Разбор контрольной + динамика твердого тела ч.1

Иван Юрьевич Полехин

13 ноября 2020 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \mathrm{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \mathrm{const}.$$

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \mathrm{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \mathrm{const}.$$

Сохраняющиеся вдоль решений величины называются первыми интегралами.

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \mathrm{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \mathrm{const}.$$

Сохраняющиеся вдоль решений величины называются первыми интегралами.

Простейший пример — энергия. Пусть дан гармонический осциллятор:

$$\ddot{x} = -x.$$

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

Сохраняющиеся вдоль решений величины называются первыми интегралами.

Простейший пример — энергия. Пусть дан гармонический осциллятор:

$$\ddot{x} = -x.$$

Покажем, что величина $\dot{x}^2/2 + x^2/2$ всегда постоянная вдоль любого выбранного решения.

Задача 2, вариант 1

Решение: продифференцировать $\dot{x}^2/2 + x^2/2$ и показать, что полученное выражение равно нулю, используя $\ddot{x} = -x$.

Задача 2, вариант 1

Решение: продифференцировать $\dot{x}^2/2 + x^2/2$ и показать, что полученное выражение равно нулю, используя $\ddot{x} = -x$.

Наглядное пояснение: перепишем наше уравнение в «форме Коши»

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x.$$

Задача 2, вариант 1

Решение: продифференцировать $\dot{x}^2/2 + x^2/2$ и показать, что полученное выражение равно нулю, используя $\ddot{x} = -x$.

Наглядное пояснение: перепишем наше уравнение в «форме Коши»

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x.$$

На плоскости (x, v) получаем векторное поле. Т.е. из точки с координатами (x, v) выходит вектор с координатами $(v, -x)$.

Задача 2, вариант 1

Решение: продифференцировать $\dot{x}^2/2 + x^2/2$ и показать, что полученное выражение равно нулю, используя $\ddot{x} = -x$.

Наглядное пояснение: перепишем наше уравнение в «форме Коши»

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x.$$

На плоскости (x, v) получаем векторное поле. Т.е. из точки с координатами (x, v) выходит вектор с координатами $(v, -x)$.

Траектории решений нашей системы (некоторые кривые на плоскости (x, v)) всегда касаются этого векторного поля (по определению решения ОДУ).

Задача 2, вариант 1

Решение: продифференцировать $\dot{x}^2/2 + x^2/2$ и показать, что полученное выражение равно нулю, используя $\ddot{x} = -x$.

Наглядное пояснение: перепишем наше уравнение в «форме Коши»

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x.$$

На плоскости (x, v) получаем векторное поле. Т.е. из точки с координатами (x, v) выходит вектор с координатами $(v, -x)$.

Траектории решений нашей системы (некоторые кривые на плоскости (x, v)) всегда касаются этого векторного поля (по определению решения ОДУ).

Если задана некоторая функция $f(x, y)$, то ее производная по направлению (v_x, v_y) в точке (x, y) задается следующим образом

$$\partial_v f = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} v_x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} v_y.$$

Смысл производной по направлению — величина изменения f по заданному

Задача 2, вариант 1

Смысл производной по направлению — величина изменения f по заданному направлению. Если f — первый интеграл, то изменение равно нулю.

Задача 2, вариант 1

Смысл производной по направлению — величина изменения f по заданному направлению. Если f — первый интеграл, то изменение равно нулю.

Решим сначала задачу с гармоническим осциллятором.

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x.$$

Задача 2, вариант 1

Смысл производной по направлению — величина изменения f по заданному направлению. Если f — первый интеграл, то изменение равно нулю.

Решим сначала задачу с гармоническим осциллятором.

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x.$$

Энергия

$$E = v^2/2 + x^2/2.$$

Задача 2, вариант 1

Смысл производной по направлению — величина изменения f по заданному направлению. Если f — первый интеграл, то изменение равно нулю.

Решим сначала задачу с гармоническим осциллятором.

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -x.$$

Энергия

$$E = v^2/2 + x^2/2.$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} \cdot v + \frac{\partial E}{\partial v} \cdot (-x) = 0.$$

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \mathrm{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \mathrm{const}.$$

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \mathrm{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \mathrm{const}.$$

Для решения нам нужны уравнения движения. Выпишем их.

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

Для решения нам нужны уравнения движения. Выпишем их.

$$a_{abs} = a_{otn} + a_{per} + a_{cor}$$

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

Для решения нам нужны уравнения движения. Выпишем их.

$$a_{abs} = a_{otn} + a_{per} + a_{cor}$$

На точку никаких внешних сил не действует, поэтому $a_{abs} = 0$.

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

Для решения нам нужны уравнения движения. Выпишем их.

$$a_{abs} = a_{otn} + a_{per} + a_{cor}$$

На точку никаких внешних сил не действует, поэтому $a_{abs} = 0$.

$a_{otn} = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y$

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

Для решения нам нужны уравнения движения. Выпишем их.

$$a_{abs} = a_{otn} + a_{per} + a_{cor}$$

На точку никаких внешних сил не действует, поэтому $a_{abs} = 0$.

$a_{otn} = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y$

$a_{per} = [\omega, [\omega, r]] = (-\omega^2 x)e_x + (-\omega^2 y)e_y$

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \mathrm{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \mathrm{const}.$$

Для решения нам нужны уравнения движения. Выпишем их.

$$a_{abs} = a_{otn} + a_{per} + a_{cor}$$

На точку никаких внешних сил не действует, поэтому $a_{abs} = 0$.

$a_{otn} = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y$

$a_{per} = [\omega, [\omega, r]] = (-\omega^2 x)e_x + (-\omega^2 y)e_y$

$a_{cor} = 2[\omega, \dot{r}] = (-2\omega\dot{y})e_x + (2\omega\dot{x})e_y.$

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

$a_{otn} = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y$

$a_{per} = [\omega, [\omega, r]] = (-\omega^2 x)e_x + (-\omega^2 y)e_y$

$a_{cor} = 2[\omega, \dot{r}] = (-2\omega\dot{y})e_x + (2\omega\dot{x})e_y.$

Задача 2, вариант 1

Задача. Материальная точка движется в плоскости Oxy, которая вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что в относительном движении точки имеют место следующие равенства:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2) = \text{const}, \quad y\dot{x} - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2) = \text{const}.$$

$a_{otn} = \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y$

$a_{per} = [\omega, [\omega, r]] = (-\omega^2 x)e_x + (-\omega^2 y)e_y$

$a_{cor} = 2[\omega, \dot{r}] = (-2\omega\dot{y})e_x + (2\omega\dot{x})e_y.$

Уравнения движения: $\ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y}$, $\ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x}$.

Продифференцируем выражение $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2(x^2 + y^2)$:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - \omega^2(x\dot{x} + y\dot{y}) = \dot{x}(\omega^2 x + 2\omega\dot{y}) + \dot{y}(\omega^2 y - 2\omega\dot{x}) - \omega^2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0$$

Задача 1, вариант 3

Задача. Плоскость Oxy вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Движение точки M в этой плоскости задается функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$ таким образом, что абсолютное ускорение точки совпадает с ее переносным ускорением и начальная относительная скорость v_0 не равна нулю. Найти относительное движение точки.

Задача 1, вариант 3

Задача. Плоскость Oxy вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Движение точки M в этой плоскости задается функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$ таким образом, что абсолютное ускорение точки совпадает с ее переносным ускорением и начальная относительная скорость v_0 не равна нулю. Найти относительное движение точки.

$$a_{abs} = a_{per} + a_{otn} + a_{cor}.$$

Задача 1, вариант 3

Задача. Плоскость Oxy вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Движение точки M в этой плоскости задается функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$ таким образом, что абсолютное ускорение точки совпадает с ее переносным ускорением и начальная относительная скорость v_0 не равна нулю. Найти относительное движение точки.

$$a_{abs} = a_{per} + a_{otn} + a_{cor}.$$

По условию задачи движение такое, что

$$a_{otn} = -a_{cor}.$$

Задача 1, вариант 3

Задача. Плоскость Oxy вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Движение точки M в этой плоскости задается функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$ таким образом, что абсолютное ускорение точки совпадает с ее переносным ускорением и начальная относительная скорость v_0 не равна нулю. Найти относительное движение точки.

$$a_{abs} = a_{per} + a_{otn} + a_{cor}.$$

По условию задачи движение такое, что

$$a_{otn} = -a_{cor}.$$

В координатах

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x}.$$

Задача 1, вариант 3

В координатах

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x}.$$

Задача 1, вариант 3

В координатах

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x}.$$

Введем новые переменные

$$\dot{\xi} = -2\omega\eta, \quad \dot{\eta} = 2\omega\xi.$$

Задача 1, вариант 3

В координатах

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x}.$$

Введем новые переменные

$$\dot{\xi} = -2\omega\eta, \quad \dot{\eta} = 2\omega\xi.$$

Начальные условия $\eta(0) = v_{0y}$, $\xi(0) = v_{0x}$.

Задача 1, вариант 3

В координатах
$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x}.$$

Введем новые переменные
$$\dot{\xi} = -2\omega\eta, \quad \dot{\eta} = 2\omega\xi.$$

Начальные условия $\eta(0) = v_{0y}$, $\xi(0) = v_{0x}$.

Переобозначим $2\omega \mapsto \omega$.

Задача 1, вариант 3

В координатах

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x}.$$

Введем новые переменные

$$\dot{\xi} = -2\omega\eta, \quad \dot{\eta} = 2\omega\xi.$$

Начальные условия $\eta(0) = v_{0y}$, $\xi(0) = v_{0x}$.

Переобозначим $2\omega \mapsto \omega$.

Перепишем уравнения в виде

$$\ddot{\xi} = -\omega^2\xi, \quad \ddot{\eta} = -\omega^2\eta.$$

Задача 1, вариант 3

Перепишем уравнения в виде

$$\ddot{\xi} = -\omega^2 \xi, \quad \ddot{\eta} = -\omega^2 \eta.$$

Задача 1, вариант 3

Перепишем уравнения в виде

$$\ddot{\xi} = -\omega^2 \xi, \quad \ddot{\eta} = -\omega^2 \eta.$$

Это уравнения второго порядка. Нужны начальные скорости. Они находятся из первоначальных уравнений:

$$\dot{\xi} = -\omega \eta, \quad \dot{\eta} = \omega \xi.$$

Т.е. $\dot{\xi}(0) = -\omega v_{0y}$, $\dot{\eta}(0) = \omega v_{0x}$.

Задача 1, вариант 3

Перепишем уравнения в виде

$$\ddot{\xi} = -\omega^2 \xi, \quad \ddot{\eta} = -\omega^2 \eta.$$

Это уравнения второго порядка. Нужны начальные скорости. Они находятся из первоначальных уравнений:

$$\dot{\xi} = -\omega \eta, \quad \dot{\eta} = \omega \xi.$$

Т.е. $\dot{\xi}(0) = -\omega v_{0y}$, $\dot{\eta}(0) = \omega v_{0x}$.

Общее решение первого уравнения

$$\xi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Решение: $\xi(t) = v_{0x}\cos(\omega t) - v_{0y}\sin(\omega t)$.

Задача 4.15. Имеется последовательность систем координат $Ox_k y_k z_k$ с общим началом, каждая из которых вращается относительно предыдущей с переменной по величине, но постоянной по направлению угловой скоростью ω_k, вокруг оси, проходящей через общее начало. Первая система координат неподвижна, а с последней связано твердое тело. Найти угловое ускорение тела.

Задача 4.15. Имеется последовательность систем координат $Ox_ky_kz_k$ с общим началом, каждая из которых вращается относительно предыдущей с переменной по величине, но постоянной по направлению угловой скоростью ω_k, вокруг оси, проходящей через общее начало. Первая система координат неподвижна, а с последней связано твердое тело. Найти угловое ускорение тела.

Формулы:

$$\varepsilon_{abs} = \varepsilon_{per} + \varepsilon_{otn} + [\omega_{per}, \omega_{otn}]$$

$$\omega_{abs} = \omega_{per} + \omega_{otn}$$

Задача 4.15

Формулы:

$$\varepsilon_{abs} = \varepsilon_{per} + \varepsilon_{otn} + [\omega_{per}, \omega_{otn}]$$

$$\omega_{abs} = \omega_{per} + \omega_{otn}$$

Пусть $n = 1$:

$$\varepsilon_{abs} = |\dot{\omega_1}| \frac{\omega_1}{|\omega_1|}$$

$n = 2$

$$\varepsilon_{abs} = |\dot{\omega_1}| \frac{\omega_1}{|\omega_1|} + |\dot{\omega_2}| \frac{\omega_2}{|\omega_2|} + [\omega_1, \omega_2]$$

Спасибо