Канонические преобразования

Иван Юрьевич Полехин

24 апреля 2020 г.

МФТИ, `http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/`

Канонические преобразования

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Канонические преобразования

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Пусть задана некоторая замена переменных

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t)$$

Канонические преобразования

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Пусть задана некоторая замена переменных

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t)$$

В каком случае в новых переменных уравнения сохранят форму уравнений Гамильтона и каким будет гамильтониан?

Канонические преобразования

Замена переменных

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t)$$

называется канонической, если в новых координатах уравнения имеют вид уравнений Гамильтона.

Канонические преобразования

Замена переменных
$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t)$$
называется канонической, если в новых координатах уравнения имеют вид уравнений Гамильтона.

Теорема. Замена переменных каноническая тогда и только тогда, когда существует постоянная c и функция F (производящая функция), что для некоторой функции $\tilde{H}(Q, P, t)$ выполнено равенство
$$\sum_i P_i dQ_i - \tilde{H} dt = \sum_i p_i dq_i - H dt - dF.$$

Канонические преобразования

Если замена не зависит от времени

$$Q = Q(q, p), \quad P = P(q, p),$$

Канонические преобразования

Если замена не зависит от времени

$$Q = Q(q,p), \quad P = P(q,p), \quad q = q(Q,P), \quad p = p(Q,P)$$

то верно следующее

Канонические преобразования

Если замена не зависит от времени

$$Q = Q(q,p), \quad P = P(q,p), \quad q = q(Q,P), \quad p = p(Q,P)$$

то верно следующее

Следствие. Замена переменных каноническая тогда и только тогда, когда существует постоянная c и функция F (производящая функция), выполнено равенство

$$\sum_i P_i dQ_i - \tilde{H} dt = c\left(\sum_i p_i dq_i - H dt\right) - dF.$$

Здесь $\tilde{H}(Q,P,t) = cH(q(Q,P), p(Q,P), t)$.

Канонические преобразования

Другими словами, если замена не зависит от времени

$$Q = Q(q,p), \quad P = P(q,p),$$

Канонические преобразования

Другими словами, если замена не зависит от времени

$$Q = Q(q,p), \quad P = P(q,p), \quad q = q(Q,P), \quad p = p(Q,P)$$

то она каноническая, если существует постоянная c и функция F (производящая функция) такие, что

$$\sum_i P_i dQ_i = c\left(\sum_i p_i dq_i\right) - dF.$$

Задача 23.6 *Установить каноничность и найти c и F для замены*

$$Q = pe^q, \quad P = q + e^{-q} + \ln p.$$

Задача 23.6 *Установить каноничность и найти c и F для замены*

$$Q = pe^q, \quad P = q + e^{-q} + \ln p.$$

Запишем условие каноничности

$$c \cdot pdq - PdQ = dF.$$

Надо найти $F(p,q)$ и постоянную c.

Задача 23.6 *Установить каноничность и найти c и F для замены*

$$Q = pe^q, \quad P = q + e^{-q} + \ln p.$$

Запишем условие каноничности

$$c \cdot pdq - PdQ = dF.$$

Надо найти $F(p, q)$ и постоянную c. Подставим P и Q:

$$c \cdot pdq - (q + e^{-q} + \ln p)(e^q dp + pe^q dq) = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp.$$

Задача 23.6

$$c \cdot p dq - (q + e^{-q} + \ln p)(e^q dp + pe^q dq) = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp.$$

Задача 23.6

$$c \cdot pdq - (q + e^{-q} + \ln p)(e^q dp + pe^q dq) = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp.$$

Получаем

$$c \cdot pdq - (qe^q dp + pqe^q dq + dp + pdq + e^q \ln p dp + p \ln p e^q dq) = dF$$

Задача 23.6

$$c \cdot pdq - (q + e^{-q} + \ln p)(e^q dp + pe^q dq) = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp.$$

Получаем

$$c \cdot pdq - (qe^q dp + pqe^q dq + dp + pdq + e^q \ln p dp + p \ln p e^q dq) = dF$$

Приравняем нулю коэффициенты перед dq и dp:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -qe^q - 1 + e^q \ln p$$

Задача 23.6

$$c \cdot pdq - (q + e^{-q} + \ln p)(e^q dp + pe^q dq) = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp.$$

Получаем

$$c \cdot pdq - (qe^q dp + pqe^q dq + dp + pdq + e^q \ln p dp + p \ln p e^q dq) = dF$$

Приравняем нулю коэффициенты перед dq и dp:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -qe^q - 1 + e^q \ln p$$

Интегрируем

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Задача 23.6

$$c \cdot pdq - (q + e^{-q} + \ln p)(e^q dp + pe^q dq) = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp.$$

Получаем

$$c \cdot pdq - (qe^q dp + pqe^q dq + dp + pdq + e^q \ln p dp + p \ln p e^q dq) = dF$$

Приравняем нулю коэффициенты перед dq и dp:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -qe^q - 1 + e^q \ln p$$

Интегрируем

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q + p + p \ln p e^q$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p\ln pe^q$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p \ln pe^q$$

Из выражения для F

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp + \frac{\partial f}{\partial q}$$

Покажем, что эти выражения совпадают при $c = 1$ и $f = 0$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p \ln p e^q$$

Из выражения для F

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp + \frac{\partial f}{\partial q}$$

Покажем, что эти выражения совпадают при $c = 1$ и $f = 0$

$$-pqe^q - p \ln p e^q = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p \ln pe^q$$

Из выражения для F

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp + \frac{\partial f}{\partial q}$$

Покажем, что эти выражения совпадают при $c = 1$ и $f = 0$

$$-pqe^q - p \ln pe^q = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp$$

$$-p \ln p = -p - \int \ln p dp$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p \ln pe^q$$

Из выражения для F

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp + \frac{\partial f}{\partial q}$$

Покажем, что эти выражения совпадают при $c = 1$ и $f = 0$

$$-pqe^q - p \ln pe^q = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp$$

$$-p \ln p = -p - \int \ln p dp \Rightarrow -\ln p - 1 = -1 - \ln p.$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p \ln pe^q$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p \ln pe^q$$

Из выражения для F

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp + \frac{\partial f}{\partial q}$$

Покажем, что эти выражения совпадают при $c = 1$ и $f = 0$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p \ln pe^q$$

Из выражения для F

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp + \frac{\partial f}{\partial q}$$

Покажем, что эти выражения совпадают при $c = 1$ и $f = 0$

$$-pqe^q - p \ln pe^q = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p \ln pe^q$$

Из выражения для F

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp + \frac{\partial f}{\partial q}$$

Покажем, что эти выражения совпадают при $c = 1$ и $f = 0$

$$-pqe^q - p \ln pe^q = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp$$

$$-p \ln p = -p - \int \ln p dp$$

Задача 23.6

$$F = -qpe^q - p - e^q \int \ln p dp + f(q)$$

Из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial q} = cp - pqe^q - p - p \ln pe^q$$

Из выражения для F

$$\frac{\partial F}{\partial q} = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp + \frac{\partial f}{\partial q}$$

Покажем, что эти выражения совпадают при $c = 1$ и $f = 0$

$$-pqe^q - p \ln pe^q = -pe^q - pqe^q - e^q \int \ln p dp$$

$$-p \ln p = -p - \int \ln p dp \Rightarrow -\ln p - 1 = -1 - \ln p.$$

Задача 23.21

Задача 23.21 *Задан переход от одних обобщенных координат к другим:* $x_i = x_i(q)$. *Как при этом связаны обобщенные импульсы? (*p_{x_i} *через* p_r, p_θ, p_φ*)*

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

Задача 23.21 *Задан переход от одних обобщенных координат к другим:* $x_i = x_i(q)$*. Как при этом связаны обобщенные импульсы? (*p_{x_i} *через* p_r*,* p_θ*,* p_φ*)*

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

Есть некоторая замена $Q = Q(q)$, $P = P(q,p)$.

Задача 23.21

Задача 23.21 *Задан переход от одних обобщенных координат к другим:* $x_i = x_i(q)$. *Как при этом связаны обобщенные импульсы? (*p_{x_i} *через* p_r, p_θ, p_φ*)*

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

Есть некоторая замена $Q = Q(q)$, $P = P(q, p)$. В каком случае она будет канонической?

Задача 23.21

Задача 23.21 *Задан переход от одних обобщенных координат к другим:* $x_i = x_i(q)$. *Как при этом связаны обобщенные импульсы? (*p_{x_i} *через* p_r, p_θ, p_φ*)*

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

Есть некоторая замена $Q = Q(q)$, $P = P(q, p)$. В каком случае она будет канонической?

Должно быть выполнено ($c = 1$, $F = 0$):

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i dQ_i$$

Задача 23.21

Должно быть выполнено ($c = 1,\ F = 0$):

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i dQ_i$$

Задача 23.21

Должно быть выполнено ($c = 1$, $F = 0$):

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i dQ_i$$

Считаем, что P — импульсы в декартовой системе, Q — координаты в декартовой системе.

Задача 23.21

Должно быть выполнено ($c = 1$, $F = 0$):

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i dQ_i$$

Считаем, что P — импульсы в декартовой системе, Q — координаты в декартовой системе.

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j$$

Задача 23.21

Должно быть выполнено ($c = 1$, $F = 0$):

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i dQ_i$$

Считаем, что P — импульсы в декартовой системе, Q — координаты в декартовой системе.

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j$$

Поэтому (приравниваем коэфф. при dq_i):

Задача 23.21

Должно быть выполнено ($c = 1$, $F = 0$):

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i dQ_i$$

Считаем, что P — импульсы в декартовой системе, Q — координаты в декартовой системе.

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_i P_i \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} dq_j$$

Поэтому (приравниваем коэфф. при dq_i):

$$p_i = P_1 \frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + P_2 \frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + P_3 \frac{\partial Q_3}{\partial q_i}.$$

Задача 23.21

$$p_i = P_1 \frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + P_2 \frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + P_3 \frac{\partial Q_3}{\partial q_i}.$$

Задача 23.21

$$p_i = P_1 \frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + P_2 \frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + P_3 \frac{\partial Q_3}{\partial q_i}.$$

Запишем это в матричной форме

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

Задача 23.21

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

Найдем обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 23.21

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

Найдем обратную к матрице

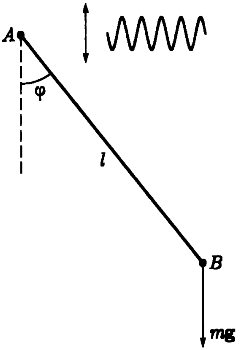
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial q_3} & \frac{\partial Q_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Непосредственно можно проверить, что обратная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{-1}{r\sin\theta}\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & \frac{1}{r\sin\theta}\cos\theta \\ \cos\theta & \frac{-1}{r}\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Стабилизация перевернутого маятника

Рассморим следующую задачу: плоский математический маятник, точка подвеса которого совершает быстрые вертикальные колебания.



Лагранжиан задачи:

$$L = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{a\omega}{l}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\tau + \omega^2\cos\varphi.$$

Здесь $\tau = \omega t/\varepsilon$ и закон вертикального движения точки подвеса $y_A = a\varepsilon\cos(\omega t/\varepsilon)$, $\omega = \sqrt{g/l}$.

Стабилизация перевернутого маятника

Лагранжиан задачи:

$$L = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{a\omega}{l}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\tau + \omega^2\cos\varphi.$$

Здесь $\tau = \omega t/\varepsilon$ и закон вертикального движения точки подвеса $y_A = a\varepsilon\cos(\omega t/\varepsilon)$, $\omega = \sqrt{g/l}$.

Переходим к уравнениям Гамильтона: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$:

$$p = \dot{\varphi} - \frac{a\omega}{l}\sin\varphi\sin\tau$$

$$H(\varphi, p, t) = \frac{p^2}{2} + p\frac{a\omega}{l}\sin\varphi\sin\tau + \frac{a^2\omega^2}{2l^2}\sin^2\varphi\sin^2\tau - \omega^2\cos\varphi$$

Стабилизация перевернутого маятника

$$p = \dot{\varphi} - \frac{a\omega}{l} \sin\varphi \sin\tau$$

$$H(\varphi, p, t) = \frac{p^2}{2} + p\frac{a\omega}{l} \sin\varphi \sin\tau + \frac{a^2\omega^2}{2l^2} \sin^2\varphi \sin^2\tau - \omega^2 \cos\varphi$$

Будем искать каноническую замену такую, чтобы от t Зависили слагаемые только порядка ε. Для этого будем искать производящую функцию $W(\varphi, P, t)$.

Стабилизация перевернутого маятника

$$p = \dot{\varphi} - \frac{a\omega}{l}\sin\varphi\sin\tau$$

$$H(\varphi, p, t) = \frac{p^2}{2} + p\frac{a\omega}{l}\sin\varphi\sin\tau + \frac{a^2\omega^2}{2l^2}\sin^2\varphi\sin^2\tau - \omega^2\cos\varphi$$

Будем искать каноническую замену такую, чтобы от t Зависили слагаемые только порядка ε. Для этого будем искать производящую функцию $W(\varphi, P, t)$.

Производящая функция

Стабилизация перевернутого маятника

$$p = \dot{\varphi} - \frac{a\omega}{l}\sin\varphi\sin\tau$$

$$H(\varphi, p, t) = \frac{p^2}{2} + p\frac{a\omega}{l}\sin\varphi\sin\tau + \frac{a^2\omega^2}{2l^2}\sin^2\varphi\sin^2\tau - \omega^2\cos\varphi$$

Будем искать каноническую замену такую, чтобы от t Зависили слагаемые только порядка ε. Для этого будем искать производящую функцию $W(\varphi, P, t)$.

Производящая функция $\rightarrow$ замена переменных $+$ новый гамильтониан.

Стабилизация перевернутого маятника

$$p = \dot{\varphi} - \frac{a\omega}{l}\sin\varphi\sin\tau$$

$$H(\varphi, p, t) = \frac{p^2}{2} + p\frac{a\omega}{l}\sin\varphi\sin\tau + \frac{a^2\omega^2}{2l^2}\sin^2\varphi\sin^2\tau - \omega^2\cos\varphi$$

Будем искать каноническую замену такую, чтобы от t Зависили слагаемые только порядка ε. Для этого будем искать производящую функцию $W(\varphi, P, t)$.

Производящая функция $\to$ замена переменных $+$ новый гамильтониан.

Если

$$\frac{\partial^2 W}{\partial P \partial\varphi} \neq 0,$$

то замена задается формулами

$$p = \frac{\partial W}{\partial\varphi}, \quad \Phi = \frac{\partial W}{\partial P}$$

и новый гамильтониан выражается через старый по формуле $\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$.

Стабилизация перевернутого маятника

замена задается формулами

$$p = \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad \Phi = \frac{\partial W}{\partial P}$$

и новый гамильтониан выражается через старый по формуле $\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$.

Стабилизация перевернутого маятника

замена задается формулами

$$p = \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad \Phi = \frac{\partial W}{\partial P}$$

и новый гамильтониан выражается через старый по формуле $\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$. В частности, тождественная замена задается $W = P\varphi$.

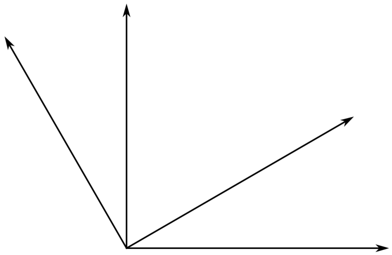
замена задается формулами

$$p = \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad \Phi = \frac{\partial W}{\partial P}$$

и новый гамильтониан выражается через старый по формуле $\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$. В частности, тождественная замена задается $W = P\varphi$. Мы будем искать замену, которая близка к тождественной: $W = P\varphi + \varepsilon f(\varphi, P, \tau)$.

Стабилизация перевернутого маятника

$W = W(P, \varphi, t)$ — можно использовать «смешанные координаты»:



Стабилизация перевернутого маятника

Мы будем искать замену, которая близка к тождественной: $W = P\varphi + \varepsilon f(\varphi, P, \tau)$.

$$p = \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad \Phi = \frac{\partial W}{\partial P}$$

и новый гамильтониан выражается через старый по формуле $\tilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$.

$$p = P + \varepsilon f_\varphi, \quad \Phi = \varphi + \varepsilon f_P$$

$$\tilde{H}(\Phi, P, \tau) = \varepsilon f_t + H(\varphi, p, \tau) = \omega f_\tau + H(\Phi - \varepsilon f_P, P + \varepsilon f_\varphi, \tau).$$

Раскладываем в ряд Тейлора по ε:

$$\tilde{H} = \omega f_\tau(\Phi, P, \tau) + H(\Phi, P, \tau) + O(\varepsilon).$$

Стабилизация перевернутого маятника

Раскладываем в ряд Тейлора по ε:

$$\tilde{H} = \omega f_\tau(\Phi, P, \tau) + H(\Phi, P, \tau) + O(\varepsilon).$$

Рассмотрим все слагаемые порядка ε^0, которые содержат τ и подберем f такой, чтобы они в сумме давали некоторую величину, которая от τ не зависит:

$$F = \omega f_\tau(\Phi, P, \tau) + P\frac{a\omega}{l}\sin\Phi\sin\tau + \frac{a^2\omega^2}{2l^2}\sin^2\Phi\sin^2\tau$$

Стабилизация перевернутого маятника

Раскладываем в ряд Тейлора по ε:

$$\tilde{H} = \omega f_\tau(\Phi, P, \tau) + H(\Phi, P, \tau) + O(\varepsilon).$$

Рассмотрим все слагаемые порядка ε^0, которые содержат τ и подберем f такой, чтобы они в сумме давали некоторую величину, которая от τ не зависит:

$$F = \omega f_\tau(\Phi, P, \tau) + P\frac{a\omega}{l}\sin\Phi\sin\tau + \frac{a^2\omega^2}{2l^2}\sin^2\Phi\sin^2\tau$$

если

$$f(\Phi, P, \tau) = P\frac{a}{l}\sin\Phi\cos\tau + \frac{a^2\omega}{8l^2}\sin^2\Phi\sin 2\tau$$

то

$$F = \frac{a^2\omega^2}{4l^2}\sin^2\Phi.$$

Стабилизация перевернутого маятника

В новых координатах гамильтониан имеет вид (окончательно)

$$\tilde{H} = \frac{P^2}{2} - \omega^2 \cos \Phi + \frac{a^2 \omega^2}{4 l^2} \sin^2 \Phi + O(\varepsilon)$$

Стабилизация перевернутого маятника

В новых координатах гамильтониан имеет вид (окончательно)

$$\tilde{H} = \frac{P^2}{2} - \omega^2 \cos\Phi + \frac{a^2\omega^2}{4l^2}\sin^2\Phi + O(\varepsilon)$$

Считаем, что ε мало и отбросим слагаемые $O(\varepsilon)$.

В новых координатах гамильтониан имеет вид (окончательно)

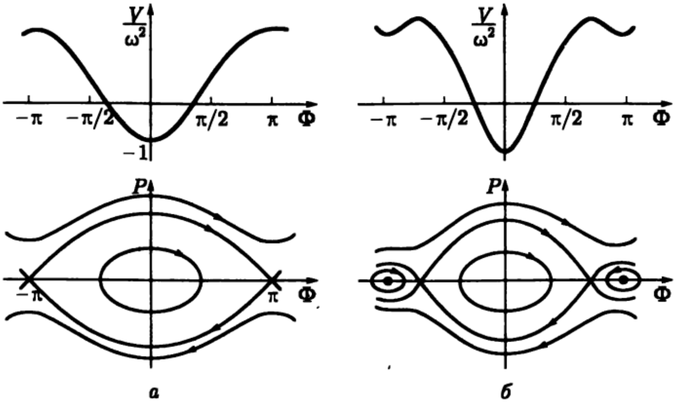
$$\tilde{H} = \frac{P^2}{2} - \omega^2 \cos\Phi + \frac{a^2\omega^2}{4l^2} \sin^2\Phi + O(\varepsilon)$$

Считаем, что ε мало и отбросим слагаемые $O(\varepsilon)$. Тогда потенциальная энергия системы имеет вид

$$V = \omega^2(-\cos\Phi + \frac{a^2}{4l^2} \sin^2\Phi)$$

Стабилизация перевернутого маятника

При $a^2 > 2l^2$ у потенциальной энергии есть дополнительный минимум в точке π (верхнее положение равновесия). При $a^2 > 2l^2$ и малых ε верхнее положение устойчиво.



Спасибо