Уравнения Лагранжа

Иван Юрьевич Полехин

3 декабря 2020 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Голономные связи

Пусть механическая система состоит из N материальных точек с радиус-векторами $r_1, \ldots r_N$.

Голономные связи

Пусть механическая система состоит из N материальных точек с радиус-векторами $r_1, \ldots r_N$.

Пусть в процессе движения выполняются некоторые соотношения на положения этих точек: $f_1(r_1, \ldots, r_N) = 0$, $f_2(r_1, \ldots, r_N) = 0$ ... $f_m(r_1, \ldots, r_N) = 0$.

Голономные связи

Пусть механическая система состоит из N материальных точек с радиус-векторами $r_1, \ldots r_N$.

Пусть в процессе движения выполняются некоторые соотношения на положения этих точек: $f_1(r_1, \ldots, r_N) = 0$, $f_2(r_1, \ldots, r_N) = 0$ ... $f_m(r_1, \ldots, r_N) = 0$.

Для краткости обозначим через r вектор из $3N$ компонент $r_1, \ldots r_N$.

Голономные связи

Пусть механическая система состоит из N материальных точек с радиус-векторами $r_1, \ldots r_N$.

Пусть в процессе движения выполняются некоторые соотношения на положения этих точек: $f_1(r_1, \ldots, r_N) = 0$, $f_2(r_1, \ldots, r_N) = 0$ ... $f_m(r_1, \ldots, r_N) = 0$.

Для краткости обозначим через r вектор из $3N$ компонент $r_1, \ldots r_N$.

Уравнения $f_1(r) = 0$, $f_2(r) = 0$ ... $f_m(r) = 0$ задают в $3N$-мерном пространстве некоторое подмножество Σ.

Голономные связи

Пусть механическая система состоит из N материальных точек с радиус-векторами $r_1, \ldots r_N$.

Пусть в процессе движения выполняются некоторые соотношения на положения этих точек: $f_1(r_1, \ldots, r_N) = 0$, $f_2(r_1, \ldots, r_N) = 0$ ... $f_m(r_1, \ldots, r_N) = 0$.

Для краткости обозначим через r вектор из $3N$ компонент $r_1, \ldots r_N$.

Уравнения $f_1(r) = 0$, $f_2(r) = 0$ ... $f_m(r) = 0$ задают в $3N$-мерном пространстве некоторое подмножество Σ.

Будем считать, что на Σ все функции независимы, т.е. в каждой точке множества Σ градиенты $\mathrm{grad} f_i$ линейно независимы.

Голономные связи

Тогда по теореме о неявной функции Σ будет гладким многообразием размерности $3N - m$, т.е. в окрестности каждой точки Σ можно ввести $3N - m$ локальных координат, параметризующих Σ.

Голономные связи

Тогда по теореме о неявной функции Σ будет гладим многообразием размерности $3N - m$, т.е. в окрестности каждой точки Σ можно ввести $3N - m$ локальных координат, параметризующих Σ.

Пример. Плоский маятник единичной длины. Одна точка с координатами x и y на плоскости + уравнение связи $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Голономные связи

Тогда по теореме о неявной функции Σ будет гладим многообразием размерности $3N - m$, т.е. в окрестности каждой точки Σ можно ввести $3N - m$ локальных координат, параметризующих Σ.

Пример. Плоский маятник единичной длины. Одна точка с координатами x и y на плоскости + уравнение связи $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Это уравнение окружности. Можно на нем вводить различные локальные координаты. Например, можно взять в качетсве локальной координаты x: $y = \sqrt{1 - x^2}$ (для $x \in (-1, 1)$). Можно взять угол в качестве локальной координаты.

Голономные связи

Описанные выше связи называются голономными (и стационарными). Если уравнения связи $f_i(r,t) = 0$ зависят от времени, то связи будут голономными и нестационарными. Пример — маятник переменной длины: $x^2 + y^2 - 2 + \cos(t) = 0$.

Виртуальные и действительные (они же возможные) перемещения

Пусть $q_1, \dots, q_n$ — локальные координаты, задающие конфигурацию нашей системы, т.е.

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_n, t).$$

Тогда вектор

$$\delta r_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_n}\delta q_n$$

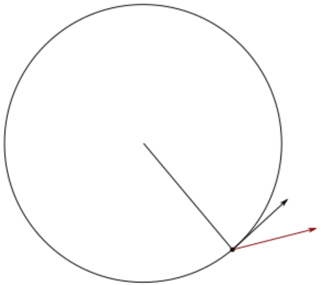
называется вектором виртуальных перемещений.

Вектор

$$\delta r_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial r_i}{\partial t}\delta t$$

называется вектором действительных перемещений.

Виртуальные и действительные (они же возможные) перемещения



Идеальные связи

Для того, чтобы во время движения точек системы не нарушалось условие связи, к силам действующим на систему, добавляются силы реакции.

Говорят, что связи идеальны, если на любом виртуальном перемещении их работа равна нулю:

$$\sum_{1}^{N}(R_i, \delta r_i) = 0.$$

Уравнения Лагранжа

Пусть связи, действующие на систему, идеальны, а заданные силы потенциальн, т.е.

$$F_i = \frac{\partial V}{\partial r_i}.$$

V — это «минус потенциальная энергия».

Тогда движение системы подчиняются уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad L = T + V.$$

Задача 12.6 (д)

Связи бывают не только голономные, но и неголономные, т.е. такие, которые накладывают ограничение на скорости системы:

$$\sum_{i}^{n} a_{li}(q,t)\dot{q}_i + b_l(q,t) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

Любую голономную связь можно представить в виде неголономной, но обратное неверно.

Задача. Представить связь в виде $f(x, y, z) = \mathrm{const}$:

$$(2x + y + z)\dot{x} + (2y + z + x)\dot{y} + (2z + x + y)\dot{z} = 0.$$

Задача. Представить связь в виде $f(x, y, z) = \text{const}$:

$$(2x + y + z)\dot{x} + (2y + z + x)\dot{y} + (2z + x + y)\dot{z} = 0.$$

Должны быть выполнены уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + z + x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + x + y$$

Задача 12.6 (д)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + z + x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + x + y$$

Получаем

$$f = x^2 + xy + zx + g(y, z)$$

Из второго уравнения

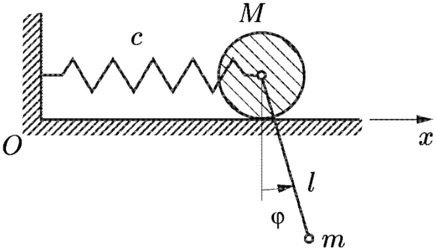
$$x + \frac{\partial g}{\partial y} = 2y + z + x, \quad g = y^2 + zy + h(z)$$

Из третьего

$$x + y + \frac{\partial h}{\partial z} = 2z + x + y, \quad h = z^2$$

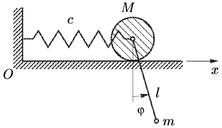
$$f = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz.$$

Задача. Точка подвеса математического маятника массы m и длины l есть центр однородного диска массы M, который может катиться без скольжения по горизонтальной прямой Ox; центр диска соединен с неподвижной стенкой пружиной жесткости c. Составить уравнения Лагранжа.



К задаче 12.45

Задача 12.45



К задаче 12.45

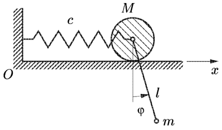
Координаты массивной точки:

$$x = q + l\sin\varphi, \quad y = -l\cos\varphi.$$

Кин. энергия: $T_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$.

$$\dot{x} = \dot{q} + l\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y} = l\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad T_1 = m/2 \cdot (\dot{q}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{q}\dot{\varphi}l\cos\varphi).$$

Задача 12.45



К задаче 12.45

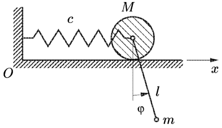
Найдем кин. энергию диска:

$$T_2 = \frac{M}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{MR^2}{2}\dot{\alpha}^2$$

Угол поворота диска связан с q: $\alpha R = q$, $\dot{\alpha} = \dot{q}/T$, поэтому

$$T_2 = \frac{3}{4}M\dot{q}^2.$$

Задача 12.45



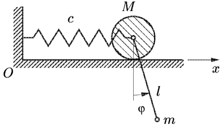
К задаче 12.45

Найдем кин. энергию диска:

$$T_1 = m/2 \cdot (\dot{q}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{q}\dot{\varphi}l\cos\varphi)$$

$$T_2 = \frac{3}{4}M\dot{q}^2.$$

Задача 12.45



К задаче 12.45

Найдем потенциал:

$$V = -\frac{c}{2}q^2 - mgy = -\frac{c}{2}q^2 + mgl\cos\varphi$$

Задача 12.45

$$L = T + V$$

$$T_1 = m/2 \cdot (\dot{q}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{q}\dot{\varphi}l\cos\varphi)$$

$$T_2 = \frac{3}{4}M\dot{q}^2.$$

$$V = -\frac{c}{2}q^2 - mgy = -\frac{c}{2}q^2 + mgl\cos\varphi$$

Задача 12.45

$$T_1 = m/2 \cdot (\dot{q}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{q}\dot{\varphi}l\cos\varphi), \quad T_2 = \frac{3}{4}M\dot{q}^2$$

$$V = -\frac{c}{2}q^2 - mgy = -\frac{c}{2}q^2 + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{3}{2}M\dot{q} + m\dot{q} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{3}{2}M\ddot{q} + m\ddot{q} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -cq, \quad \frac{3}{2}M\ddot{q} + m\ddot{q} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + cq = 0.$$

Задача 12.45

$$T_1 = m/2 \cdot (\dot{q}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{q}\dot{\varphi}l\cos\varphi), \quad T_2 = \frac{3}{4}M\dot{q}^2$$

$$V = -\frac{c}{2}q^2 - mgy = -\frac{c}{2}q^2 + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -cq, \quad \frac{3}{2}M\ddot{q} + m\ddot{q} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi + cq = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi} + \ddot{q}ml\cos\varphi - m\dot{q}\dot{\varphi}l\sin\varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m\dot{q}\dot{\varphi}l\sin\varphi - mgl\sin\varphi$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{q}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$$

Спасибо