Уравнение Гамильтона-Якоби

Иван Юрьевич Полехин

30 апреля 2020 г.

МФТИ, `http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/`

Канонические преобразования

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Канонические преобразования

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Рассмотрим каноническое преобразование валентности 1, задаваемое некоторой производящей функцией $S = S(q, Q, t)$.

Канонические преобразования

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Рассмотрим каноническое преобразование валентности 1, задаваемое некоторой производящей функцией $S = S(q, Q, t)$.

Производящая функция задает формулы перехода от старых переменных (q, p) к новым (Q, P) и с ее помощью получается выражение для нового гамильтониана $\tilde{H}$:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial S}{\partial Q}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Канонические преобразования

Рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H(p, q, t)$:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial p}.$$

Рассмотрим каноническое преобразование валентности 1, задаваемое некоторой производящей функцией $S = S(q, Q, t)$.

Производящая функция задает формулы перехода от старых переменных (q, p) к новым (Q, P) и с ее помощью получается выражение для нового гамильтониана $\tilde{H}$:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial S}{\partial Q}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

В соответствующих точках должно быть выполнено условие

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial Q} \neq 0.$$

Оно необходимо для того, чтобы локально можно было выразить Q и P через q и p.

Канонические преобразования

Производящая функция задает формулы перехода от старых переменных (q, p) к новым (Q, P) и с ее помощью получается выражение для нового гамильтониана $\tilde{H}$:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial S}{\partial Q}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Канонические преобразования

Производящая функция задает формулы перехода от старых переменных (q, p) к новым (Q, P) и с ее помощью получается выражение для нового гамильтониана $\tilde{H}$:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial S}{\partial Q}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Будем искать такую замену (т.е. производящую функцию), чтобы новый гамильтониан стал равен 0. В этом случае уравнения гамильтона в новых координатах тривиально интегрируются.

Канонические преобразования

Производящая функция задает формулы перехода от старых переменных (q, p) к новым (Q, P) и с ее помощью получается выражение для нового гамильтониана $\tilde{H}$:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial S}{\partial Q}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Будем искать такую замену (т.е. производящую функцию), чтобы новый гамильтониан стал равен 0. В этом случае уравнения гамильтона в новых координатах тривиально интегрируются.

Уравнение принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0$$

Канонические преобразования

Производящая функция задает формулы перехода от старых переменных (q, p) к новым (Q, P) и с ее помощью получается выражение для нового гамильтониана $\tilde{H}$:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial S}{\partial Q}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Будем искать такую замену (т.е. производящую функцию), чтобы новый гамильтониан стал равен 0. В этом случае уравнения гамильтона в новых координатах тривиально интегрируются.

Уравнение принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0$$

Будем пробовать решать это уравнение в частных производных.

Канонические преобразования

Уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0$$

Нас не будет интересовать какое-либо частное решение этого уравнения, т.е. какая-то одна функция $S(q, t)$. Для нас важно найти *полный интеграл* уравнения Гамильтона-Якоби.

Уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0$$

Нас не будет интересовать какое-либо частное решение этого уравнения, т.е. какая-то одна функция $S(q, t)$. Для нас важно найти *полный интеграл* уравнения Гамильтона-Якоби.

Определение. Полным интегралом называется семейство решений, зависящее от n параметров α_1, α_2, ..., α_n (в случае n степеней свободы), $S(q, \alpha, t)$ такое, что выполнено условие невырожденности

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0.$$

Канонические преобразования

Уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0$$

Нас не будет интересовать какое-либо частное решение этого уравнения, т.е. какая-то одна функция $S(q, t)$. Для нас важно найти *полный интеграл* уравнения Гамильтона-Якоби.

Определение. Полным интегралом называется семейство решений, зависящее от n параметров α_1, α_2, ..., α_n (в случае n степеней свободы), $S(q, \alpha, t)$ такое, что выполнено условие невырожденности

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} \neq 0.$$

Теорема. Если найден полный интеграл, то через него можно выразить решения уравнения Гамильтона в квадратурах.

Теорема. Если найден полный интеграл, то через него можно выразить решения уравнения Гамильтона в квадратурах.

Канонические преобразования

Теорема. Если найден полный интеграл, то через него можно выразить решения уравнения Гамильтона в квадратурах.

Если, как это нередко бывает, гамильтониан H не зависит от времени t, то уравнение Гамильтона-Якоби можно немного упростить.

Канонические преобразования

Теорема. Если найден полный интеграл, то через него можно выразить решения уравнения Гамильтона в квадратурах.

Если, как это нередко бывает, гамильтониан H не зависит от времени t, то уравнение Гамильтона-Якоби можно немного упростить.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q) = 0$$

Канонические преобразования

Теорема. Если найден полный интеграл, то через него можно выразить решения уравнения Гамильтона в квадратурах.

Если, как это нередко бывает, гамильтониан H не зависит от времени t, то уравнение Гамильтона-Якоби можно немного упростить.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q) = 0$$

Возьмем $S(q, \alpha, t) = -h(\alpha)t + I(\alpha, q)$. Тогда уравнение примет вид

$$H(\frac{\partial I}{\partial q}, q) = h(\alpha).$$

Задача 24.3

Задача 24.3. *Методом Якоби найти закон движения математичекого маятника.*

Задача 24.3

Задача 24.3. *Методом Якоби найти закон движения математичекого маятника.*
Будем считать, что $m = g = l = 1$. Тогда

$$T = p^2/2$$

Задача 24.3. *Методом Якоби найти закон движения математичекого маятника.* Будем считать, что $m = g = l = 1$. Тогда

$$T = p^2/2$$

$$V = -\cos q.$$

Задача 24.3. *Методом Якоби найти закон движения математичекого маятника.* Будем считать, что $m = g = l = 1$. Тогда

$$T = p^2/2$$

$$V = -\cos q.$$

$$H = T + V = p^2/2 - \cos q.$$

Задача 24.3

Формулы:

$$S(q, \alpha, t) = -h(\alpha)t + I(\alpha, q)$$

Задача 24.3

Формулы:

$$S(q, \alpha, t) = -h(\alpha)t + I(\alpha, q)$$

$$H(\frac{\partial I}{\partial q}, q) = h(\alpha).$$

Задача 24.3

Формулы:

$$S(q,\alpha,t) = -h(\alpha)t + I(\alpha,q)$$

$$H(\frac{\partial I}{\partial q}, q) = h(\alpha).$$

α и β — константы. Они соответствуют новым переменным P и Q, которые при нулевом гамильтониане не изменяются:

$$p = \frac{\partial I}{\partial q}, \quad \beta = -\frac{\partial h}{\partial \alpha}t + \frac{\partial I}{\partial \alpha}$$

Задача 24.3

$$H(\frac{\partial I}{\partial q}, q) = h(\alpha).$$

Получаем

$$\left(\frac{\partial I}{\partial q}\right)^2 = \alpha + \cos q.$$

Задача 24.3

$$H(\frac{\partial I}{\partial q}, q) = h(\alpha).$$

Получаем

$$\left(\frac{\partial I}{\partial q}\right)^2 = \alpha + \cos q.$$

$$\frac{\partial I}{\partial q} = \pm\sqrt{\alpha + \cos q}.$$

Считаем, что α задано и постоянно. Рассмотрим случай, когда $\alpha > 1$. В таком случае выражение под корнем не обращается в ноль и можно отдельно рассматривать случаи положительного и отрицательного значений корня.

Задача 24.3

$$H(\frac{\partial I}{\partial q}, q) = h(\alpha).$$

Получаем

$$\left(\frac{\partial I}{\partial q}\right)^2 = \alpha + \cos q.$$

$$\frac{\partial I}{\partial q} = \pm\sqrt{\alpha + \cos q}.$$

Считаем, что α задано и постоянно. Рассмотрим случай, когда $\alpha > 1$. В таком случае выражение под корнем не обращается в ноль и можно отдельно рассматривать случаи положительного и отрицательного значений корня. Если подкоренное выражение переходит через ноль, то надо переходить от формулы с $+$ к формуле с $-$ и обратно.

Задача 24.3

$$p = \frac{\partial I}{\partial q} = \pm\sqrt{\alpha + \cos q}.$$

Считаем, что α задано и постоянно. Рассмотрим случай, когда $\alpha > 1$.

$$I(q, \alpha) = \int_0^q \sqrt{\alpha + \cos q}\, dq.$$

Вторая константа, которую мы задаем — β:

$$\beta = -\frac{\partial h}{\partial \alpha} t + \frac{\partial I}{\partial \alpha}$$

Задача 24.3

$$p = \frac{\partial I}{\partial q} = \pm\sqrt{\alpha + \cos q}.$$

Считаем, что α задано и постоянно. Рассмотрим случай, когда $\alpha > 1$.

$$I(q, \alpha) = \int_0^q \sqrt{\alpha + \cos q} dq.$$

Вторая константа, которую мы задаем — β:

$$\beta = -\frac{\partial h}{\partial \alpha} t + \frac{\partial I}{\partial \alpha}$$

$$\beta = -t + \frac{\partial I}{\partial \alpha}$$

Задача 24.3

Из уравнений

$$p = \frac{\partial I}{\partial q} = \sqrt{\alpha + \cos q}.$$

$$I(q, \alpha) = \int_0^q \sqrt{\alpha + \cos q} dq.$$

$$\beta = -t + \frac{\partial I}{\partial \alpha}$$

можем выразить (теоретически, но не в явных формулах) q через α, β и t. Потом из первого уравнения получить $p(t)$.

Случай, когда подкоренное выражение обращается в ноль надо рассматривать отдельно.

Разделение переменных

Иногда уравнение Гамильтона-Якоби имеет некоторую структуру, которая помогает искать полный интеграл.

Разделение переменных

Иногда уравнение Гамильтона-Якоби имеет некоторую структуру, которая помогает искать полный интеграл.

Пусть, например, оно имеет следующий вид

$$\Phi(f(\frac{\partial W}{\partial q_1}, q_1), \frac{\partial W}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_2, ..., q_n, \alpha) = 0$$

Разделение переменных

Иногда уравнение Гамильтона-Якоби имеет некоторую структуру, которая помогает искать полный интеграл.

Пусть, например, оно имеет следующий вид

$$\Phi(f(\frac{\partial W}{\partial q_1}, q_1), \frac{\partial W}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_2, ..., q_n, \alpha) = 0$$

Тогда решение можно искать в виде суммы

$$W = W_1(q_1, \alpha) + W_2(q_2, ..., q_n, \alpha).$$

Разделение переменных

Иногда уравнение Гамильтона-Якоби имеет некоторую структуру, которая помогает искать полный интеграл.

Пусть, например, оно имеет следующий вид

$$\Phi(f(\frac{\partial W}{\partial q_1}, q_1), \frac{\partial W}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_2, ..., q_n, \alpha) = 0$$

Тогда решение можно искать в виде суммы

$$W = W_1(q_1, \alpha) + W_2(q_2, ..., q_n, \alpha).$$

Притом W_1 находится из уравнения

$$f(\frac{\partial W}{\partial q_1}, q_1) = k(\alpha)$$

Разделение переменных

После чего W_2 должна удовлетворять уравнению ($k(\alpha)$ произвольно, например, α_i).

$$\Phi(k(\alpha), \frac{\partial W}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_2, ..., q_n, \alpha) = 0$$

Задача 24.36. *Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и проинтегрировать в квадратурах систему*

$$H = (p_1 q_2 + 2p_1 p_2 + q_1^2)/2$$

Задача 24.36. *Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и проинтегрировать в квадратурах систему*

$$H = (p_1 q_2 + 2p_1 p_2 + q_1^2)/2$$

В этой системе пара переменных q_2 и p_2 отделяется:

$$H = (p_1(q_2 + 2p_2) + q_1^2)/2$$

$f = q_2 + 2p_2$.

Задача 24.36. *Найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и проинтегрировать в квадратурах систему*

$$H = (p_1 q_2 + 2p_1 p_2 + q_1^2)/2$$

В этой системе пара переменных q_2 и p_2 отделяется:

$$H = (p_1(q_2 + 2p_2) + q_1^2)/2$$

$f = q_2 + 2p_2$. Первое уравнение

$$2\frac{\partial I_2}{\partial q_2} + q_2 = \alpha_2$$

Задача 24.36

$$2\frac{\partial I_2}{\partial q_2} + q_2 = \alpha_2$$

Решение

$$I_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 q_2 - \frac{q_2^2}{2})$$

Задача 24.36

Решение

$$I_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 q_2 - \frac{q_2^2}{2})$$

Второе уравнение $H = (p_1(q_2 + 2p_2) + q_1^2)/2$

$$\alpha_2 \frac{\partial I_1}{\partial q_1} + q_1^2 = 2\alpha_1$$

Задача 24.36

Решение

$$I_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 q_2 - \frac{q_2^2}{2})$$

Второе уравнение $H = (p_1(q_2 + 2p_2) + q_1^2)/2$

$$\alpha_2 \frac{\partial I_1}{\partial q_1} + q_1^2 = 2\alpha_1$$

Решение

$$I_1 = \frac{1}{\alpha_2}(2\alpha_1 q_1 - \frac{q_1^3}{3})$$

Задача 24.36

Решение

$$I_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 q_2 - \frac{q_2^2}{2})$$

Второе уравнение $H = (p_1(q_2 + 2p_2) + q_1^2)/2$

$$\alpha_2 \frac{\partial I_1}{\partial q_1} + q_1^2 = 2\alpha_1$$

Решение

$$I_1 = \frac{1}{\alpha_2}(2\alpha_1 q_1 - \frac{q_1^3}{3})$$

Производящая функция S:

$$S = \alpha_1 t + I_1 + I_2$$

Задача 24.36

Решение

$$I_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 q_2 - \frac{q_2^2}{2})$$

Второе уравнение $H = (p_1(q_2 + 2p_2) + q_1^2)/2$

$$\alpha_2 \frac{\partial I_1}{\partial q_1} + q_1^2 = 2\alpha_1$$

Решение

$$I_1 = \frac{1}{\alpha_2}(2\alpha_1 q_1 - \frac{q_1^3}{3})$$

Производящая функция S:

$$S = \alpha_1 t + I_1 + I_2$$

Формулы связи старых и новых переменных — самостоятельно.

Задача 24.36

Задача 24.87. *Найти гамильтониан по полному интегралу уравнения Гамильтона-Якоби*

$$S = -\alpha_1 \int f(t)dt + \int \sqrt{\alpha_2 f_2(q_2)}dq_2 + \int \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2) f_1(q_1)}dq_1$$

Задача 24.36

Задача 24.87. *Найти гамильтониан по полному интегралу уравнения Гамильтона-Якоби*

$$S = -\alpha_1 \int f(t)dt + \int \sqrt{\alpha_2 f_2(q_2)}dq_2 + \int \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2) f_1(q_1)}dq_1$$

Уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0$$

Задача 24.87. *Найти гамильтониан по полному интегралу уравнения Гамильтона-Якоби*

$$S = -\alpha_1 \int f(t)dt + \int \sqrt{\alpha_2 f_2(q_2)}dq_2 + \int \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2) f_1(q_1)}dq_1$$

Уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0$$

$$-\alpha_1 f(t) + H(p_1 = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2) f_1(q_1)}, p_2 = \sqrt{\alpha_2 f_2(q_2)}, q_1, q_2, t) = 0$$

Задача 24.36

Задача 24.87. *Найти гамильтониан по полному интегралу уравнения Гамильтона-Якоби*

$$S = -\alpha_1 \int f(t)dt + \int \sqrt{\alpha_2 f_2(q_2)}dq_2 + \int \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2) f_1(q_1)}dq_1$$

Уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0$$

$$-\alpha_1 f(t) + H(p_1 = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2) f_1(q_1)}, p_2 = \sqrt{\alpha_2 f_2(q_2)}, q_1, q_2, t) = 0$$

Несложно подобрать H (p_i, очевидно, должны входить в квадрате, чтобы сократились α_2 надо поделить на f_1 и f_2):

$$H = f(t)(\frac{p_1^2}{f_1} + \frac{p_2^2}{f_2}).$$

Спасибо