Интегральные инварианты

Иван Юрьевич Полехин

17 апреля 2020 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Интегральные инварианты

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Интегральные инварианты

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Рассмотрим расширенное фазовое пространство

Интегральные инварианты

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

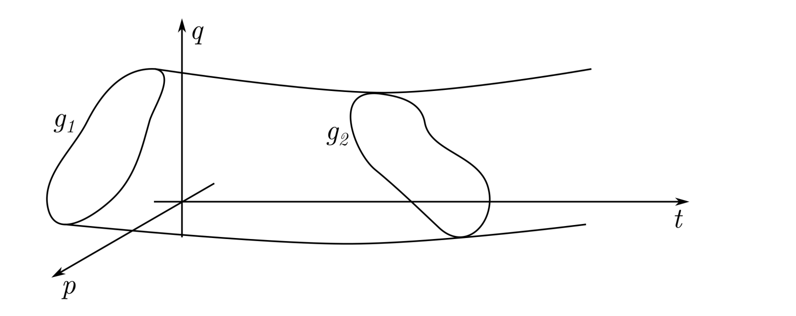
Выберем некоторый контур в плоскости (p, q)

Интегральные инварианты

Выпустим из каждой точки этого контура решение нашей системы. Все вместе они образуют «трубку траекторий».

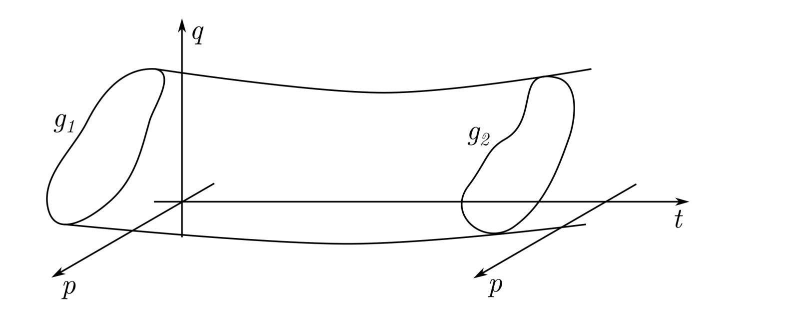
Интегральные инварианты

Выпустим из каждой точки этого контура решение нашей системы. Все вместе они образуют «трубку траекторий». Тогда по любым двум замкнутым контурам g_1 и g_2 значение интегралов $\int\limits_{g_1} pdq - Hdt = \int\limits_{g_2} pdq - Hdt$ совпадают.



Интегральные инварианты

Если оба замкнутых контура g_1 и g_2 лежат в плоскостях $t = const$, то значение интегралов $\int\limits_{g_1} pdq = \int\limits_{g_2} pdq$ совпадают (здесь и выше ориентация на контурах должна быть согласованной).



Интегральные инварианты

Теорема Лиувилля. Пусть дана система $\dot{x} = v(x)$. Тогда она сохраняет фазовый объем с плотностью $\rho(x)$, когда

$$\operatorname{div}(\rho \cdot v) = 0.$$

Фазовый объем (правильнее здесь говорить о «дифференциальной форме объема»)

$$V = \int\limits_G \rho(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Интегральные инварианты

Теорема Лиувилля. Пусть дана система $\dot{x} = v(x)$. Тогда она сохраняет фазовый объем с плотностью $\rho(x)$, когда

$$\operatorname{div}(\rho \cdot v) = 0.$$

Фазовый объем (правильнее здесь говорить о «дифференциальной форме объема»)

$$V = \int\limits_G \rho(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Его сохранение означает следующее

$$\int\limits_G \rho(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int\limits_{\rho^t G} \rho(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Здесь ρ^t — фазовый поток нашего уравнения.

Интегральные инварианты

Следствие. Уравнения Гамильтона сохраняют фазовый объем с $\rho = 1$:

Интегральные инварианты

Следствие. Уравнения Гамильтона сохраняют фазовый объем с $\rho = 1$:

для интеграла

$$V = \int\limits_G dpdq$$

Интегральные инварианты

Следствие. Уравнения Гамильтона сохраняют фазовый объем с $\rho = 1$:

для интеграла

$$V = \int\limits_G dpdq$$

Имеем

$$\int\limits_G dpdq = \int\limits_{\rho^t G} dpdq.$$

Интегральные инварианты

Следствие. Уравнения Гамильтона сохраняют фазовый объем с $\rho = 1$:

для интеграла

$$V = \int\limits_G dpdq$$

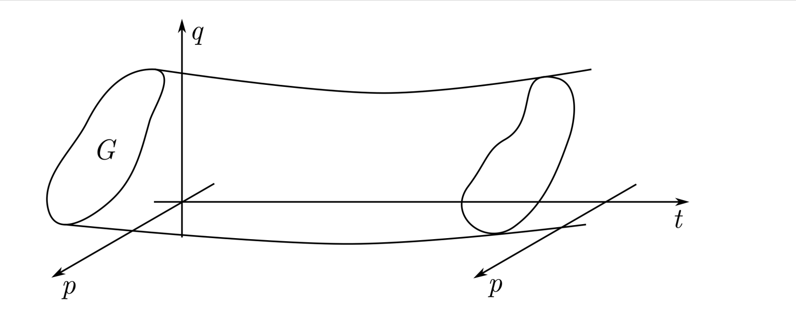
Имеем

$$\int\limits_G dpdq = \int\limits_{\rho^t G} dpdq.$$

Проверка:

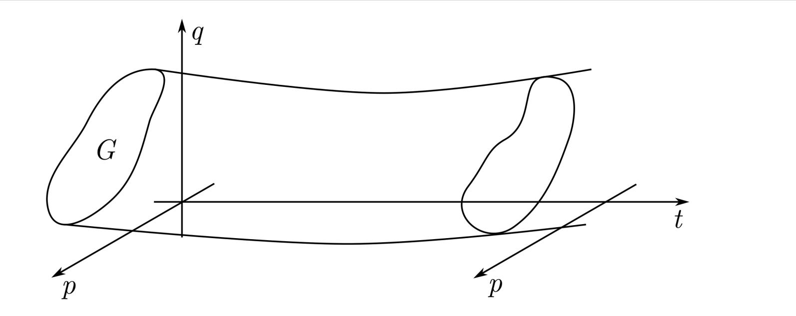
$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p}(-\frac{\partial H}{\partial q}) = 0.$$

Интегральные инварианты



Площадь (объем) области G и ее образа под действием гамильтонова векторного поля совпадают.

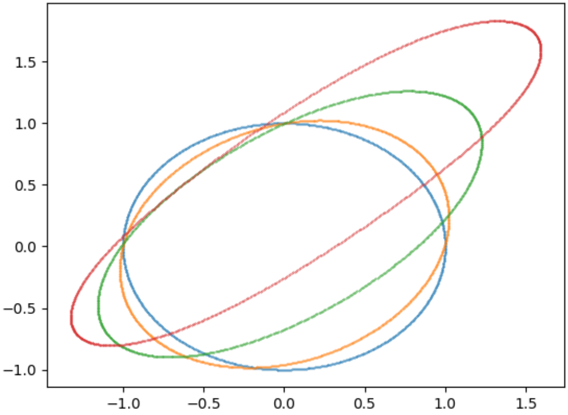
Интегральные инварианты



Площадь (объем) области G и ее образа под действием гамильтонова векторного поля совпадают.

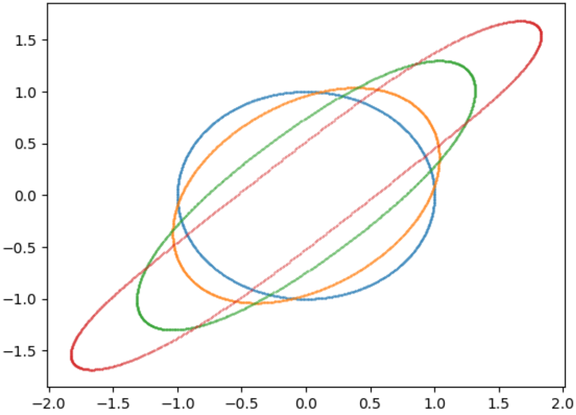
Следствие. В гамильтоновых системах не бывает асимптотически устойчивых положений равновесия.

Интегральные инварианты



Пример деформации области для случая $H = \cos(t^2) \cdot p^2/2 + \cos(q)\sin(t) - qt$.

Интегральные инварианты



Пример деформации области для случая $H = p^2/2 + \cos(q)$.

Задача 22.24

Показать, что из факта сохранения фазового объема для системы

$$\dot{q}_i = Q_i(q,p,t), \quad \dot{p}_i = P_i(q,p,t), \quad i = 1, 2,$$

вообще говоря, нельзя сделать вывод о том, что система является гамильтоновой. Привести пример.

Задача 22.24

Пусть $Q = Q(q, p)$ и $P = P(q, p)$, т.е. система автономна.

Задача 22.24

Пусть $Q = Q(q,p)$ и $P = P(q,p)$, т.е. система автономна. По теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется, если

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \equiv 0.$$

Задача 22.24

Пусть $Q = Q(q, p)$ и $P = P(q, p)$, т.е. система автономна. По теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется, если

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \equiv 0.$$

Положим $Q_1 = q_1 q_2$;

Задача 22.24

Пусть $Q = Q(q, p)$ и $P = P(q, p)$, т.е. система автономна. По теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется, если

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \equiv 0.$$

Положим $Q_1 = q_1 q_2$; $P_1 = -p_1 q_2$;

Задача 22.24

Пусть $Q = Q(q, p)$ и $P = P(q, p)$, т.е. система автономна. По теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется, если

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \equiv 0.$$

Положим $Q_1 = q_1 q_2$; $P_1 = -p_1 q_2$; $Q_2 = 1$;

Задача 22.24

Пусть $Q = Q(q, p)$ и $P = P(q, p)$, т.е. система автономна. По теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется, если

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \equiv 0.$$

Положим $Q_1 = q_1 q_2$; $P_1 = -p_1 q_2$; $Q_2 = 1$; $P_2 = 1$.

Задача 22.24

Пусть $Q = Q(q, p)$ и $P = P(q, p)$, т.е. система автономна. По теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется, если

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \equiv 0.$$

Положим $Q_1 = q_1 q_2$; $P_1 = -p_1 q_2$; $Q_2 = 1$; $P_2 = 1$.

Почему система не является гамильтоновой?

Задача 22.24

Пусть $Q = Q(q, p)$ и $P = P(q, p)$, т.е. система автономна. По теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется, если

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \equiv 0.$$

Положим $Q_1 = q_1 q_2$; $P_1 = -p_1 q_2$; $Q_2 = 1$; $P_2 = 1$.

Почему система не является гамильтоновой?

Потому что должно быть выполнено

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 1.$$

Задача 22.24

Пусть $Q = Q(q, p)$ и $P = P(q, p)$, т.е. система автономна. По теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется, если

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_2}{\partial p_2} \equiv 0.$$

Положим $Q_1 = q_1 q_2$; $P_1 = -p_1 q_2$; $Q_2 = 1$; $P_2 = 1$.

Почему система не является гамильтоновой?

Потому что должно быть выполнено

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 1.$$

Значит $H = -q_2 + c(q_1, p_1, p_2)$. Это противоречит выражению для Q_1.

Задача 22.30

Показать, что фазовый объем линейной стационарной динамической системы $\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ *сохраняется лишь в том случае, когда система гамильтонова.*

Задача 22.30

Из теоремы Лиувилля получаем

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial}{\partial x_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = a_{11} + a_{22} = 0$$

Задача 22.30

Из теоремы Лиувилля получаем

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial}{\partial x_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = a_{11} + a_{22} = 0$$

Получаем, что система имеет вид $\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{11}x_2$

Задача 22.30

Из теоремы Лиувилля получаем

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial}{\partial x_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = a_{11} + a_{22} = 0$$

Получаем, что система имеет вид $\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{11}x_2$

Покажем, что она гамильтонова. Предъявим гамильтониан

$$H = a_{11}x_1x_2 + \frac{a_{12}x_2^2}{2} - \frac{a_{21}x_1^2}{2}.$$

Задача 22.16 ($\approx$ 22.41)

Пусть $F(p,q)$ *— первый интеграл системы. Показать, что*

$$\int\limits_G F(p,q)dpdq$$

— интегральный инвариант системы.

Задача 22.16 ($\approx$ 22.41)

Пусть $F(p, q)$ *— первый интеграл системы. Показать, что*

$$\int\limits_G F(p, q) dp dq$$

— интегральный инвариант системы.

Система имеет вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Задача 22.16 ($\approx$ 22.41)

Пусть $F(p,q)$ — первый интеграл системы. Показать, что

$$\int\limits_G F(p,q)dpdq$$

— интегральный инвариант системы.

Система имеет вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Применим теорему Лиувилля ($\operatorname{div}(\rho v) = 0$). Здесь $\rho = F$ и v — векторное поле (правая часть) уравнений Гамильтона.

Задача 22.16 ($\approx$ 22.41)

Пусть $F(p,q)$ — первый интеграл системы. Показать, что

$$\int\limits_G F(p,q)dpdq$$

— интегральный инвариант системы.

Система имеет вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Применим теорему Лиувилля ($\mathrm{div}(\rho v) = 0$). Здесь $\rho = F$ и v — векторное поле (правая часть) уравнений Гамильтона.

$$\mathrm{div}(\rho v) = \frac{\partial}{\partial q}(F\frac{\partial H}{\partial p}) + \frac{\partial}{\partial p}(-F\frac{\partial H}{\partial q})$$

Задача 22.16 ($\approx$ 22.41)

Пусть $F(p,q)$ *— первый интеграл системы. Показать, что*

$$\int\limits_G F(p,q)dpdq$$

— интегральный инвариант системы.

Система имеет вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Применим теорему Лиувилля ($\mathrm{div}(\rho v) = 0$). Здесь $\rho = F$ и v — векторное поле (правая часть) уравнений Гамильтона.

$$\mathrm{div}(\rho v) = \frac{\partial}{\partial q}(F\frac{\partial H}{\partial p}) + \frac{\partial}{\partial p}(-F\frac{\partial H}{\partial q}) = \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + F\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p} - F\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}.$$

Задача 22.16 ($\approx$ 22.41)

Пусть $F(p,q)$ — первый интеграл системы. Показать, что

$$\int\limits_G F(p,q)dpdq$$

— интегральный инвариант системы.

Система имеет вид

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Применим теорему Лиувилля ($\mathrm{div}(\rho v) = 0$). Здесь $\rho = F$ и v — векторное поле (правая часть) уравнений Гамильтона.

$$\mathrm{div}(\rho v) = \frac{\partial}{\partial q}(F\frac{\partial H}{\partial p}) + \frac{\partial}{\partial p}(-F\frac{\partial H}{\partial q}) = \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + F\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - F\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}.$$

Первые два слагаемых равны нулю, потому что F — первый интеграл.

Спасибо