О критерии нормальности Пятецкого–Шапиро для цепных дробей.

Шкредов И.Д. *

Abstract

В настоящей статье мы доказываем аналог критерия нормальности Пятецкого–Шапиро для цепных дробей, а также для f–расширений с конечным начальным разбиением. Полученные результаты уточняют некоторые теоремы из работы [5].

1. Введение.

Пусть X — пространство с сигма–алгеброй измеримых множеств Φ и мерой μ, а T измеримое эргодическое отображение пространства X в себя, сохраняющее эту меру. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$. Для произвольной измеримой функции $f(x)$ рассмотрим биркгофовское среднее

$$S_l(T, x, f) = S_l(x, f) = \sum_{m=0}^{l-1} f(T^m x).$$

Возьмем произвольное $\delta > 0$ и произвольное натуральное l. Рассмотрим множества

$$A_l(T, f, \delta) = A_l(f, \delta) = \{x \in X \ : \ \Big|\frac{S_l(T, x, f)}{l} - \int f d\mu\Big| > \delta\}.$$

Как утверждает статистическая эргодическая теорема для любого $\delta > 0$ мера множеств $A_l(f, \delta)$ стремится к нулю при $l \to \infty$. (По поводу скорости сходимости см. [8, 9]).

Пусть $\{C_n\}$ — не более чем счетное семейство измеримых подмножеств

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ N 06-01-00383, гранта Президента РФ N 1726.2006.1 и INTAS (грант N 03–51–5-70).

X, а $\varphi(t)$ – монотонно возрастающая положительнозначная функция аргумента $t \in \mathbf{R}_+$. Определим меру $H_\varphi(\cdot)$ для множества E относительно этого семейства, как $\inf\{\sum \varphi(\mu(C_i))\}$, где inf берется по не более чем счетным покрытиям E.

Обозначим через Γ семейство μ – измеримых множеств $\{V\}$, которые с любой точностью аппроксимируются множествами семейства $\{C_n\}$. Иными словами для произвольного V из Γ и любого $\varepsilon > 0$ существуют наборы непересекающихся множеств $\{M_i\}$ и $\{N_i\}$ из семейства $\{C_n\}$, так что, $\bigsqcup M_i \subseteq V \subseteq \bigsqcup N_i$ и $\sum \mu(N_i) - \varepsilon < \mu(V) < \sum \mu(M_i) + \varepsilon$.

Пусть χ_I — характеристическая функция измеримого множества I. Знаменитая эргодическая теорема Биркгофа (см., например, [14]) утверждает что для почти всех точек x_0 выполнено

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu} = \mu(I). \tag{1}$$

Если для точки x_0 выполнено (1), то x_0 называется *нормальной*. В работе [1] Пятецким-Шапиро для динамической системы, порожденной отображением $x \to \{qx\}, q \in \mathbf{N}, q > 1$ интервала $[0,1)$ в себя, был дан критерий того, чтобы для данной точки x_0 выполнялось (1). Ряд последующих работ Пятецкого-Шапиро и Постникова [1], [2], [3], [4] содержал обобщения и усиления первоначального критерия из работы [1].

Наиболее общая формулировка была доказана в [5].

Теорема 1.1 *Пусть точка $x_0 \in X$. Если для произвольного множества I из семейства $\{C_n\}$ выполнено*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu} \le \varphi(\mu(I))$$

и для любого $\delta > 0$ выполнено $H_\varphi(A_l(\chi_I,\delta)) \to 0$, при $l \to \infty$, то для произвольного множества I из Γ имет место асимптотическое равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu} = \mu(I). \tag{2}$$

Так же в работе [5] были получены неулучшаемые аналоги теоремы 1.1 для некоторых конкретных динамических систем (в том числе и для рассматривавшиеся в [3]), например, для конечных цепей Маркова и обобщенного сдвига Бернулли. В настоящей заметке мы докажем окончательный вариант теоремы 1.1 для динамической системы, связанной с цепными дробями, а так же для некоторого класса динамических систем с конечным начальным разбиением. В своем доказательстве мы будем опираться на работу [7].

2. О динамических системах с ψ–перемешиванием.

Часто оказывается, что семейство $\{C_n\}$ имеет специальный вид. Пусть ξ — не более чем счетное измеримое разбиение пространства X. Если ξ и η два разбиения, то их совместное разбиение определяется следующим образом $\xi \vee \eta := \{A \cap B \mid A \in \xi,\ B \in \eta\}$. Для измеримого разбиения ξ, сохраняющего меру преобразования T и произвольного натурального n определим итерированное разбиение $\xi_{-n}^T := \xi \vee T^{-1}\xi \vee \ldots \vee T^{-n+1}\xi$, $\xi_0^T = \xi$. Разбиение ξ мы будем называть *начальным* разбиением. Мы будем считать, что семейство $\{C_n\}$ есть совокупность элементов разбиений $\xi_{-\infty}^T = \{\xi_{-n}^T\}_{n=0}^{\infty}$ (эта ситуация была фактически рассмотрена в [3]). Как и прежде Γ обозначает семейство μ – измеримых множеств $\{V\}$, которые с любой точностью аппроксимируются множествами семейства $\{C_n\}$.

Теорема 1.1 для систем с $\{C_n\} = \xi_{-\infty}^T$ выглядит следующим образом (см. [5]).

Теорема 2.1 *Пусть точка $x_0 \in X$. Если для любого n и характеристической функции χ_I произвольного элемента $I \in \xi_{-n}^T$ выполняется*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_I)}{\nu} \le \varphi(\mu(I)) \tag{3}$$

и, кроме того, для любого $\delta > 0$ имеем $H_\varphi(A_l(T^n, \chi_I, \delta)) \to 0$, при $l \to \infty$, то для характеристической функции χ произвольного множества $V \in \Gamma$ справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} = \mu(E). \tag{4}$$

Пусть теперь ξ — конечное измеримое разбиение пространства X, $|\xi| = q$.

Пусть $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая положительнозначная функция, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t^{1-\varepsilon}} = 0. \tag{5}$$

Пусть также функция φ представляется в виде $\varphi(t) = t\omega(t)$, где $\omega(t)$ невозрастающая функция, которая удовлетворяет следующему условию : для произвольных $\delta > 0$, $n \in \mathbf{N}$ и для всех характеристических функций χ элементов разбиения ξ^T_{-n} выполнено

$$\lim_{l\to\infty} \mu(A_l(T^n,\chi,\delta))\omega\left(\frac{1}{q^{ln}}\right) = 0. \tag{6}$$

Для систем с конечным начальным разбиением в [5] был доказан следующий результат.

Теорема 2.2 *Пусть точка $x_0 \in X$. Если для любого n и характеристической функции χ произвольного элемента $I \in \xi^T_{-n}$ выполнено*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} \leq \mu(I)\omega(\mu(I)), \tag{7}$$

то для характеристической функции χ произвольного множества $E \in \Gamma$ имеет место асимптотическое равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} = \mu(E). \tag{8}$$

Пусть $k, l \in \{0, 1, \ldots\}$ и $k \leq l$. Обозначим через ξ^l_k итерированное разбиение $T^{-k}\xi \vee \ldots \vee T^{-l}\xi$.

Определение 2.3 Динамическая система обладает свойством ψ–перемешивания, если существует такая функция $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, так что $\psi(m) \to 0$, когда $m \to \infty$ и для произвольных $k, l, m \in \mathbf{N}$ и $A \in \xi^k_0$, $B \in \xi^{k+m+l}_{k+m}$, имеем

$$|\mu(A\cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq \psi(m)\mu(A)\mu(B)\,. \tag{9}$$

Для систем с ψ–перемешиванием в работе [7] была получена оценка для мер множеств $A_l(T, f, \delta)$.

Предложение 2.4 *Пусть n — натуральное число и χ характеристическая функция произвольного элемента I разбиения ξ^T_{-n}. Тогда существует такое $l_0 = l_0(\delta, n, I)$, что для всех $l \geq l_0$ выполнено*

$$\mu(A_l(T,\chi,\delta)) \leq 2M(\delta,n)e^{-\frac{\delta^2 l}{2M(\delta,n)}}\ , \tag{10}$$

где $M(\delta, n) = \min\{m \in \mathbf{N}\ :\ \psi(m-n) \leq \delta^2/2\}$.

Следствие 2.5 *Пусть динамическая система* (X, T, μ) *с конечным начальным разбиением* ξ, *обладает свойством* ψ*–перемешивания. Пусть точка* $x_0 \in X$. *Пусть также для всякого положительного* η *выполнено* $\omega(t) = O(t^{-\eta}), t \to 0$. *Если для любого* n *и характеристической функции* χ *произвольного элемента* $I \in \xi_{-n}^T$ *выполнено*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} \leq \mu(I)\omega(\mu(I)), \tag{11}$$

то для характеристической функции χ *произвольного множества* $E \in \Gamma$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} = \mu(E). \tag{12}$$

Доказательство. Достаточно воспользоватеся оценкой (10) и применить теорему 2.2.

Вероятно, наиболее общим примером динамических систем с ψ–перемешиванием и обладающих конечным начальным разбиением являются *f–растяжения.*

Пусть $M \in \{2, 3, \ldots\}$. Пусть непрерывная функция f либо строго убывает на $[1, M+1]$, так что $f(1) = 1$, $f(M) = 0$, либо строго возрастает на $[0, M]$, так что $f(0) = 0$ и $f(M) = 1$. Существует обширная литература (см., например, [15], [16], [17]) в которой изучается вопрос о представлении числа $x \in (0, 1)$ в форме

$$x = f(\alpha_1(x) + f(\alpha_2(x) + f(\alpha_3(x) + \ldots) \ldots), \tag{13}$$

где *цифры* $\alpha_i(x) \in \mathbf{N}$ и *остатки* $r_i(x)$ определяются рекурентно по формулам $\alpha_0(x) = 0$, $r_0(x) = x$ и $\alpha_{i+1}(x) = [f^{-1}(r_i(x))]$, $r_{i+1}(x) = \{f^{-1}(r_i(x))\}$, где $i \geq 0$. Здесь $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ обозначают целую и дробную часть, соответственно. Если $r_j(x) = 0$, то для всех $i > j$ имеем $\alpha_i(x) = 0$. В этом случае мы будем говорить, что число $x \in (0, 1)$ имеет конечное f–представление. Ясно, что для фиксированного f количество таких x не более чем счетно. Реньи [15] показал, что если функция f удовлетворяет некоторым условиям регулярности, то для всех $x \in (0, 1)$ правая часть (13) сходится к x. Если f строго убывает, то условия регулярности состоят в том, что найдется такое $\kappa \in (0, 1)$, для которого выполнено $|f(t) - f(s)| \leq \kappa|t - s|$ для всех s, t, таких что $1 + f(2) < s < t$ и $|f(t) - f(s)| \leq |t - s|$ для всех s, t, таких что $0 \le s < t$. Если же f строго возрастает, то условие регулярности состоят в том, что $|f(t) - f(s)| < |t - s|$ для всех $0 \le s < t$.

Пусть $I_k = f(k, k+1)$ для $1 \le k \le M$ в случае, когда f убывает и $I_k = f(k, k+1)$ для $0 \le k \le M-1$ в случае, когда f возрастает. Тогда преобразование $Tx = f^{-1}x - [f^{-1}x]$ гомеоморфно отображает каждый интервал I_k на $(0,1)$. Кроме того, для каждого $x \in \bigcup_k I_k$ мы имеем $\alpha_i(Tx) = \alpha_{i+1}(x)$. Если $T^i x \in I_{k_i}$ для всех $i \ge 0$, то x единственным образом представляется в виде последовательности цифр $\alpha_{i+1}(x) = k_i$, $i \ge 0$. Следуя [18] предположим дополнительно, что

(i) ограничение T на каждый интервал I_k принадлежит классу C^2;

(ii) существует такое l, что $\inf_{x \in I_k, k \in \mathbf{N}} |(T^l)'(x)| = \beta > 1$;

(iii) $\sup_{x,y,z \in I_k, k \in \mathbf{N}} |\frac{T''(x)}{T'(y)T'(z)}| = Q < \infty$.

Тогда, согласно теореме 22 из [18], существует T–инвариантная мера μ_T, так что $0 < \frac{d\mu_T}{dx} \in C[0,1]$. Кроме того, преобразование T обладает свойством ψ–перемешивания, причем для некоторых констант $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$ выполнено

$$\psi(m) \le C\lambda^m \,. \tag{14}$$

Таким образом для f–расширений с указанными выше условиями на функцию f выполнено следствие 2.5.

3. Критерий нормальности Пятецкого–Шапиро для цепных дробей.

Цепной дробью, соответствующей числу α, называется выражение $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Число a_n называется n–м неполным частным числа α, а рациональное число $p_k/q_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ – подходящей дробью порядка k. Если $\alpha \in [0,1)$, то будем писать $\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$. Интервалом k–го ранга $I_k = I_k(a_1, \ldots, a_k)$ называется множество всех чисел α, у которых цепные дроби начинаются с $a_1, \ldots, a_k$. Обозначим через $S_\nu(\alpha, I_k)$ число повторений комбинации $(a_1, \ldots, a_k)$ в разложении α до ν-го места. Обозначим через χ_{I_k} характеристическую функцию множества I_k.

Как известно, преобразование Гаусса $Tx = \{1/x\}, x \ne 0, T0 = 0$ является левым сдвигом при разложении в цепную дробь и сохраняет меру

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{1}{1+x} dx \,,$$

которая эквивалентна мере Лебега dx. Соответствующая динамическая система обладает свойством ψ–перемешивания (см. [10, 11, 12, 13]) с

$\psi(m) = K\lambda^m$, $K > 0$, $0 < \lambda < 1$. Поэтому для мер множеств $A_l(\chi_{I_k}, \delta)$ выполнена оценка (10). Все необходимые сведения о цепных дробях можно найти в [10].

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Теорема 3.1 *Пусть* $x_0 \in [0,1)$. *Пусть функция* $\omega : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *— невозрастает и для всякого положительного* η *выполнено* $\omega(t) = O(t^{-\eta}), t \to 0$. *Если для произвольного интервала* k*–го ранга* I_k *имеем*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, I_k)}{\nu} \le \mu(I_k)\omega(\mu(I_k)),$$

то для характеристической функции χ *произвольного интервала* $I = (a,b)$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} = \mu(I). \tag{15}$$

Замечание 3.2 В работе [5] на функцию $\omega(t)$ накладывалось более сильное условие, а именно, для всякого положительного η требовалось чтобы $\omega(t) = O(e^{\eta\sqrt{\log 1/t}})$, $t \to 0$.

Замечание 3.3 В ходе доказательства теоремы 3.1 будет оценена сверху размерность Хаусдорфа множества цепных дробей не являющихся нормальными. Впервые такая оценка была получена в работе [7] с использованием метода термодинамического формализма. Наше доказательство вполне элементарно.

Доказательство. Возьмем любое $\delta > 0$ и пусть I_k произвольный интервал k–го ранга. Обозначим через $E_l(g)$ $(g \ge 1)$ — множество чисел отрезка $[0,1]$, для которых $a_1a_2\dots a_l \ge g$. Рассматриваемое множество $E_l(g)$ представляет собой систему интервалов ранга l.

Длина $|I_l|$ произвольного интервала ранга l равна $1/(q_l(q_l + q_{l-1}))$ и $1/(2q_l^2) \le |I_l| \le 1/q_l^2$. Для чисел q_l (см. [10]) выполнено

$$a_1a_2\dots a_l \le q_l \le 2^l a_1a_2\dots a_l. \tag{16}$$

Оценим хаусдорфову меру множества $E_l(g)$ относительно функции φ, то есть сумму $H_\varphi(E_l(g)) = \sum_{a_1a_2\dots a_l \ge g} |I_l|\omega(|I_l|)$. По условию теоремы, для любого $\eta > 0$ выполнено $\omega(t) = O(t^{-\eta}), t \to 0$. Возьмем произвольное η, $\eta \in (0, 1/8)$. Пусть $\rho(t) = t^\eta$. Пользуясь оценками (16) для q_l и монотонностью функции $\rho(t)$, получаем

$$H_\varphi(E_l(g)) \ll \sum_{a_1a_2\dots a_l \ge g} \frac{\rho((2^{l+1}a_1a_2\dots a_l)^2)}{(a_1a_2\dots a_l)^2} =$$

$$= \rho(4^{l+1}) \sum_{a_1 a_2 \ldots a_l \geq g} \prod_{i=1}^{l} \frac{\rho(a_i^2)}{a_i^2}\,. \tag{17}$$

Оценим (17) следуя методу из [10]. Вычисляя интеграл $\int_a^{a+1} \frac{dx}{x^2}$ легко убедиться, что для любого $a > 0$ выполнена оценка

$$\frac{\rho(a^2)}{a(a+1)} \leq \int_a^{a+1} \frac{\rho(x^2)}{x^2} dx\,. \tag{18}$$

Пользуясь неравенством (18), находим

$$\prod_{i=1}^{l} \frac{\rho(a_i^2)}{a_i^2} = \prod_{i=1}^{l} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{\rho(a_i^2)}{a_i(a_i+1)} \leq 2^l \prod_{i=1}^{l} \int_{a_i}^{a_i+1} \frac{\rho(x_i^2)}{x_i^2} dx_i\,.$$

Откуда

$$H_\varphi(E_l(g)) \ll 2^l \rho(4^{l+1}) \int \ldots \int \frac{\rho(x_1^2 \ldots x_l^2)\; dx_1 \ldots dx_l}{x_1^2 \ldots x_l^2} = 2^l \rho(4^{l+1}) J_l(g)\,,$$

где интегрирование в $J_l(g)$ распространяется на область $x_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, l$ и $x_1 x_2 \ldots x_l \geq g$. Пусть $C = C_\eta = 1/(1-2\eta)$. Если $g \leq 1$, то для любого $l \geq 1$ выполнено

$$J_l(g) = \left(\int_1^\infty \frac{\rho(x^2)}{x^2} \right)^l = C^l\,.$$

Если $g > 1$, то $J_1(g) = C\rho(g^2)/g$. Кроме того, интегралы $J_l(g)$ связаны соотношением

$$J_{l+1}(g) = \frac{\rho(g^2)}{g} \int_0^g J_l(u) \rho\left(\frac{1}{u^2}\right) du\,. \tag{19}$$

Действительно,

$$J_{l+1}(g) = \int_1^{+\infty} \frac{\rho(x_{l+1}^2)}{x_{l+1}^2} J_l\left(\frac{g}{x_{l+1}}\right) dx_{l+1} = \frac{\rho(g^2)}{g} \int_0^g J_l(u) \rho\left(\frac{1}{u^2}\right) du\,. \tag{20}$$

Докажем, что для всех $g > 1$ и для всех $l \geq 1$ справедлива формула

$$J_l(g) = C \frac{\rho(g^2)}{g} \left(\sum_{k=0}^{l-1} C^{l-k-1} \frac{\log^k g}{k!} \right)\,. \tag{21}$$

Для $l = 1$ и $g > 1$ выражение (21) превращается в верное равенство. Предположим, что формула (21) справедлива для $l = m$. Пользуясь (19), находим

$$J_{m+1}(g) = \frac{\rho(g^2)}{g}\int_0^1 J_m(u)\rho\left(\frac{1}{u^2}\right)du + \frac{\rho(g^2)}{g}\int_1^g J_m(u)\rho\left(\frac{1}{u^2}\right)du\,. \qquad (22)$$

Если $u \leq 1$, то, как было отмечено выше, $J_m(u) = C^m$. Отсюда

$$J_{m+1}(g) = \frac{\rho(g^2)}{g}C^m\int_0^1 \rho\left(\frac{1}{u^2}\right)du + \frac{\rho(g^2)}{g}\int_1^g J_m(u)\rho\left(\frac{1}{u^2}\right)du =$$

$$= \frac{\rho(g^2)}{g}\left(C^{m+1} + \int_1^g J_m(u)\rho\left(\frac{1}{u^2}\right)du\right)\,. \qquad (23)$$

Применяя формулу (21) для вычисления J_m, получаем

$$J_{m+1}(g) = \frac{\rho(g^2)}{g}\left(C^{m+1} + C\int_1^g \sum_{k=0}^{m-1} C^{m-k-1}\frac{\log^k u}{k!}\cdot\frac{du}{u}\right) =$$

$$= C\frac{\rho(g^2)}{g}\left(\sum_{k=0}^{m} C^{m-k}\frac{\log^k g}{k!}\right)\,, \qquad (24)$$

что и доказывает формулу (21) для произвольного l.

Таким образом,

$$H_\varphi(E_l(g)) \ll \frac{\rho(g^2)2^l\rho(4^{l+1})}{g}\left(\sum_{k=0}^{l-1} C^{l-k-1}\frac{\log^k g}{k!}\right)\,. \qquad (25)$$

Полагая $g = e^{Al}$, где $A > 1$ — абсолютная константа, которую мы выберем позже, находим

$$H_\varphi(E_l(g)) \ll e^{l(\ln 2 + 2\eta\ln 4 + 2\eta A - A)}\left(\sum_{k=0}^{l-1} C^{l-k-1}\frac{(Al)^k}{k!}\right)\,. \qquad (26)$$

В сумме (26), как легко видеть, каждый член меньше, чем $C^l(Al)^l/l!$. Пользуясь формулой Стирлинга, получаем

$$H_\varphi(E_l(g)) \ll l e^{l(\ln 2 + 2\eta\ln 4 + 2\eta A - A)} C^l \frac{(Al)^l}{l^l e^{-l}\sqrt{l}} \ll$$

$$\ll e^{-l(A-\ln 2-2\eta\ln 4-2\eta A-\ln A-\ln C-2)}\,. \tag{27}$$

Так как $\eta \in (0,1/8)$, то $\ln C = \ln C_\eta < 1$. Выберем A настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $A-\ln 2-\ln 4-\frac{1}{4}A-\ln A-3>0$. Тогда

$$H_\varphi(E_l(e^{Al})) \ll e^{-Bl}\,, \tag{28}$$

где B некоторая новая абсолютная константа.

Обозначим через χ характеристическую функцию интервала I_k. Для любых натуральных ν и l справедлива формула

$$S_\nu(x_0,\chi) = \frac{1}{l}\sum_{t=0}^{\nu-1} S_l(T^t x_0) + O(l)\,, \tag{29}$$

Используя формулу (29), получаем

$$\begin{gathered}
\Big|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} - \mu(I_k)\Big| = \frac{1}{\nu}\Big|\sum_{t=0}^{\nu-1}\Big(\frac{S_l(T^t x_0,\chi)}{l} - \mu(I_k)\Big)\Big| + O\Big(\frac{l}{\nu}\Big) \le \\
\le \frac{1}{\nu}\sum_{t}\Big|\frac{S_l(T^t x_0,\chi)}{l} - \mu(I_k)\Big| + \frac{1}{\nu}\hat{\sum_{t}}\Big|\frac{S_l(T^t x_0,\chi)}{l} - \mu(I_k)\Big| + O\Big(\frac{l}{\nu}\Big) \le \\
\le \delta + \frac{R_\nu}{\nu} + O\Big(\frac{l}{\nu}\Big)\,,
\end{gathered} \tag{30}$$

где суммирование в первой сумме из (30) распространено на те слагаемые, для которых $|\frac{S_\nu(T^t x_0)}{l}| \le \delta$, а R_ν обозначает количество слагаемых во второй сумме. Число R_ν/ν представляет собой частоту попадания орбиты $T^t x_0$ в множество $A_l(\chi,\delta)$. Заметим, что множество $A_l(\chi,\delta)$ *разбивается* на объединение некоторых элементов $\tau_1,\ldots,\tau_m$ разбиения ξ_{-l}^T. Пусть τ — произвольный элемент разбиения ξ_{-l}^T. Обозначим через $R_\nu(\tau)$ число тех $t \in 1,\ldots,\nu$ для которых выполнено $T^t x_0 \in \tau$. Тогда $R_\nu = \sum_{i=1}^m R_\nu(\tau_i)$. По условию теоремы для любого элемента τ разбиения ξ_{-l}^T, выполнено

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{R_\nu(\tau)}{\nu} \le \mu(\tau)\omega(\mu(\tau))\,. \tag{31}$$

Отсюда

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{R_\nu}{\nu} \le \sum_{i=1}^m \limsup_{\nu\to\infty} \frac{R_\nu(\tau_i)}{\nu} \le \sum_{i=1}^m \mu(\tau_i)\omega(\mu(\tau_i)) = \sigma\,. \tag{32}$$

Разобьем σ на сумму по всем $\tau_i \in A_l(\chi,\delta) \cap E_l(g)$ и на сумму по всем $\tau_i \in A_l(\chi,\delta) \setminus E_l(g)$. Если $\tau_i \notin E_l(g)$, то $|\tau_i| \geq 1/2(2^l g)^2 = 1/e^{Kl}$, где $K > 0$ некоторая новая константа. Используя последнее неравенство и оценку (28), получаем

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{R_\nu}{\nu} \ll e^{-Bl} + \omega\left(\frac{1}{e^{Kl}}\right) \mu(A_l(\chi,\delta)). \tag{33}$$

По условию, для любого $\eta > 0$ выполнено $\omega(t) = O(t^{-\eta}), t \to 0$. Применяя оценку (10) и выбирая η достаточно маленьким, находим, что для всех достаточно больших l справедливо неравенство

$$e^{-Bl} + \omega\left(\frac{1}{e^{Kl}}\right) \mu(A_l(\chi,\delta)) \leq \delta\,. \tag{34}$$

Подставляя эту оценку в (30), получаем

$$\Big|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} - \mu(I_k)\Big| \leq 2\delta + O\Big(\frac{l}{\nu}\Big)\,. \tag{35}$$

Так как δ произвольное число, то $\limsup_{\nu\to\infty} |\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} - \mu(I_k)| = 0$, откуда $\lim_{\nu\to\infty} |\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} - \mu(I_k)| = 0$. Мы доказали асимптотическое равенство (15) для всех интервалов ранга k.

Возьмем теперь произвольный интервал $I = (a,b)$. Длины интервалов I_n (экспоненциально) убывают, следовательно, интервал I может быть аппроксимирован такими интервалами с любой точностью. Пусть χ_I — характеристическая функция интервала I. Для всякого положительного $\varepsilon > 0$ найдется набор непересекающихся интервалов I_{k_j} рангов k_j, так что $I \subseteq \bigsqcup_j I_{k_j}$ и $b - a > \sum \mu(I_{k_j}) - \varepsilon$. Пусть $\chi_j = \chi_{I_{k_j}}$. Пользуясь асимптотическим равенством (15) для интервалов I_{k_j}, получаем

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T,x_0,\chi_I)}{\nu} \leq \sum_j \limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(T,x_0,\chi_j)}{\nu} = \sum_j \mu(I_{k_j}) < b - a + \varepsilon\,.$$

Иными словами $\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,I)}{\nu} \leq b - a$. Аналогично получаем $\liminf_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,I)}{\nu} \geq b - a$. Значит, для I выполнено (15). Теорема 3.1 доказана.

References

[1] И.И. Пятецкий-Шапиро. О законах распределения дробных долей показательной функции. // Известия АН СССР, сер. матем.,Т. 15, 1951., С. 47 – 52.

[2] И.И. Пятецкий-Шапиро. О расспределении дробных долей показательной функции. // Ученые записки Московского Государственного Педагогического института им. В.И. Ленина, Т. 58, В. 2, 1957, С. 312 – 322.

[3] А.Г. Постников. Арифметическое моделирование случайных процессов. // Труды Математического института АН СССР, Т. 57, 1960.

[4] А.Г. Постников. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений. // Труды Математического института АН СССР, Т. 82, 1966.

[5] Н.Г. Мощевитин, И.Д. Шкредов О критерии нормальности Пятецкого–Шапиро. // Математические заметки, Т. 73, N. 4, 2003, С. 577–589.

[6] W.M. Schmidt. Badly approximable numbers and certain games. // Trans. Amer. Math. Soc. V. 123, 1966, P. 178 – 199.

[7] Y. Kifer, Y. Peres, B. Weiss. A dimension gap for continued fractions with independent digits. // Isr. J. Math., 124, 2001, P. 61–76.

[8] J.v.Neumann. Physical applications of the ergodic hypothesis. // Proc. N.A.S., V.18, 1932, P. 263–266.

[9] А.Г. Качуровский. Скорости сходимости в эргодических теоремах. // УМН, т. 51, вып. 4, 1996, С. 73–124.

[10] А.Я. Хинчин. Цепные дроби. / М.: Наука, 1978.

[11] A. Khintchine. Zur metrischen Kettenbruchtheorie. // Compos. Math., 3, 1936, P. 276–286.

[12] W. Philipp. Some metrical theorems in number theory II. // Duke Math. J., 37, 1970, P. 447–458.

[13] P. Szüsz. Uber einen Kusminschen satz. // Acta Math. Acad. Sci. Hung., vol. 12, 1961, P. 447–453.

[14] А.Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем. / М.: изд-во "Факториал", 1999.

[15] A. Renyi. Representations for real numbers and their ergodic properties.// Acta Math. Sci. Hungar. 8, 1957, P. 477–493.

[16] J.R. Kinney, T.S. Pitcher. The dimension of some sets defined in terms of f–expansions.// Z. Wahrsch. verw. Geb., 4, 1966, P. 293–315.

[17] L. Heinrich. Mixing properties and central limit theorem for a class of non–identical piecewise monotonic C^2—transformations.// Math. Nachr., 181, 1996, P. 185–214.

[18] P. Walters. Invariant measures and equilibrium states for some mapping which expand distances.// Trans. Amer. Math. Soc., 236, 1978, P. 121–153.