Тензор инерции, динамика твердого тела

Иван Юрьевич Полехин

20 ноября 2020 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Тензор инерции

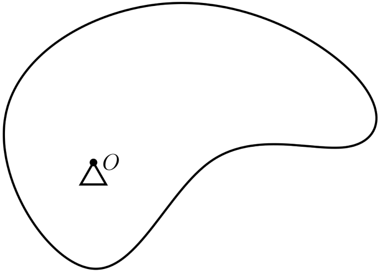
Твердым телом будем называть набор массивных точек такой, что расстояния между любыми двумя точками в процессе движения сохраняются (связь). Будем считать, что хотя бы три точки не лежат на одной прямой.

Тензор инерции

Твердым телом будем называть набор массивных точек такой, что расстояния между любыми двумя точками в процессе движения сохраняются (связь). Будем считать, что хотя бы три точки не лежат на одной прямой.

Сначала будем рассматривать твердое тело с неподвижной точкой.

Тензор инерции



Тензор инерции

Момент инерции относительно неподвижной точки O:

$$K_O = \sum m_i [r_i, \dot{r}_i]$$

r_i — радиус-вектор i-ой точки.

Тензор инерции

Момент инерции относительно неподвижной точки O:

$$K_O = \sum m_i [r_i, \dot{r}_i]$$

r_i — радиус-вектор i-ой точки.

Используя формулу Эйлера, запишем $\dot{r}_i = [\omega, r_i]$.

Тензор инерции

Момент инерции относительно неподвижной точки O:

$$K_O = \sum m_i [r_i, \dot{r}_i]$$

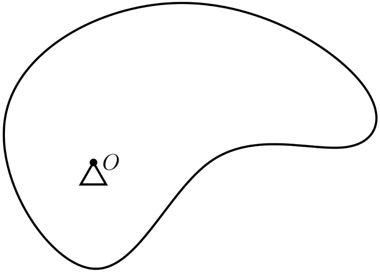
r_i — радиус-вектор i-ой точки.

Используя формулу Эйлера, запишем $\dot{r}_i = [\omega, r_i]$.

Выражение для K_O перепишется в следующем виде:

$$K_O = \sum m_i [r_i, \dot{r}_i] = \sum m_i [r_i, [\omega, r_i]].$$

Тензор инерции



Тензор инерции

Выражение для K_O перепишется в следующем виде:

$$K_O = \sum m_i[r_i, \dot{r}_i] = \sum m_i[r_i, [\omega, r_i]].$$

Тензор инерции

Выражение для K_O перепишется в следующем виде:

$$K_O = \sum m_i[r_i, \dot{r}_i] = \sum m_i[r_i, [\omega, r_i]].$$

Используя формулу $[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$, перепишем последнее слагаемое в виде

$$K_O = \sum m_i(\omega r_i^2 - r_i(\omega, r_i)).$$

Тензор инерции

Выражение для K_O перепишется в следующем виде:

$$K_O = \sum m_i[r_i, \dot{r}_i] = \sum m_i[r_i, [\omega, r_i]].$$

Используя формулу $[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$, перепишем последнее слагаемое в виде

$$K_O = \sum m_i(\omega r_i^2 - r_i(\omega, r_i)).$$

Правая часть — линейная функция вектора ω. Такую функцию всегда можно задать матрицей (считаем, что задана некоторая система координат).

Тензор инерции

$$K_O = \sum m_i(\omega r_i^2 - r_i(\omega, r_i)) = J_O\omega.$$

Тензор инерции

$$K_O = \sum m_i(\omega r_i^2 - r_i(\omega, r_i)) = J_O\omega.$$

Аналогичные вычисления можно проделать для вычисления кинетической энергии нашего твердого тела:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{r}_i, \dot{r}_i) = \frac{1}{2}\sum m_i(\omega^2 r_i^2 - (\omega, r_i)^2) = \frac{1}{2}(J_O\omega, \omega).$$

Тензор инерции

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{r}_i, \dot{r}_i) = \frac{1}{2}\sum m_i(\omega^2 r_i^2 - (\omega, r_i)^2) = \frac{1}{2}(J_O\omega, \omega).$$

Пока что не будем выписывать выражения для компонент матрицы J_O. Вместо этого вспомним, что положительно определенную симметричную квадратичную форму можно привести к диагональному виду (даже к единичной матрице, но для этого надо масштабировать оси, чего мы делать не хотим).

Тензор инерции

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{r}_i, \dot{r}_i) = \frac{1}{2}\sum m_i(\omega^2 r_i^2 - (\omega, r_i)^2) = \frac{1}{2}(J_O\omega, \omega).$$

Пока что не будем выписывать выражения для компонент матрицы J_O. Вместо этого вспомним, что положительно определенную симметричную квадратичную форму можно привести к диагональному виду (даже к единичной матрице, но для этого надо масштабировать оси, чего мы делать не хотим).

Такие оси называются главными осями инерции, т.е. это оси в которых тензор инерции диагонален.

Тензор инерции

Главные оси инерции удобны также тем, что (как и любые оси жестко связанные с телом) в них матрица J_O будет постоянной. Если, напротив, оси зафиксировать в пространстве, то при движении тела компоненты этой матрицы будут изменяться.

Главные оси инерции удобны также тем, что (как и любые оси жестко связанные с телом) в них матрица J_O будет постоянной. Если, напротив, оси зафиксировать в пространстве, то при движении тела компоненты этой матрицы будут изменяться.

$$J_O = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}$$

Тензор инерции

Главные оси инерции удобны также тем, что (как и любые оси жестко связанные с телом) в них матрица J_O будет постоянной. Если, напротив, оси зафиксировать в пространстве, то при движении тела компоненты этой матрицы будут изменяться.

$$J_O = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}$$

J_ξ — момент инерции относительно оси ξ, $J_\xi = \sum m_i(\eta_i^2 + \zeta_i^2)$. $J_{\xi\eta} = \sum m_i \xi_i \eta_i$.

Тензор инерции

В главных осях

$$J_O = \begin{pmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{pmatrix}$$

Тензор инерции

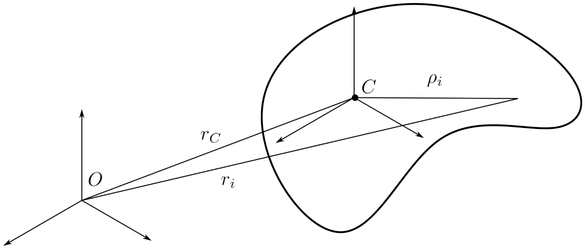
Если у твердого тела есть плоскость симметрии, то одна из главных осей лежит в ней.

Если у тела есть ось симметрии, то вдоль нее направлена одна из главных осей.

Если тело плоское и ось e_ζ перпендикулярна плоскости тела, то $J_\zeta = J_\xi + J_\eta$.

Тензор инерции

Рассмотрим теперь свободное движение твердого тела. Используя оси Кенига, можем записать $r_i = r_C + \rho_i$. Притом $\sum m_i \rho_i = 0$.



Тензор инерции

Рассморим теперь свободное движение твердого тела. Используя оси Кенига, можем записать $r_i = r_C + \rho_i$. Притом $\sum m_i \rho_i = 0$.

Можно ввести следующие величины:

$$K' = \sum m_i [\rho_i, \dot{\rho}_i], \quad T' = \sum m_i \dot{\rho}_i^2 / 2.$$

Тензор инерции

Рассморим теперь свободное движение твердого тела. Используя оси Кенига, можем записать $r_i = r_C + \rho_i$. Притом $\sum m_i \rho_i = 0$.

Можно ввести следующие величины:

$$K' = \sum m_i [\rho_i, \dot{\rho}_i], \quad T' = \sum m_i \dot{\rho}_i^2 / 2.$$

Тогда (теорема Кенига)

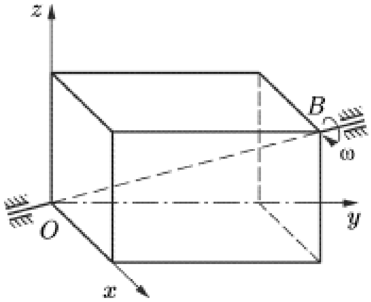
$$K_O = K' + [r_C, \dot{r}_C], \quad T = T' + m\dot{r}_C^2 / 2.$$

Тензор инерции

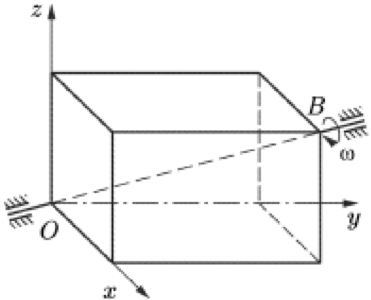
Тензор (оператор, матрица) инерции позволяет вычислять кинетический момент и кинетическую энергию через вектор угловой скорости.

Задача 11.18

Задача. Однородный параллелепипед массы m с ребрами a, b, c вращается с угловой скоростью ω относительно диагонали OB. Найти момент импульса относительно произвольной точки пространства.

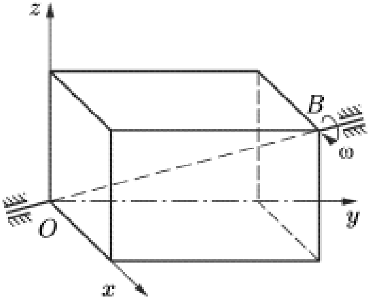


Задача 11.18



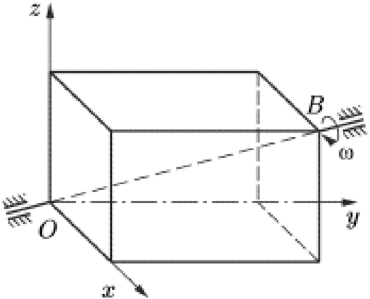
Найдем момент инерции относительно центра масс. Оси параллельные Ox, Oy и Oz — главные оси инерции.

Задача 11.18



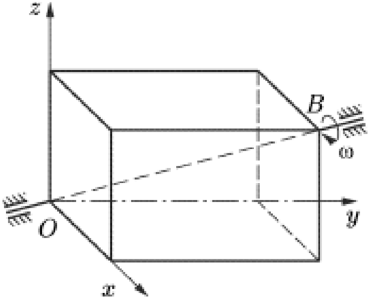
Найдем момент инерции относительно центра масс. Оси параллельные Ox, Oy и Oz — главные оси инерции.

Задача 11.18



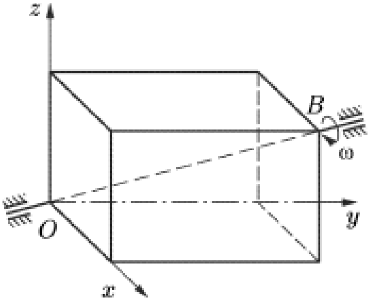
Нам нужно: а) компоненты угловой скорости в главных осях б) моменты инерции относительно главных осей.

Задача 11.18



$\omega = |\omega|(a/\sqrt{\ldots}, b/\sqrt{\ldots}, c/\sqrt{\ldots}),\ \sqrt{\ldots} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

Задача 11.18



Пусть ρ — плотность, тогда $\int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\rho dxdydz = m$.

Задача 11.18

Момент инерции относительно оси x:

$$\rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) dxdydz = \rho a \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} (y^2 + z^2) dydz$$

$$\rho a \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} (y^2) dydz = \rho a c \frac{b^3}{12} = m \frac{b^2}{12}$$

$$J_x = m(\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{12}).$$

Задача 11.18

$$\omega = |\omega|(a/\sqrt{...}, b/\sqrt{...}, c/\sqrt{...}), \quad \sqrt{...} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$J_x = m(\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{12}).$$

$$K_x = ma|\omega|(\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{12})/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Остальные аналогично.

Задача 11.18

Поскольку центр масс неподвижен, то по теореме Кенига

$$K_O = K' + [r_C, \dot{r}_C], \quad T = T' + m\dot{r}_C^2/2$$

получаем, что относительно произвольной точки будет такой же вектор момента.

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой

Как записываются уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой?

В качестве координат выбирают компоненты угловой скорости в проекции на подвижные оси (главные оси инерции): p, q, r.

Уравнение движения:

$$\dot{K}_O = M_O.$$

По определению тензора инерции (который в главных осях диагонален и имеет компоненты A, B, C):

$$K_O = J_O\omega = Ape_\xi + Bqe_\eta + Cre_\zeta.$$

Надо посчитать $\dot{K}_O$.

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой

$$\dot{K}_O = ?$$

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой

$$\dot{K}_O = ?$$

$$\dot{K}_O = A\dot{p}e_\xi + B\dot{q}e_\eta + C\dot{r}e_\zeta + ...$$

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой

$$\dot{K}_O = ?$$

$$\dot{K}_O = A\dot{p}e_\xi + B\dot{q}e_\eta + C\dot{r}e_\zeta + ...$$

$$\dot{K}_O = A\dot{p}e_\xi + B\dot{q}e_\eta + C\dot{r}e_\zeta + [\omega, K_O]$$

$$\dot{K}_O = A\dot{p}e_\xi + B\dot{q}e_\eta + C\dot{r}e_\zeta + [\omega, J_O\omega]$$

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi$$
$$B\dot{q} + (A - C)pr = M_\eta$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_\zeta$$

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi$$
$$B\dot{q} + (A - C)pr = M_\eta$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_\zeta$$

Чтобы получить движение системы в абсолютном пространстве надо а) найти $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, а потом проинтегрировать еще одну систему, связывающую p, q, r, например, с углами Эйлера:

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$$
$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$$
$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

Спасибо