой функцией множества A.

Будем говорить, что множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является α-равномерным относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, если его балансовая функция α-равномерна относительно этого базиса.

Наше первое предложение относится к ситуации, когда множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является α-равномерным относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, а сами множества E_1, E_2 являются α-равномерными в смысле определения 4.

Т е о р е м а 4. *Пусть множество A принадлежит* $E_1 \times E_2$ *и имеет мощность* $|A| = \delta|E_1| \cdot |E_2|$. *Пусть* $|E_1| = \beta_1 N$, $|E_2| = \beta_2 N$ *и множества* E_1, E_2 *являются* $10^{-330}\beta_1^{24}\beta_2^{24}\delta^{132}$ *равномерными. Пусть также A является* α-*равномерным относительно базиса* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\alpha = 10^{-108}\delta^{44}$, $N \geq 10^{10}(\delta^4\beta_1\beta_2)^{-1}$ *и* $\sum_m |\delta_m - \delta|^2 \leq \alpha\beta_2 N$.

Тогда A содержит уголок.

Если $A \subseteq E_1 \times E_2$ не α-равномерно, а E_1, E_2 произвольны, то мы можем доказать следующее

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть множество* $A \subseteq$ $\subseteq E_1 \times E_2$, *имеет мощность* $|A| = |E_1| \cdot |E_2|$. *Пусть* $\alpha > 0$ – *действительное число и A не* α-*равномерно относительно базиса* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Тогда существуют множества $G_1 \subseteq E_1$ и $G_2 \subseteq E_2$, для которых выполнено

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > (\delta + 2^{-500}\alpha^{70})|G_1| \cdot |G_2|, \qquad (6)$$

$$|G_1|, |G_2| > 2^{-500}\alpha^{70}\min\{|E_1|, |E_2|\}. \qquad (7)$$

Мы будем говорить, что двумерная арифметическая прогрессия P есть правильный квадрат, если $P = P_1 \times P_2$, где P_1, P_2 – одномерные прогрессии с одинаковыми разностями и равной мощности.

Предложение 3. *Пусть $W_1, W_2 \subseteq \mathbf{Z}_N$ – некоторые множества, $|W_1| = \beta_1 N$, $|W_2| = \beta_2 N$, $\zeta \in (0, 1)$ – некоторое число, $\alpha(s) = Ks^\rho$, $K \in (0, 1]$, $\rho \ge 4$ и $a = \alpha(\zeta\beta_1\beta_2)$. Предположим, что множество A содержится в $W_1 \times W_2$, $|A| = \delta|W_1|, |W_2|$ и $N \ge (Ca^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/a}}$, где $C = 2^{1000\rho}$, $c_1 = 100\rho$ и $c_2 = 2^{-128}$.*

Тогда существует такой правильный квадрат $P = P_1 \times P_2$, $|P| \ge N^{c_2^{1/a}}$ и множества R_1, R_2, $R_1 \subseteq \subseteq (W_1 \cap P_1)$, $R_2 \subseteq (W_2 \cap P_2)$, $|R_1 \times R_2| \ge \zeta\beta_1\beta_2|P|$, обладающие следущими свойствами: R_1, R_2 являются $\alpha(\delta_{P_1}(R_1))^{1/2}$, $\alpha(\delta_{P_2}(R_2))^{1/2}$-равномерными соответственно в P_1 и P_2 и $\delta_{R_1 \times R_2}(A) \ge \delta - 4\zeta$.

Схема доказательства теоремы 1.3. Пусть $N_1 \in N$ и $J_1, J_2 \subseteq \mathbf{Z}_{N_1}$ – некоторые множества, $|J_1| = \omega_1 N_1$, $|J_2| = \omega_2 N_1$. Предположим, что множество A принадлежит $J_1 \times J_2$, не содержит уголков и имеет мощность $|A| = \delta|J_1| \cdot |J_2|$. Предположим также, что J_1, J_2 являются $10^{-330}\omega_1^{24}\omega_2^{24}\delta^{132}$-равномерными и $N_1 \ge 10^{10}(\delta^4\omega_1\omega_2)^{-1}$. Мы докажем, что при этих условиях у множеств J_1 и J_2 существуют подмножества I_1 и I_2, а у множества A существует подмножество A', такие, что

1) $A' \subseteq I_1 \times I_2$.

2) $|A'| \ge (\delta + 10^{-10000}\delta^{3500})|I_1||I_2|$.

3) $|I_1|, |I_2| \ge 10^{-10000}\delta^{3500}\min(\omega_1 N_1, \omega_2 N_1)$.

Пусть $\alpha_1 = 10^{-108}\delta^{44}$. Если $\sum_m |\delta_m - \delta|^2 > \alpha\omega_2 N$, то существование множеств I_1, I_2 и A' очевидно. Если множество A является $10^{-108}\delta^{44}$-равномерным относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, то по теореме 4 A содержит уголок. Если множество A не является $10^{-108}\delta^{44}$-равномерным, относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, то по предложению 2 у множеств J_1 и J_2 существуют подмножества I_1, I_2, а у множества A подмножество $A' = A \cap (I_1 \times I_2)$ для которых выполнены свойства 1)–3). Свойство 2 можно даже заменить на более сильное, а именно $|A'| \ge (\delta + 10^{-9000}\delta^{3500})\, |I_1| \cdot |I_2|$.

Приступим теперь к непосредственному доказательству теоремы. Пусть множество $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}^2$ имеет мощность δN^2 и не содержит уголков. Пусть $E_1 = \{1, 2, \ldots, N\}$, $E_2 = \{1, 2, \ldots, N\}$. Тогда E_1 и E_2 являются 0-равномерными множествами. Кроме того, по условию теоремы $N \ge 10^{10}\delta^{-4}$. Рассуждая, как в начале доказательства теоремы 3, находим в A подмножество A' и $G_1 \subseteq E_1$, $G_2 \subseteq E_2$, удовлетворяющие условиям 1–3, $|G_1| = \beta_1 N$, $|G_2| = \beta_2 N$. Множество A', так же как и A, не содержит уголков и имеет плотность δ_1 в $G_1 \times G_2$ не меньше, чем $\delta + 10^{-9000}\delta^{3500}$.

Пусть $\zeta = 10^{-10000}\delta^{3500}$. Рассмотрим функцию $\alpha(s) = 10^{-660}(\zeta\beta_1\beta_2)^{48}\delta^{264}s^{48}$ и пусть $a = \alpha(\zeta\beta_1\beta_2)$. По условию теоремы $N \ge (Ca^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/a}}$, значит, мы можем применить предложение 3 к множествам G_1, G_2 и A'. По этому предложению существует такой правильный квадрат $P = P_1 \times P_2$, $|P| \ge N^{c_2^{1/a}}$ и множества R_1, R_2, $R_1 \subseteq (G_1 \cap P_1)$, $R_2 \subseteq (G_2 \cap P_2)$, $|R_1| = \gamma_1|P_1|$, $|R_2| = \gamma_2|P_2|$, $|R_1 \times R_2| \ge \zeta\beta_1\beta_2|P|$, обладающие следущими свойствами: R_1, R_2 являются $10^{-330}\gamma_1^{24}\gamma_2^{24}\delta^{132}$-равномерными соответственно в P_1 и P_2 и, кроме того, $\delta_{R_1 \times R_2}(A') \ge \delta_1 - 4\zeta$. Плотность A в $R_1 \times R_2$ не меньше, чем $\delta_1 - 4 \cdot 10^{-10000}\delta^{3500} \ge \delta + 10^{-10000}\delta^{3500}$.

Применим те же рассуждения к правильному квадрату P, $10^{-330}\gamma_1^{24}\gamma_2^{24}\delta^{132}$-равномерным множествам $R_1, R_2, R_1 \times R_2 \subseteq P$ и множеству $A'' = A' \cap (R_1 \times R_2)$. Мы можем повторить наши рассуждения несколько раз.

Так как плотность A в множествах вида $R_1^{(i)} \times R_2^{(i)}$ на каждом шаге возрастает на величину $10^{-10000}\delta^{3500}$, то плотность A в этих множествах стремится к 1. Иными словами, через некоторое число шагов мы найдем правильный квадрат $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ и $10^{-330}\pi_1^{24}\pi_2^{24}\delta^{132}$-равномерные множества $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $|\mathbf{R}_1| = \pi_1|\mathbf{P}_1|$, $|\mathbf{R}_2| = \pi_2|\mathbf{P}_2|$, такие, что $A \cap (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)$ будет $10^{-108}\delta^{44}$–равномерным, относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ в $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$. Если

$$|\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_2| \ge 10^{10}(\delta^4\pi_1\pi_2)^{-1}, \qquad (8)$$

то по теореме 4 A содержит уголок. Легко проверить, что общее количество шагов этой итеративной процедуры не превосходит $O(\delta^{-\bar{c}})$, где $\bar{c} > 0$ – абсолютная константа. Кроме того, мощности прогрессий $P^{(i)}$, $P^{(i+1)}$ на i и $(i + 1)$-м индуктивном шаге связаны соотношением

$$|P^{(i+1)}| \ge |P^{(i)}|^{\kappa_0^{(1/\delta)^{\delta^{-K}}}}$$

где $0 < \kappa_0 < 1$, $K > 0$. Имеем $N \ge \exp\exp\exp(\delta^{-c})$. Небольшой подсчет показывает, что это условие обеспечивает выполнение неравенства (8) на последнем шаге процедуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект НШ-136.2003.1) и INTAS (грант 03–51–5070).

Автор выражает огромную благодарность Н.Г. Мощевитину за непрестанный интерес к работе и долготерпение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Van der Waerden B.L.* // Nieuw arch. wisk. 1927. № 15. P. 212–216.
2. *Erdos P., Turan P.* // J. London Math. Soc. 1936. № 11. P. 261–264.
3. *Roth K.F.* // J. London Math. Soc. 1953. № 28. P. 245–252.
4. *Bourgain J.* // Geom. Funct. Anal. 1999. № 9. P. 968–984.
5. *Szemeredi E.* // Acta arith. 1975. № 27. P. 299–345.
6. *Gowers W.T.* // Geom. Funct. Anal. 2001. V. 11. № 3. P. 465–588.
7. *Behrend F.A.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1946. № 23. P. 331–332.
8. *Rankin R.A.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1961. V. 65. № 4. Sec. A. P. 332–344.
9. *Ajtai M., Szemeredi E.* // Stud. sci. math. hung. 1974. № 9. P. 9–11.
10. *Chung F.R.K., Graham R.L., Wilson R.M.* // Combinatorica. 1989. № 9 (4). P. 345–362.
11. *Vu V.H.* // Ann. Combinat. 2002. № 6. P. 229–233.
12. *Furstenberg H.* Reccurence in ergodic theory and combinatorial number theory. Princeton (N. J.): Princeton Univ. Press, 1981. 292 p.