Динамика твердого тела

Иван Юрьевич Полехин

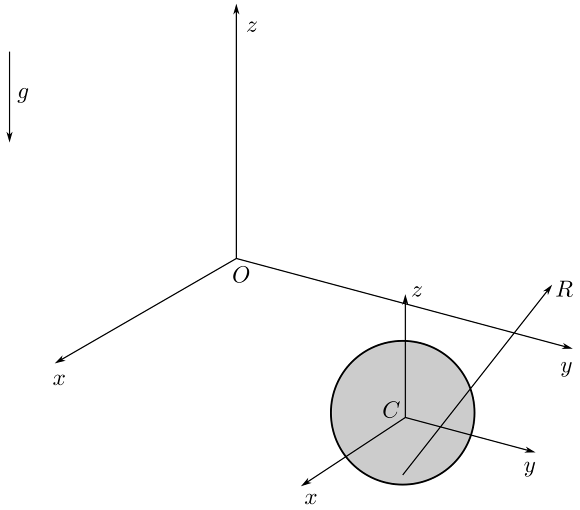
27 ноября 2020 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Однородный шар на вращающейся плоскости

Задача. Горизонтальная плоскость вращатся с постоянной угловой скоростью ω. По ней без проскальзывания катится однородный шар радиуса a. Найти траекторию движения центра масс шара.

Однородный шар на вращающейся плоскости



Однородный шар на вращающейся плоскости

Будем использовать следующие уравнения

1. Условие непроскальзывания
2. Уравнение движения центра масс
3. Изменение кинетического момента в осях Кенига

Однородный шар на вращающейся плоскости

Условие непроскальзывания: скорость шара в точке контакта совпадает со скосростью плсокости (которая вращается).

Скорость плоскости:

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = y\omega e_x - x\omega e_y$$

Однородный шар на вращающейся плоскости

Условие непроскальзывания: скорость шара в точке контакта совпадает со скосростью плсокости (которая вращается).

Скорость точки контакта шара:

$$\dot{x}e_e + \dot{y}e_y + \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ p & q & r \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = \dot{x}e_e + \dot{y}e_y - aqe_x + ape_y$$

Первое уравнение:

$$y\omega e_x - x\omega e_y = \dot{x}e_e + \dot{y}e_y - aqe_x + ape_y$$

Однородный шар на вращающейся плоскости

Движение центра масс:

$$m\ddot{x}e_x + m\ddot{y}e_y = R_x e_x + R_y e_y.$$

Однородный шар на вращающейся плоскости

Изменение кинетического момента в осях Кенига:

$$\frac{d}{dt}(Ape_x + Aqe_y + Are_z) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & -a \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

Однородный шар на вращающейся плоскости

Изменение кинетического момента в осях Кенига:

$$A\dot{p}e_x + A\dot{q}e_y + A\dot{r}e_z = aR_ye_x - aR_xe_y$$

Однородный шар на вращающейся плоскости

Все три уравнения:

$$y\omega e_x - x\omega e_y = \dot{x}e_e + \dot{y}e_y - aqe_x + ape_y$$

$$m\ddot{x}e_x + m\ddot{y}e_y = R_xe_x + R_ye_y.$$

$$A\dot{p}e_x + A\dot{q}e_y + A\dot{r}e_z = aR_ye_x - aR_xe_y$$

$$A = 2/5ma^2$$

Однородный шар на вращающейся плоскости

Продифференцируем первое уравнение

$$\dot{y}\omega e_x - \dot{x}\omega e_y = \ddot{x}e_e + \ddot{y}e_y - a\dot{q}e_x + a\dot{p}e_y$$

$$m\ddot{x}e_x + m\ddot{y}e_y = R_x e_x + R_y e_y.$$

$$A\dot{p}e_x + A\dot{q}e_y + A\dot{r}e_z = aR_y e_x - aR_x e_y$$

$$A = 2/5ma^2$$

Однородный шар на вращающейся плоскости

Из 2 и 3 выразим $\dot{p}$ и $\dot{q}$ через $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$

$$\dot{y}\omega e_x - \dot{x}\omega e_y = \ddot{x}e_e + \ddot{y}e_y - a\dot{q}e_x + a\dot{p}e_y$$

$$m\ddot{x}e_x + m\ddot{y}e_y = R_x e_x + R_y e_y.$$

$$A\dot{p}e_x + A\dot{q}e_y + A\dot{r}e_z = aR_y e_x - aR_x e_y$$

$$A = 2/5ma^2$$

$$m\ddot{x} = -A/a\dot{q}, \quad m\ddot{y} = A/a\dot{p}$$

Однородный шар на вращающейся плоскости

Из оставшихся уравнений получим замкнутые уравнения для x и y

$$\dot{y}\omega e_x - \dot{x}\omega e_y = \ddot{x}e_e + \ddot{y}e_y - a\dot{q}e_x + a\dot{p}e_y$$

$$A = 2/5ma^2$$

$$m\ddot{x} = -A/a\dot{q}, \quad m\ddot{y} = A/a\dot{p}$$

Однородный шар на вращающейся плоскости

Из оставшихся уравнений получим замкнутые уравнения для x и y

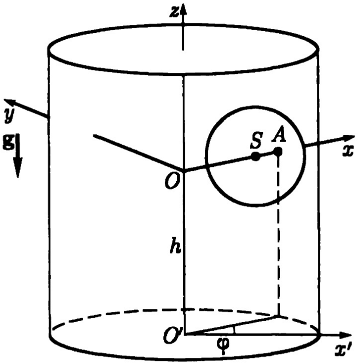
$$\ddot{x}\frac{7}{2} = \dot{y}\omega, \quad \dot{x}\omega = -\ddot{y}\frac{7}{2}$$

Траектория — окружность. Радиус зависит от начальной скорости.

Однородный шар в цилиндре (см. С.В. Болотин, А.В. Карапетян... п. 6.2.5)

Задача. Однородный шар радиуса a массы m катится без просткальзывания по внутренной стороне вертикального цилиндра радиуса R. Найти закон изменения высоты центра масс шара.

Однородный шар в цилиндре (см. С.В. Болотин, А.В. Карапетян... п. 6.2.5)



Однородный шар в цилиндре (см. С.В. Болотин, А.В. Карапетян... п. 6.2.5)

Будем использовать те же уравнения, что и в предыдущей задаче.

Однородный шар в цилиндре (см. С.В. Болотин, А.В. Карапетян... п. 6.2.5)

Условие непроскальзывания:

$$v_S + [\omega, SA] = 0, \quad v_S = (0, (R-a)\dot{\varphi}, \dot{h}), \quad [\omega, SA] = (0, ar, -aq)$$

Однородный шар в цилиндре (см. С.В. Болотин, А.В. Карапетян... п. 6.2.5)

Уравнение движения центра масс (в проекции на подвижные оси):

$$a_S = (-(R-a)\dot{\varphi}^2, (R-a)\ddot{\varphi}, \ddot{h}), \quad ma_S = R$$

Однородный шар в цилиндре (см. С.В. Болотин, А.В. Карапетян... п. 6.2.5)

Изменение кинетического момента в осях Кенига

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = J\frac{d}{dt}\omega = J\frac{d}{dt}(p_e x + qe_y re_z)$$

$$\frac{d}{dt}(p_e x + qe_y re_z) = (\dot{p} - q\dot{\varphi})e_x + (\dot{q} + p\dot{\varphi})e_y + \dot{r}e_z$$

$$M_S = [SA, R] = -aR_x e_y + aR_y e_z$$

Однородный шар в цилиндре (см. С.В. Болотин, А.В. Карапетян... п. 6.2.5)

Получаем замкнутую систему:

$$(R-a)\dot{\varphi} + ar = 0, \quad \dot{h} - aq = 0$$

$$-m(R-a)\dot{\varphi}^2 = R_x, \quad m(R-a)\ddot{\varphi} = R_y, \quad m\ddot{h} = -mg + R_z$$

$$J(\dot{p} - q\dot{\varphi}) = 0, \quad J(\dot{q} + p\dot{\varphi}) = -aR_z, \quad J\dot{r} = aR_y$$

Однородный шар в цилиндре (см. С.В. Болотин, А.В. Карапетян... п. 6.2.5)

Исключаем силы реакции:

$$(R-a)\dot{\varphi} + ar = 0, \quad ma(R-a)\ddot{\varphi} = J\dot{r}$$

$$\dot{h} - aq = 0, \quad \dot{p} - q\dot{\varphi} = 0, \quad ma\ddot{h} + J(\dot{q} + p\dot{\varphi}) = -mga$$

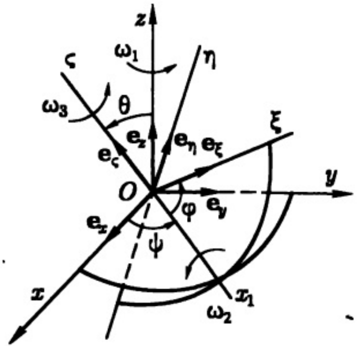
Из первых двух уравнений $r = const$, $\dot{\varphi} = const$.

Потом уравнение на q:

$$(ma^2 + J)\ddot{q} + J\dot{\varphi}_0^2 q = 0$$

h изменяется периодически.

Задача. Симметричное твердое тело ($A = B \neq C$) с неподвижной точкой O движется по инерции. В начальный момент проекции угловой скорости тела на его главные оси равны p_0, q_0, r_0. Найти угол нутации θ и угловые скорости прецессии $\dot{\psi}$ и собственного вращения $\dot{\varphi}$.


z
ω1
η
ς
ω3
θ
ξ
ez
eη
eξ
eς
y
O
φ
ey
ex
ψ
x
x1
ω2

Задача 11.108

Если нет внешних сил, то можем выбирать неподвижный репер произвольным образом. Стандартный выбор в этой задаче: ось Oz сонаправлена вектору кинетического моментв (который сохраняется, так как нет внешних сил).

Задача 11.108

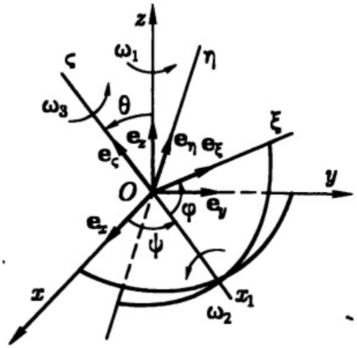
Уравнения движения

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi = 0$$
$$B\dot{q} + (A - C)pr = M_\eta = 0$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = M_\zeta = 0$$

Кинематические формулы Эйлера

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi$$
$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi$$
$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

Задача 11.108



Задача 11.108

$$K_\xi = |K| \sin\theta \sin\varphi = Ap, \quad K_\eta = |K| \sin\theta \cos\varphi = Aq, K_\zeta = |K| \cos\theta = Cr$$

$$|K| = \sqrt{A^2p^2 + A^2q^2 + C^2r^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}{Cr_0}$$

Задача 11.108

$$Ap = A\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi = |K|\sin\theta_0\sin\varphi$$
$$Aq = A\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi = |K|\sin\theta_0\cos\varphi$$

$$\dot{\psi} = |K|/A, \quad \dot{\varphi} = (1 - C/A)r_0$$

Спасибо