Принцип Гамильтона

Иван Юрьевич Полехин

10 апреля 2020 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

Принцип Гамильтона. Пусть дана лагранжева система с лагранжианом $L(\dot{q}, q, t)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть зафиксированы две точки q_1 и q_2 в конфигурационном пространстве и два момента времени t_1 и t_2. Тогда кривая $q(t)$ такая, что $q(t_1) = q_1$ и $q(t_2) = q_2$ является решением уравнений Лагранжа с лагранжином $L(\dot{q}, q, t)$ тогда и только тогда, когда она является экстремалью действия по Гамильтону:

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

Принцип Гамильтона. Пусть дана лагранжева система с лагранжианом $L(\dot q, q, t)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть зафиксированы две точки q_1 и q_2 в конфигурационном пространстве и два момента времени t_1 и t_2. Тогда кривая $q(t)$ такая, что $q(t_1) = q_1$ и $q(t_2) = q_2$ является решением уравнений Лагранжа с лагранжином $L(\dot q, q, t)$ тогда и только тогда, когда она является экстремалью действия по Гамильтону:

$$W = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot q(t), t)\, dt.$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

Экстремаль действия по Гамильтону.

Неформальное определение — кривая $q(t)$ есть экстремаль, если для любых близких кривых с теми же начальной и конечной точками q_1 и q_2 значение W изменяется на величину второго порядка малости (можно сравнить с определением точки экстремума функции).

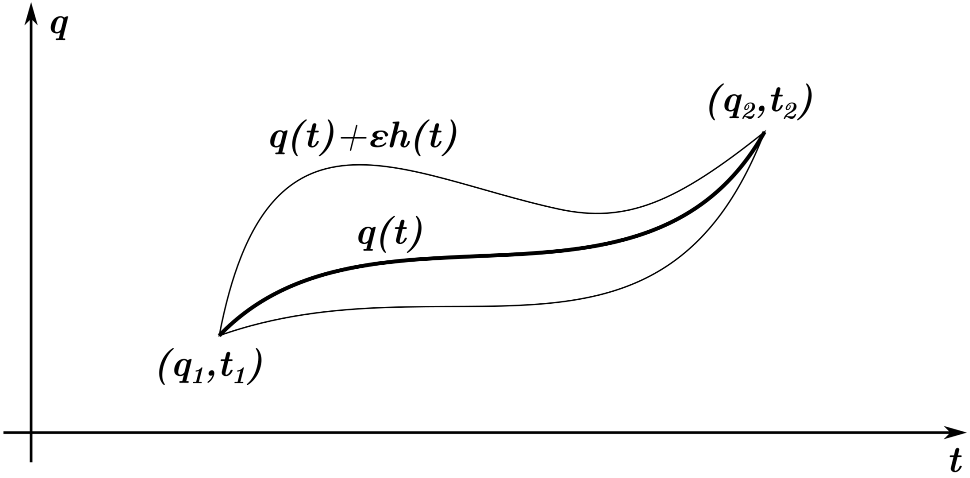
Экстремаль действия по Гамильтону.

Неформальное определение — кривая $q(t)$ есть экстремаль, если для любых близких кривых с теми же начальной и конечной точками q_1 и q_2 значение W изменяется на величину второго порядка малости (можно сравнить с определением точки экстремума функции).

Определение. Пусть $q(t)$ — заданный путь. Его вариацией назовем семейство путей вида $q(t) + \varepsilon h(t)$, где $h(t_1) = h(t_2) = 0$. Будем говорить, что $q(t)$ — экстремаль для W, если для любой вариации выполнено

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона



Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t_2} L(q(t)+\varepsilon h(t), \dot{q}(t)+\varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Внесем дифференцирование под интеграл

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(q(t)+\varepsilon h(t), \dot{q}(t)+\varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt\Big|_{\varepsilon=0}$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Внесем дифференцирование под интеграл

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt\Big|_{\varepsilon=0}$$

По правилу дифференцирования сложной функции при $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}(t)$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

По правилу дифференцирования сложной функции при $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}(t)$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

По правилу дифференцирования сложной функции при $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}(t)$$

Подставляем это выражение под интеграл

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}(t)\, dt$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

По правилу дифференцирования сложной функции при $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}(t)$$

Подставляем это выражение под интеграл

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}(t) \, dt$$

Интегрируем второе слагаемое по частям

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) h(t) \, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) h(t)\, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) h(t)\, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Последнее слагаемое равно нулю, т.к. $h(t_1) = h(t_2) = 0$.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) h(t)\, dt = 0.$$

Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) h(t)\, dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t)h(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Последнее слагаемое равно нулю, т.к. $h(t_1) = h(t_2) = 0$.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) h(t)\, dt = 0.$$

Это равенство должно быть выполнено для любой $h(t)$, удовлетворяющей $h(t_1) = h(t_2) = 0$. Поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0.$$

Задача 21.3

21.3 *Материальная точка движется по инерции. Показать, что в расширенном координатном пространстве* $\{x, y, z, t\}$ *через любые две точки* (x_0, y_0, z_0, t_0) *и* (x_1, y_1, z_1, t_1)*, не лежащие в плоскости* $t = const$*, проходит только одно решение задачи. Показать, что это решение будет минимумом функционала действия по Гамильтону* W*.*

Задача 21.3

21.3 *Материальная точка движется по инерции. Показать, что в расширенном координатном пространстве* $\{x, y, z, t\}$ *через любые две точки* (x_0, y_0, z_0, t_0) *и* (x_1, y_1, z_1, t_1), *не лежащие в плоскости* $t = const$, *проходит только одно решение задачи. Показать, что это решение будет минимумом функционала действия по Гамильтону* W.

Пусть масса частицы равна 1, тогда

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Задача 21.3

21.3 *Материальная точка движется по инерции. Показать, что в расширенном координатном пространстве $\{x, y, z, t\}$ через любые две точки (x_0, y_0, z_0, t_0) и (x_1, y_1, z_1, t_1), не лежащие в плоскости $t = const$, проходит только одно решение задачи. Показать, что это решение будет минимумом функционала действия по Гамильтону W.*

Пусть масса частицы равна 1, тогда

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Функционал действия

$$W = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\, dt.$$

Задача 21.3

Уравнения движения

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Задача 21.3

Уравнения движения

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Решение в общем виде

$$x(t) = \dot{x}_0(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = \dot{y}_0(t - t_0) + y_0, z(t) = \dot{z}_0(t - t_0) + z_0.$$

Задача 21.3

Уравнения движения

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Решение в общем виде

$$x(t) = \dot{x}_0(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = \dot{y}_0(t - t_0) + y_0, z(t) = \dot{z}_0(t - t_0) + z_0.$$

Построим решение, которое проходит через наши точки (x_0, y_0, z_0, t_0) и (x_1, y_1, z_1, t_1), т.е. найдем $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$

$$x_1 = \dot{x}_0(t_1 - t_0) + x_0$$

Задача 21.3

Уравнения движения

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Решение в общем виде

$$x(t) = \dot{x}_0(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = \dot{y}_0(t - t_0) + y_0, z(t) = \dot{z}_0(t - t_0) + z_0.$$

Построим решение, которое проходит через наши точки (x_0, y_0, z_0, t_0) и (x_1, y_1, z_1, t_1), т.е. найдем $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$

$$x_1 = \dot{x}_0(t_1 - t_0) + x_0$$

Получаем

$$\dot{x}_0 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}.$$

Задача 21.3

Уравнения движения

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Решение в общем виде

$$x(t) = \dot{x}_0(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = \dot{y}_0(t - t_0) + y_0, z(t) = \dot{z}_0(t - t_0) + z_0.$$

Построим решение, которое проходит через наши точки (x_0, y_0, z_0, t_0) и (x_1, y_1, z_1, t_1), т.е. найдем $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$

$$x_1 = \dot{x}_0(t_1 - t_0) + x_0$$

Получаем

$$\dot{x}_0 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}.$$

Задача 21.3

Получаем

$$x(t) = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + y_0, \quad z(t) = \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + z_0.$$

Задача 21.3

Получаем

$$x(t) = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + y_0, \quad z(t) = \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + z_0.$$

Подставляем в W с варьированием $h(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} + \varepsilon \dot{X}(t)\right)^2 + \ldots dt$$

Задача 21.3

Получаем

$$x(t) = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + y_0, \quad z(t) = \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + z_0.$$

Подставляем в W с варьированием $h(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} + \varepsilon \dot{X}(t)\right)^2 + \ldots\, dt$$

Раскрываем скобки

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\right)^2 + 2\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\varepsilon \dot{X}(t) + \varepsilon^2 \dot{X}^2(t)\right) + \ldots\, dt$$

Задача 21.3

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\right)^2 + 2\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\varepsilon\dot{X}(t) + \varepsilon^2\dot{X}^2(t)\right) + ...\,dt$$

Задача 21.3

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\right)^2 + 2\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\varepsilon\dot{X}(t) + \varepsilon^2\dot{X}^2(t)\right) + \ldots dt$$

Интеграл от второго слагаемого равен нулю (т.к. $X(t_0) = X(t_1) = 0$, а под интегралом стоит полный дифференциал)

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\right)^2 + \varepsilon^2\dot{X}^2(t)\right) + \ldots dt$$

Задача 21.3

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\right)^2 + 2\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\varepsilon \dot{X}(t) + \varepsilon^2 \dot{X}^2(t)\right) + \ldots dt$$

Интеграл от второго слагаемого равен нулю (т.к. $X(t_0) = X(t_1) = 0$, а под интегралом стоит полный дифференциал)

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}\right)^2 + \varepsilon^2 \dot{X}^2(t)\right) + \ldots dt$$

Этот интеграл минимален в том случае, когда $X(t) \equiv 0$.

Вторая вариация

Аналогия с обычными функциями: точка x_0 есть экстремум функции $f(x_0)$ в том случае, если $\mathrm{grad} f(x_0) = 0$; чтобы понять, является ли точка минимумом, надо смотреть вторые производные в точке x_0.

Вторая вариация

Аналогия с обычными функциями: точка x_0 есть экстремум функции $f(x_0)$ в том случае, если $\mathrm{grad} f(x_0) = 0$; чтобы понять, является ли точка минимумом, надо смотреть вторые производные в точке x_0.

В случае с функционалами ситуация такая же: мы рассмотрели первую вариацию и получили уравнение Лагранжа, которому обязана удовлетворять экстремаль; чтобы показать, что эта экстремаль действительно доставляет минимум нашему функционалу, надо рассматривать вторую вариацию.

Вторая вариация

Аналогия с обычными функциями: точка x_0 есть экстремум функции $f(x_0)$ в том случае, если $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$; чтобы понять, является ли точка минимумом, надо смотреть вторые производные в точке x_0.

В случае с функционалами ситуация такая же: мы рассмотрели первую вариацию и получили уравнение Лагранжа, которому обязана удовлетворять экстремаль; чтобы показать, что эта экстремаль действительно доставляет минимум нашему функционалу, надо рассматривать вторую вариацию.

Литература: М.И. Зеликин, Оптимальное управление и вариационное исчисление.

Вторая вариация

Варьирование функционала действия

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt.$$

Вторая вариация

Варьирование функционала действия

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt.$$

Первая производная по ε в нуле (из нее получаем уравнения Лагранжа)

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t)\dot{h}(t)\, dt$$

Вторая вариация

Варьирование функционала действия

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(q(t) + \varepsilon h(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t)\, dt.$$

Первая производная по ε в нуле (из нее получаем уравнения Лагранжа)

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) \dot{h}(t)\, dt$$

Вторая производная по ε в нуле

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \dot{h}_i \dot{h}_j + 2 \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{h}_i h_j + \frac{\partial L^2}{\partial q_i \partial q_j} h_i h_j \right) dt$$

Вторая вариация

Вторая производная по ε в нуле

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \dot{h}_i \dot{h}_j + 2 \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{h}_i h_j + \frac{\partial L^2}{\partial q_i \partial q_j} h_i h_j \right) dt$$

Вторая вариация

Вторая производная по ε в нуле

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \dot{h}_i \dot{h}_j + 2 \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{h}_i h_j + \frac{\partial L^2}{\partial q_i \partial q_j} h_i h_j \right) dt$$

Запишем это выражение в более коротком виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} ((A\dot{h}, \dot{h}) + 2(C\dot{h}, h) + (Bh, h))\, dt.$$

Вторая вариация

Вторая производная по ε в нуле

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \dot{h}_i \dot{h}_j + 2 \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{h}_i h_j + \frac{\partial L^2}{\partial q_i \partial q_j} h_i h_j \right) dt$$

Запишем это выражение в более коротком виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} ((A\dot{h}, \dot{h}) + 2(C\dot{h}, h) + (Bh, h))\, dt.$$

Здесь A, B и C — соответствующие матрицы вторых производных, куда мы подставили решение $q(t)$ уравнения Лагранжа, минимальность которого мы изучаем.

Вторая вариация

Вторая производная по ε в нуле

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \dot{h}_i \dot{h}_j + 2 \frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{h}_i h_j + \frac{\partial L^2}{\partial q_i \partial q_j} h_i h_j \right) dt$$

Запишем это выражение в более коротком виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left((A\dot{h}, \dot{h}) + 2(C\dot{h}, h) + (Bh, h) \right) dt.$$

Здесь A, B и C — соответствующие матрицы вторых производных, куда мы подставили решение $q(t)$ уравнения Лагранжа, минимальность которого мы изучаем.

Обозначим этот интеграл $\delta^2 W$.

Вторая вариация

Определение. Будем говорить, что $\delta^2 W$ положительно определен, если на любых функциях h ($h(t_0) = h(t_1) = 0$) он неотрицателен и равен нулю только на $h \equiv 0$.

Вторая вариация

Определение. Будем говорить, что $\delta^2 W$ положительно определен, если на любых функциях h $(h(t_0) = h(t_1) = 0)$ он неотрицателен и равен нулю только на $h \equiv 0$.

Для того, чтобы $\delta^2 W$ был положительно определен нам потребуется выполнение двух условий. Первое — усиленное условие Лежандра.

Вторая вариация

Определение. Будем говорить, что $\delta^2 W$ положительно определен, если на любых функциях h $(h(t_0) = h(t_1) = 0)$ он неотрицателен и равен нулю только на $h \equiv 0$.

Для того, чтобы $\delta^2 W$ был положительно определен нам потребуется выполнение двух условий. Первое — усиленное условие Лежандра.

Усиленное условие Лежандра. Будем говорить, что $\delta^2 W$ удовлетворяет усиленному условию Лежандра, если для всех $t \in [t_0, t_1]$ матрица $A(t)$ положительно определена.

Вторая вариация

Определение. Будем говорить, что $\delta^2 W$ положительно определен, если на любых функциях h $(h(t_0) = h(t_1) = 0)$ он неотрицателен и равен нулю только на $h \equiv 0$.

Для того, чтобы $\delta^2 W$ был положительно определен нам потребуется выполнение двух условий. Первое — усиленное условие Лежандра.

Усиленное условие Лежандра. Будем говорить, что $\delta^2 W$ удовлетворяет усиленному условию Лежандра, если для всех $t \in [t_0, t_1]$ матрица $A(t)$ положительно определена.

В механике оно всегда выполнено, потому что кинетичексая энергия положительно определена.

Вторая вариация

Второе условие, которое должно выполняться — отсутствие сопряженных точек на $[t_0, t_1]$. Сопряженные точки определяются через уравнение Якоби, которое является уравнением Лагранжа для $\delta^2 W$:

$$\delta^2 W = \int\limits_{t_0}^{t_1} ((A\dot{h}, \dot{h}) + 2(C\dot{h}, h) + (Bh, h))\, dt.$$

Вторая вариация

Второе условие, которое должно выполняться — отсутствие сопряженных точек на $[t_0, t_1]$. Сопряженные точки определяются через уравнение Якоби, которое является уравнением Лагранжа для $\delta^2 W$:

$$\delta^2 W = \int\limits_{t_0}^{t_1} ((A\dot{h}, \dot{h}) + 2(C\dot{h}, h) + (Bh, h))\, dt.$$

Уравнение Лагранжа (для h, матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ строятся с помощью решения первоначальной задачи $q(t)$):

$$-\frac{d}{dt}[A\dot{h} + C^T h] + [C\dot{h} + Bh] = 0.$$

Вторая вариация

$$-\frac{d}{dt}[A\dot{h} + C^T h] + [C\dot{h} + Bh] = 0.$$

Вторая вариация

$$-\frac{d}{dt}[A\dot{h} + C^T h] + [C\dot{h} + Bh] = 0.$$

Это линейное неавтономное (в общем случае) уравнение.

Вторая вариация

$$-\frac{d}{dt}[A\dot{h} + C^T h] + [C\dot{h} + Bh] = 0.$$

Это линейное неавтономное (в общем случае) уравнение.

Определение. Точка $\tau > t_0$ называется сопряженной с точкой t_0, если существует нетривиальное решение $h(t)$ уравнения Якоби такое, что $h(t_0) = h(\tau) = 0$.

Вторая вариация

$$-\frac{d}{dt}[A\dot{h} + C^T h] + [C\dot{h} + Bh] = 0.$$

Это линейное неавтономное (в общем случае) уравнение.

Определение. Точка $\tau > t_0$ называется сопряженной с точкой t_0, если существует нетривиальное решение $h(t)$ уравнения Якоби такое, что $h(t_0) = h(\tau) = 0$.

Теорема. Пусть выполнено усиленное условие Лежандра и на $[t_0, t_1]$ нет сопряженных точек. Тогда $q(t)$ — минимум функционала действия.

Вторая вариация

$$-\frac{d}{dt}[A\dot{h} + C^T h] + [C\dot{h} + Bh] = 0.$$

Это линейное неавтономное (в общем случае) уравнение.

Определение. Точка $\tau > t_0$ называется сопряженной с точкой t_0, если существует нетривиальное решение $h(t)$ уравнения Якоби такое, что $h(t_0) = h(\tau) = 0$.

Теорема. Пусть выполнено усиленное условие Лежандра и на $[t_0, t_1]$ нет сопряженных точек. Тогда $q(t)$ — минимум функционала действия.

Замечание. Этот минимум называется слабым. Бывает еще сильный минимум. Различие заключается в классе допустимых путей, соединяющих наши точки (см., например, С.В. Конягин, Вариационное исчисление и оптимальное управление).

Задача 21.18

21.18 *Частица массы m движется в однородном поле силы тяжести, силовые линии котрого параллельны оси Oz. Показать, что действие по Гамильтону на решении, которое проходит через две произвольные точки, не лежащие в одной плоскости $t = const$, имеет минимум.*

Задача 21.18

21.18 *Частица массы m движется в однородном поле силы тяжести, силовые линии котрого параллельны оси Oz. Показать, что действие по Гамильтону на решении, которое проходит через две произвольные точки, не лежащие в одной плоскости $t = const$, имеет минимум.*

Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

21.18 *Частица массы m движется в однородном поле силы тяжести, силовые линии котрого параллельны оси Oz. Показать, что действие по Гамильтону на решении, которое проходит через две произвольные точки, не лежащие в одной плоскости $t = const$, имеет минимум.*

Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Матрица $A = m \cdot E$, где E — единичная матрица. Уравнение Якоби:

$$\ddot{h} = 0.$$

Задача 21.18

21.18 *Частица массы m движется в однородном поле силы тяжести, силовые линии котрого параллельны оси Oz. Показать, что действие по Гамильтону на решении, которое проходит через две произвольные точки, не лежащие в одной плоскости $t = const$, имеет минимум.*

Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Матрица $A = m \cdot E$, где E — единичная матрица. Уравнение Якоби:

$$\ddot{h} = 0.$$

Решение — линейная функция. Может быть нулем в двух точках только если $h \equiv 0$. Любые две точки можно соединить решением (проверяется непосредственно).

Задача 21.18

21.18 *Частица массы* m *движется в однородном поле силы тяжести, силовые линии котрого параллельны оси* Oz. *Показать, что действие по Гамильтону на решении, которое проходит через две произвольные точки, не лежащие в одной плоскости* $t = const$, *имеет минимум.*

Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Задача 21.18

21.18 *Частица массы m движется в однородном поле силы тяжести, силовые линии котрого параллельны оси Oz. Показать, что действие по Гамильтону на решении, которое проходит через две произвольные точки, не лежащие в одной плоскости $t = const$, имеет минимум.*

Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Уравнение для компоненты z:

$$\ddot{z} = -g, \quad z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Задача 21.18

21.18 *Частица массы m движется в однородном поле силы тяжести, силовые линии котрого параллельны оси Oz. Показать, что действие по Гамильтону на решении, которое проходит через две произвольные точки, не лежащие в одной плоскости $t = const$, имеет минимум.*

Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Уравнение для компоненты z:

$$\ddot{z} = -g, \quad z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Поэтому (считаем, что $t_0 = 0$ и $t_1 = T$)

$$z_1 = z_0 + \dot{z}_0 T - \frac{gT^2}{2}.$$

Можно выразить $\dot{z}_0$ единственным образом

Спасибо