Равновесие. Устойчивость

Иван Юрьевич Полехин

3 февраля 2021 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Равновесие

Пусть система состоит из конечного числа материальных точек с радиус-векторами r_i. В процессе движения $r_i = r_i(t)$. Будем говорить, что система находится в равновесии, если $\dot{r}_i(0) = 0$ и $r_i(t) = r_i(0)$ для $t > 0$ и всех i.

Равновесие

Пусть система состоит из конечного числа материальных точек с радиус-векторами r_i. В процессе движения $r_i = r_i(t)$. Будем говорить, что система находится в равновесии, если $\dot{r}_i(0) = 0$ и $r_i(t) = r_i(0)$ для $t > 0$ и всех i.

Пусть теперь q — набор обобщенных координат и связи, наложенные на систему, идеальны. Можно выразить $r_i(q)$. Тогда некоторое положение системы, соответсвующее значениям $q_i(0)$ обобщенных координат, будет положением равновесия, если $q_i(0)$ — решение уравнений Лагранжа.

Равновесие

Если кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k,$$

то уравнения записываются в следующей форме

$$\sum a_{ik}\ddot{q}_k + \sum\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{lk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k\dot{q}_l = Q_i(t, q, \dot{q})$$

Равновесие

Если кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k,$$

то уравнения записываются в следующей форме

$$\sum a_{ik} \ddot{q}_k + \sum \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_i(t, q, \dot{q})$$

Положение q_0 является равновесием тогда и только тогда, когда при всех $t \geqslant 0$

$$Q_i(t, q_0, 0) = 0$$

Равновесие

Пусть все силы, действующие на систему, потенциальны. Тогда положение q_0 является равновесием тогда и только тогда, когда при всех $t \geqslant 0$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}(t, q_0) = 0$$

Равновесие

Пусть все силы, действующие на систему, потенциальны. Тогда положение q_0 является равновесием тогда и только тогда, когда при всех $t \geqslant 0$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}(t, q_0) = 0$$

Принцип виртуальных перемещений: система находится в положении равновесия, если работа заданных сил на любом вирутальном перемещении равна нулю:

$$\sum (F_i, \delta r_i) = 0$$

Пример: двойной маятник

Положим $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = g = 1$

$$x_1 = \sin\alpha_1, \quad y_1 = -\cos\alpha_1$$

Пример: двойной маятник

Положим $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = g = 1$

$$x_1 = \sin\alpha_1, \quad y_1 = -\cos\alpha_1$$

$$x_2 = \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2, \quad y_2 = -\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2$$

Пример: двойной маятник

Положим $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = g = 1$

$$x_1 = \sin\alpha_1, \quad y_1 = -\cos\alpha_1$$

$$x_2 = \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2, \quad y_2 = -\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\alpha}_1 \cos\alpha_1, \quad \dot{y}_1 = \dot{\alpha}_1 \sin\alpha_1$$

Пример: двойной маятник

Положим $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = g = 1$

$$x_1 = \sin\alpha_1, \quad y_1 = -\cos\alpha_1$$

$$x_2 = \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2, \quad y_2 = -\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\alpha}_1 \cos\alpha_1, \quad \dot{y}_1 = \dot{\alpha}_1 \sin\alpha_1$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\alpha}_1 \cos\alpha_1 + \dot{\alpha}_2 \cos\alpha_2, \quad \dot{y}_1 = \dot{\alpha}_1 \sin\alpha_1 + \dot{\alpha}_2 \sin\alpha_2$$

Пример: двойной маятник

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2}\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 + 2\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2))$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1} = 2\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2} = \dot{\alpha}_2 + \dot{\alpha}_1\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = -\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\sin(\alpha_1 - \alpha_2), \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = \dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Пример: двойной маятник

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_1} = 2\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \dot{\alpha}_2(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}_2} = \ddot{\alpha}_2 + \ddot{\alpha}_1\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \dot{\alpha}_1(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)\sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Пример: двойной маятник

$$2\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \dot{\alpha}_2^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = Q_1$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = Q_2$$

$$\delta r_1 = (\cos\alpha_1 \delta\alpha_1, \sin\alpha_1 \delta\alpha_1)$$

$$\delta r_2 = (\cos\alpha_1 \delta\alpha_1 + \cos\alpha_2 \delta\alpha_2, \sin\alpha_1 \delta\alpha_1 + \sin\alpha_2 \delta\alpha_2)$$

$$(\delta r_1, F_1) + (\delta r_2, F_2) = -m_1 g \sin\alpha_1 - m_2 g \sin\alpha_1, \quad = -m_2 g \sin\alpha_2$$

Устойчивость

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Пусть $x = 0$ его положение равновесия, т.е. $v(0) = 0$. Будем гоовроить, что это положение устойчиво по Ляпунову, если для любой ε-окрестности нуля существует такая δ-окрестность нуля, что любое решение, начинающееся в δ-окрестности останется в ε-окрестности при всех $t \geqslant 0$.

Устойчивость

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Пусть $x = 0$ его положение равновесия, т.е. $v(0) = 0$. Будем гооврить, что это положение устойчиво по Ляпунову, если для любой ε-окрестности нуля существует такая δ-окрестность нуля, что любое решение, начинающееся в δ-окрестности останется в ε-окрестности при всех $t \geqslant 0$.

Пример: гармонический осциллятор $\ddot{x} = -x$ (его легко переписать в виде $\dot{x} = v(x)$).
Пример неустойчивости: $\dot{x} = x$.

Устойчивость

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Пусть $x = 0$ его устойчивое положение равновесия. Оно называется асимптотически устойчивым, если существует такая Δ-окрестность нуля, что все решения, начинающиеся в ней, асимптотически стремятся к нулю, т.е. $x(t; x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$ и $x_0 \in O_\Delta(0)$.

Пример: $\dot{x} = -x$.

Устойчивость

Рассмотрим систему с лагранжианом $L = T - \Pi$, где

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$\Pi = \Pi(q)$$

Теорема (Лагранж-Дирихле). Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Пример: вращающееся кольцо + массивная точка на нем.

$$z = -\cos\varphi, \quad x = \sin\varphi\cos\Omega t, \quad y = \sin\varphi\sin\Omega t$$

$$\dot z = \dot\varphi\sin\varphi$$

$$\dot x = \dot\varphi\cos\varphi\cos\Omega t - \Omega\sin\varphi\sin\Omega t$$

$$\dot y = \dot\varphi\cos\varphi\sin\Omega t + \Omega\sin\varphi\cos\Omega t$$

$$L = \dot\varphi^2 + \Omega^2\sin^2\varphi + \cos\varphi$$

Устойчивость

Пример: вращающееся кольцо + массивная точка на нем.

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2 \varphi + \cos \varphi$$

$$\Pi = -(\frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2 \varphi + \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \sin \varphi(-\Omega^2 \cos \varphi + 1) = 0$$

Если $\Omega^2 > 1$, то есть два дополнительных положения равновесия.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \Omega^2 \sin^2 \varphi > 0$$

Спасибо