ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2005, том 405, № 3, с. 1–5

МАТЕМАТИКА

УДК 511.218 + 511.336

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ СЕМЕРЕДИ

© 2005 г. И. Д. Шкредов

Представлено академиком В.В. Козловым 18.03.2005 г.

Поступило30.03.2005 г.

1. Пусть N – натуральное число. Положим

$$a_k(N) = \frac{1}{N}\max\{|A|: A \subseteq [1, N] \text{ и } A \text{ не содержит арифметических прогрессий длины } k\},$$

где $|A|$ означает мощность множества A. В [1] П. Эрдеш и П. Туран высказали гипотезу, согласно которой в любом множестве положительной плотности найдется арифметическая прогрессия заданной длины. Другими словами, они предположили, что для любого $k \geq 3$

$$a_k(N) \to 0 \text{ при } N \to \infty. \tag{1}$$

Простейший случай $k = 3$ гипотезы (1) был доказан К.Ф. Ротом в [2]. В своей работе Рот, используя метод Харди–Литлвуда, доказал неравенство $a_3(N) \ll \frac{1}{\ln\ln N}$. Наилучший на сегодня результат об оценке сверху величины $a_3(N)$ принадлежит Дж. Бургейну [3]. Он доказал, что

$$a_3(N) \ll \sqrt{\frac{\ln\ln N}{\ln N}}. \tag{2}$$

Для произвольного k гипотеза (1) была доказана Е. Семереди [4] в 1975 г. В своем доказательстве Семереди использует трудные комбинаторные аргументы. Альтернативное доказательство было предложено Х. Фёстенбергом в [9]. Его подход использует методы эргодической теории.

К сожалению, методы Семереди дают очень слабые верхние оценки для $a_k(N)$. Эргодический подход вообще не дает никаких оценок. Только в 2001 г. В.Т. Гауэрс [5] получил количественный результат о скорости стремления к нулю величины $a_k(N)$ для $k \geq 4$. Он доказал следующую теорему.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Теорема 1. *Пусть $k \geq 4$. Тогда*

$$a_k(N) \ll \frac{1}{(\ln\ln N)^{c_k}},$$

где $c_k > 0$ – некоторая эффективная постоянная, зависящая только от k.

В настоящей работе мы будем решать следующую задачу. Рассмотрим двумерную решетку $[1, N]^2$ с базисом $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Пусть

$$L(N) = \frac{1}{N^2}\max\{|A|: A \subseteq [1, N]^2 \text{ и } A \text{ не содержит троек вида } (k, m), (k + d, m), (k, m + d), d > 0\}. \tag{3}$$

Тройку из (3) мы будем называть уголком. В работах [6, 9] было доказано, что величина $L(N)$ стремится к 0, когда N стремится к бесконечности. В.Т. Гауэрс (см. [5]) поставил вопрос о скорости сходимости $L(N)$ к 0.

В работе [10] была доказана следующая теорема (см. также [7, 8]).

Теорема 2. *Пусть $\delta > 0$, $N \gg$ exp exp exp(δ^{-c}), $c > 0$ – некоторая эффективная константа и $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}^2$ – произвольное подмножество мощности не меньше δN^2.*

Тогда A содержит уголок.

Основным результатом нашего сообщения является

Теорема 3. *Пусть $\delta > 0$, $N \gg$ exp exp(δ^{-c}), $c > 0$ – некоторая эффективная константа и $A \subseteq \{1, \ldots, N\}^2$ – произвольное подмножество, мощности не меньше δN^2.*

Тогда A содержит уголок.

Таким образом, мы доказываем оценку $L(N) \ll \frac{1}{(\ln\ln N)^{C_1}}$, где $C_1 = \frac{1}{c}$.

Замечание 1. Константу c в теореме 3 можно взять равной 73.

Коренное отличие настоящего сообщения от работы [10] состоит в появлении нового объекта, так называемого множества Бора. Заметим, что наилучшая на сегодня оценка величины $a_3(N)$ доказывается именно с использованием этих множеств (см. [3]).

2. Схема доказательства. Пусть Q – некоторое подмножество целых чисел. Будем обозначать той же буквой Q характеристическую функцию этого множества.

Одним из ключевых моментов работы [3] было понятие множеств Бора.

Пусть N и d – натуральные числа, $\varepsilon > 0$ – действительное число и $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) \in \mathbf{T}^d$.

Определение 1. Множеством Бора $\Lambda = \Lambda_{\theta, \varepsilon, N}$ называется множество

$$\Lambda_{\theta, \varepsilon, N} = \{n \in \mathbf{Z} |\ |n| \le N,\ \|n\theta_j\| < \varepsilon \text{ для } j = 1, 2, \dots, d\}.$$

Определение 2. Пусть $0 < \kappa < 1$ – некоторое число. Множеством Бора $\Lambda = \Lambda_{\theta, \varepsilon, N}$ называется регулярным, если для любых ε', N', таких, что

$$|\varepsilon - \varepsilon'| < \frac{\kappa}{100d}\varepsilon, \quad |N - N'| < \frac{\kappa}{100d}N,$$

выполнено

$$1 - \kappa < \frac{|\Lambda_{\theta, \varepsilon', N'}|}{|\Lambda_{\theta, \varepsilon, N}|} < 1 + \kappa.$$

Первая необходимая нам лемма доказана в [3].

Лемма 1. *Пусть $0 < \kappa < 1$ – некоторое число и $\Lambda_{\theta, \varepsilon, N}$ – множество Бора.*

Тогда существует пара (ε_1, N_1) со свойствами

$$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon_1 < \varepsilon, \quad \frac{N}{2} < N_1 < N,$$

так что множество Бора $\Lambda_{\theta, \varepsilon_1, N_1}$ является регулярным.

Определение 3. Пусть $\varepsilon \in (0, 1]$ – некоторое число и $\Lambda_{\theta, \varepsilon_0, N_0}$ – множество Бора, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$. Регулярное множество Бора $\Lambda' = \Lambda_{\theta', \varepsilon', N'}$ называется ε-сопровождающим множества Λ, если $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d, \theta_{d+1}, \dots, \theta_{d+k})$, $k \ge 0$, $\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \le \varepsilon' \le \varepsilon\varepsilon_0$, $\frac{\varepsilon N_0}{2} \le N' \le \varepsilon N_0$. Из леммы 1 вытекает существование такого множества.

Мы будем считать, что $k = 0$, если не оговорено противное.

Пусть f – функция из $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{C}$, принимающая конечное число ненулевых значений. Обозначим через $\hat{f}(x)$ коэффициент Фурье функции f

$$\hat{f}(x) = \sum_{s \in \mathbf{Z}} f(s)e(-sx),$$

где $e(x) = e^{2\pi i x}$.

Определение 4. Пусть Λ – множество Бора, $Q \subseteq \Lambda$, $|Q| = \delta|\Lambda|$, α, ε – некоторые положительные числа и Λ' есть ε-сопровождающее множества Λ. Рассмотрим множество

$$B = \{m \in \Lambda |\ \|(Q \cap (\Lambda' + m) - \delta(\Lambda' + m))^{\wedge}\|_\infty \ge \alpha|\Lambda''|\}.$$

Множество Q называется (α, ε)-равномерным, если

$$|B| \le \alpha|\Lambda|, \tag{4}$$

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{m \in \Lambda} |\delta_{\Lambda' + m}(Q) - \delta|^2 \le \alpha^2, \tag{5}$$

$$\|(Q \cap \Lambda - \delta\Lambda)^{\wedge}\|_\infty \le \alpha|\Lambda|. \tag{6}$$

Похожее определение (α, ε)-равномерности было дано в [5].

Обозначим через $\mathbf{D}$ замкнутый диск на комплексной плоскости с центром в 0 и радиусом 1. Пусть R – некоторое множество. Будем писать f: $R \to \mathbf{D}$, если вне R функция f равна нулю.

Обозначим через $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ векторы $(1, 0)$ и $(0, -1)$.

Пусть Λ_1, Λ_2 – множества Бора, $\varepsilon > 0$ – некоторое число и Λ' есть ε-сопровождающее множества Λ_1. Пусть также E_1, E_2 – некоторые подмножества Λ_1, Λ_2 соответственно и $|E_1| = \beta_1|\Lambda_1|$, $E_2 = \beta_2|\Lambda_2|$.

Определение 5. Функция f: $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \to \mathbf{D}$ называется (α, ε)-равномерной относительно прямоугольной нормы, если

$$\|f\|^4_{\Lambda_1 \times \Lambda_2, \varepsilon} = \sum_{i \in \Lambda_1}\sum_{j \in \Lambda_2}\sum_{k}\sum_{m, u}\Lambda'(m - k - i)\Lambda'(u - k - i) \times$$

$$\times \left|\sum_r \Lambda'(k + r - j)f(r, m)f(r, u)\right|^2 \le \tag{7}$$

$$\le \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'|^4|\Lambda_1|^2|\Lambda_2|.$$

Обозначим множество Λ' в формуле (7) через $\Lambda_1(\varepsilon)$.

Определение 6. Пусть $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|A| = \delta\beta_1\beta_2|\Lambda_1||\Lambda_2|$, $\delta > 0$ и $f(\mathbf{s}) = A(\mathbf{s}) - \delta(E_1 \times E_2)(\mathbf{s})$. Пусть $f_l(s) = f(s_1 + l, s_2)\Lambda'(s_1)$, $l \in \Lambda_1$. Рассмотрим множество

$$B = \{l \in \Lambda_1 |\ \|f_l\|^4_{\Lambda' \times \Lambda_2, \varepsilon} > \alpha\beta_1^2\beta_2^2|\Lambda'(\varepsilon)|^4|\Lambda'|^2|\Lambda_2|\}.$$

Множество A называется $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$-равномерным относительно прямоугольной нормы, если $|B| \le \alpha_1|\Lambda_1|$.

Наше первое предложение относится к ситуации, когда множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$-равномерным относительно прямоугольной нормы, а сами множества E_1, E_2 являются (α, ε)-равномерными в смысле определения 4.

Пусть Λ – некоторое множество Бора, $\Lambda = \Lambda_{\theta, \varepsilon_1, N_1}$, $\theta \in \mathbf{T}^d$, и $E_1, E_2 \subseteq \Lambda$, $|E_1| = \beta_1|\Lambda|$, $|E_2| = \beta_2|\Lambda|$. Обозначим через $\mathcal{P}$ декартово произведение $E_1 \times E_2$.

Теорема 4. *Пусть множество A принадлежит $E_1 \times E_2$ и имеет мощность* $|A| = \delta|E_1||E_2|$. *Пусть множества E_1, E_2 являются* $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$-*равномерными*, $\alpha_0 = 2^{-2000}d^{96}\beta_1^{48}\beta_2^{48}$, $\varepsilon = \frac{2^{-100}\alpha_0^2}{100d}$. *Пусть также A является* $(\alpha, \alpha_1, \varepsilon)$-*равномерным относительно прямоугольной нормы*, $\alpha = 2^{-100}\delta^{12}$, $\alpha_1 = 2^{-7}\delta$ *и*

$$\ln N_1 \ge 2^{10} d \ln\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon}. \tag{8}$$

Тогда A содержит тройку вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ с $d \neq 0$.

Пусть $A \subseteq E_1 \times E_2$ не содержит троек вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ с $d \neq 0$. Используя теорему 4, мы получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть множество A принадлежит $\mathcal{P}$, имеет мощность $|A| = \delta|E_1| \cdot |E_2|$ и не содержит троек вида* $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ с $d \neq 0$. *Пусть множества E_1, E_2 являются* $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$-*равномерными*, $\alpha_0 = 2^{-2000}d^{96}\beta_1^{48}\beta_2^{48}$, $\varepsilon = \frac{2^{-100}\alpha_0^2}{100d}$, $\varepsilon' = 2^{-10}\varepsilon^2$ *и*

$$\ln N \ge 2^{10} d \ln\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Тогда существует множество Бора $\tilde{\Lambda}$ и такой вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{Z}^2$, *что для множеств* $F_1 \subseteq E_1 \cap (\tilde{\Lambda} + y_1)$, $F_{21} \subseteq E_2 \cap (\tilde{\Lambda} + y_2)$ *выполнено*

$$|F_1| \ge 2^{-125}\delta^{12}\beta_1|\tilde{\Lambda}|, \quad |F_2| \ge 2^{-125}\delta^{12}\beta_2|\tilde{\Lambda}|, \tag{9}$$

$$\delta_{F_1 \times F_2}(A) \ge \delta + 2^{-500}\delta^{37}. \tag{10}$$

При этом для $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\tilde{\theta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{N}}$ *выполнено* $\tilde{\theta} = \theta$, $\tilde{\varepsilon} \ge 2^{-5}\varepsilon'\varepsilon_0$ *и* $N \ge 2^{-5}\varepsilon' N$.

Предложение 1. *Пусть* $\Lambda = \Lambda(\theta, \varepsilon_0, N)$ – *некоторое множество Бора*, $\theta \in \mathbf{T}^d$ *и целый вектор* $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$. *Пусть* $\varepsilon, \sigma, \tau, \delta \in (0, 1)$ – *вещественные числа*, E_1, E_2 – *некоторые множества*, $E_i = \beta_i|\Lambda|$, $i = 1, 2$, $\mathbf{E} = E_1 \times E_2$ – *подмножество* $(\Lambda + s_1) \times (\Lambda + s_2)$, $A \subset \mathbf{E}$, $\delta_{\mathbf{E}}(A) = \delta + \tau$ *и* $\varepsilon \le \frac{\kappa}{100d}$, $\kappa = 2^{-100}(\tau\beta_1\beta_2)^5\sigma^3$. *Предположим также, что*

$$N \ge (2^{-100}\varepsilon_0\varepsilon)^{-2^{100}((\tau\beta_1\beta_2)^{-5}\sigma^{-3} + d)^2} \tag{11}$$

и $\delta \le 2^{-100}\tau\beta_1\beta_2$.

Тогда существуют множество Бора $\Lambda' = \Lambda(\theta', \varepsilon', N')$, $\theta' \in \mathbf{T}^D$, $D \le 2^{30}(\tau\beta_1\beta_2)^{-5}\sigma^{-3} + d$, $\varepsilon' \ge (2^{-10}\varepsilon)^D\varepsilon_0$, $N' \ge (2^{-10}\varepsilon)^D N$, *и целый вектор* $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$, *так что для множеств* $E_1' = (E_1 - t_1) \cap \Lambda'$, $E_2' = (E_2 - t_2) \cap \Lambda'$, $\mathbf{E}' = E_1' \times E_2'$ *выполнено*:

1) $|\mathbf{E}'| \ge \frac{\beta_1\beta_2\tau|\Lambda'|}{16}$;

2) E_1', E_2' *являются* (σ, ε)-*равномерными подмножествами* Λ';

3) $\delta_{\mathbf{E}'}(A - \vec{t}) \ge \delta + \frac{\tau}{116}$.

3. Схема доказательства теоремы 3. Следующая лемма 2 принадлежит Б.Грину.

Лемма 2. *Пусть N – натуральное число, множество* $A \subseteq [-N, N]^2$, $|A| = \delta(2N + 1)^2$ *не содержит троек вида* $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ *с* $d > 0$ *в стандартном базисе* $(1, 0), (0, 1)$.

Тогда существует такое подмножество $A_1 \subseteq A$, что

1) $|A_1| \ge \frac{\delta^2(2N+1)^2}{4}$ *и*

2) A_1 *не содержит троек вида* $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ *с* $d \neq 0$.

Объединим для удобства, теорему 5 и предложение 1 в одно.

Предложение 2. *Пусть* $\Lambda = \Lambda(\theta, \varepsilon_0, N)$ – *некоторое множество Бора*, $\theta \in \mathbf{T}^d$ *и целый вектор* $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$. *Пусть* E_1, E_2 – *некоторые множества* $E_i = \beta_i|\Lambda|$, $i = 1, 2$, $\beta = \beta_1\beta_2$, $\mathbf{E} = E_1 \times E_2$ – *подмножество* $(\Lambda + s_1) \times (\Lambda + s_2)$, E_1, E_2 *являются* $(\alpha_0, 2^{-10}\varepsilon^2)$-*равномерными подмножествами* $\Lambda + s_1$, $\Lambda + s_2$ *соответственно*, $\alpha_0 = 2^{-2000}\delta^{96}\beta_1^{48}\beta_2^{48}$, $\varepsilon = \frac{2^{-100}\alpha_0^2}{100d}$. *Пусть множество* $A \subset \mathbf{E}$, $\delta_{\mathbf{E}}(A) = \delta$, *не содержит троек вида* $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ *с* $d \neq 0$. *Предположим, что*

$$\ln N \ge 2^{1\,000\,000}(2^{250\,000}\delta^{-20\,000}\beta^{-200} + d)^3 \ln\frac{1}{\delta\beta\varepsilon_0}. \tag{12}$$

Тогда существует множество Бора $\tilde{\Lambda}$ и такой вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{Z}^2$, *что для множество* $E_1' \subseteq (E_1 - y_1 \cap \tilde{\Lambda})$, $E_2' \subseteq (E_2 - y_2 \cap \tilde{\Lambda})$ *выполнено*:

1) *Пусть* $|E_1'| = \beta_1'|\tilde{\Lambda}|$, $|E_2'| = \beta_2'|\tilde{\Lambda}|$ *и* $\beta' = \beta_1'\beta_2'$. *Тогда* $\beta' \ge 2^{-1500}\delta^{100}\beta$.

2) E_1', E_2' *являются* $(\alpha_0', 2^{-10}\varepsilon'^2)$-*равномерными, где* $\alpha_0' = 2^{-2000}\delta^{96}\beta'^{48}$, $\varepsilon' = \dfrac{2^{-100}\alpha_0'^2}{100D'}$, $D \le D' = 2^{250000}\delta^{-20000}\beta^{-200} + d$.

3) *Множество Бора* $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\tilde{\theta}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{N}}$ *обладает свойствами* $\tilde{\theta} \in \mathbf{T}^D$, $\tilde{\varepsilon} \ge (2^{-100}\varepsilon'^2)^D\varepsilon_0$ *и* $N \ge (2^{-100}\varepsilon'^2)^D N$.

4) $\delta_{E_1' \times E_2'}(A) \ge \delta + 2^{-600}\delta^{37}$.

Доказательство теоремы 3. Пусть множество $A \subseteq [-N, N]$ не содержит троек вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ с $d > 0$. Пользуясь леммой 2, находим множество A', $A' \subseteq A$, $|A'| \ge \dfrac{\delta^2}{4(2N+1)^2}$, не содержащее троек вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ с $d \ne 0$. В дальнейшем мы будем работать только с этим множеством. Пусть $\delta' = \dfrac{\delta^2}{4}$.

Доказательство теоремы 3 представляет собой следующий алгоритм. На i-м шаге будут построены целый вектор $\mathbf{s}_i = (s_i^{(1)}, s_i^{(2)})$ и множества: регулярное множество Бора $\Lambda_i = \Lambda_{\theta_i, \varepsilon_i, N_i}$, множества $E_i^{(1)} - s_i^{(1)} \subseteq \Lambda_i$, $E_i^{(2)} - s_i^{(2)} \subseteq \Lambda_i$, $|E_i^{(1)}| = \beta_i^{(1)}|\Lambda_i|$, $|E_i^{(2)}| = \beta_i^{(2)}|\Lambda_i|$, $\beta_i = \beta_i^{(1)}\beta_i^{(2)}$, $\mathbf{E_i} = E_i^{(1)} \times E_i^{(2)}$. При этом будут выполнены условия.

1) $\beta_i \ge 2^{-1500}\delta'^{100}\beta_{i-1}$;

2) $E_i^{(1)}$, $E_i^{(2)}$ *являются* $(\alpha_0^{(i)}, 2^{-10}(\varepsilon_i')^2)$-*равномерными*, $\alpha_0^{(i)} = 2^{-2000}\delta'^{96}\beta_i^{48}$, $\varepsilon_i' = \dfrac{2^{-100}(\alpha_0^{(i)})^2}{100d_i}$;

3) $\Lambda_i = \Lambda_{\theta_i, \varepsilon_i, N_i}$, $\tilde{\theta} \in \mathbf{T}^{d_i}$, $d_i \le 2^{250000}\delta'^{-2000}\beta_{i-1}^{-200} + d_{i-1}$, $\varepsilon_i \ge (2^{-100}(\varepsilon_i')^2)^{d_i}\delta_{i-1}$, $N_i \ge (2^{-100}(\varepsilon_i')^2)^{d_i}N_{i-1}$;

4) $\delta_{\mathbf{E_i}}(\mathbf{A}') \ge \delta_{\mathbf{E_{i-1}}}(A') + 2^{-600}\delta'^{37}$.

После этого предложение 2 дает нам новый вектор $s_{i+1} = (s_{i+1}^{(1)}, s_{i+1}^{(2)}) \in \mathbf{Z}^2$ и множества: регулярное множество Бора $\Lambda_{i+1} = \Lambda_{\theta_{i+1}, \varepsilon_{i+1}, N_{i+1}}$, множества $E_{i+1}^{(1)} - s_i^{(1)} \subseteq \Lambda_{i+1}$, $E_{i+1}^{(2)} - s_{i+1}^{(2)} \subseteq \Lambda_{i+1}$, $|E_{i+1}^{(1)}| = \beta_{i+1}^{(1)}|\Lambda_{i+1}|$, $|E_{i+1}^{(2)}| = \beta_{i+1}^{(2)}|\Lambda_{i+1}|$, $\beta_{i+1} = \beta_{i+1}^{(1)}\beta_{i+1}^{(2)}$, $\mathbf{E_{i+1}} = E_{i+1}^{(1)} \times E_{i+1}^{(2)}$, удовлетворяющие условиям 1–4.

Положим $\theta_0 = \{0\}$, $\Lambda_0 = \Lambda_{\theta_0, 1, N}$ и $E_1 = E_2 = [-N, N]$, $\beta_0 = 1$. Легко видеть, что множество Бора Λ_0 является регулярным, а множество E_1, E_2 $(2^{-2000}\delta'^{96}, 2^{-10000}\delta'^{400})$-равномерными. Следовательно, нулевой шаг алгоритма построен.

Оценим общее число шагов работы нашего алгоритма. Плотность $\delta_{\mathbf{E_i}}(A')$ на i-м шаге связана с плотностью $\delta_{\mathbf{E_{i-1}}}(A')$ соотношением условия 4. Поскольку для любого i выполнено $\delta_{\mathbf{E_i}}(A') \le 1$, то, как легко убедиться, число шагов алгоритма не может быть больше $2^{700}\delta'^{-36} = K$.

Условие 3 влечет оценку $\beta_i \ge (2^{-1500}\delta'^{100})^i$, откуда $d_i \le (C_1\delta)^{-C_1'i}$, где C_1, $C_1' > 0$ – некоторые абсолютные константы.

Чтобы теорема была полностью доказана, нам необходимо проверить неравенство (12) на последнем шаге алгоритма. Используя свойство 3 алгоритма, находим

$$N_K \ge (C_2\delta)^{C_3\delta^{-C_4K}}N,$$

где C_2, C_3, $C_4 > 0$ – некоторые абсолютные константы. Само условие (12) записывается похожим образом:

$$N_K \ge (C_2'\delta)^{-C_3'\delta^{-C_4'K}},$$

где C_2', C_3', $C_4' > 0$ – другие абсолютные константы. Следовательно, нам надо проверить неравенство

$$N \ge (C_2''\delta)^{-C_3''\delta^{-C_4''K}} = \exp(\delta^{-C'\delta'^{-36}}), \qquad (13)$$

где C_2'', C_3'', C_4'', $C' > 0$ – абсолютные константы. По условию теоремы

$$\delta \gg \frac{1}{(\ln\ln N)^{1/73}}.$$

Отсюда

$$\delta' \gg \frac{1}{(\ln\ln N)^{2/73}}.$$

и неравенство (13) выполнено. Значит, множество A' содержит тройку $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ с $d \ne 0$. Противоречие. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Константу 73 в теореме 3 можно, конечно, немного уменьшить. Тем не менее, по мнению автора, эта константа не может быть сделана близкой к единице без применения какой-то новой идеи.

Автор выражает огромную благодарность Н.Г. Мощевитину за постоянный интерес к работе, а также профессору Б. Грину за полезные замечания и идеи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02–01–00912), гранта НШ-136.2003.1 и INTAS (грант 03–51–5070).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdos P., Turan P.* // J. London Math. Soc. 1936. № 11. P. 261–264.
2. *Roth K.F.* // J. London Math. Soc. 1953. № 28. P. 245–252.
3. Bourgain j. // Geom. Funct. Anal. 1999. № 9. P. 968–984.
4. *Szemeredi E.* // Acta arthm. 1975. № 27. P. 299–345.
5. *Gowers W.T.* // Geom. Funct. Anal. 2001. V. 11. № 3. P. 465–588.
6. Ajtai m., Szemeredi E. // Stud. Sci. Math. Hungar. 1974. № 9. P. 9–11.
7. *Solymosi J.* // Discrete and Comput. Geom. Algorithms Comin. 2003. V. 25. P. 825–827.
8. *Vu V.H.* // Ann. Combinatorics. 2002. № 6. P. 229–233.
9. *Furstenberg H.* Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. Princeton (N.J.): Princeton Univ. Press, 1981. 202 c.
10. *Шкредов И.Д.* // ДАН. 2005. Т. 4007 № 2. С. 169–172.