Малые колебания

Иван Юрьевич Полехин

4 февраля 2021 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Линеаризация уравнений Лагранжа

Пусть дана автономная система с лагранжианом $L(q, \dot{q}) = T - U$:

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

— положительно определенная квадратичная форма по скоростям (кин. энергия).

$$U = U(q)$$

— потенциальная энергия. Пусть $q = 0$ — положение равновесия этой системы. Всегда можно считать, что $U(0) = 0$; так как 0 — положение равновесия, то

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 0$$

Разложение U в ряд Тейлора в окрестности точки $q = 0$ начинается с квадратичных по q слагаемых.

Линеаризация уравнений Лагранжа

Если дано ОДУ вида

$$\dot{x} = v(x)$$

и $v(0) = 0$, то линеаризованная система имеет вид

$$\dot{\xi} = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} \xi$$

здесь

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

— матрица $n \times n$.

Линеаризация уравнений Лагранжа

Чтобы записать линеаризованное уравнение Лагранжа с лагранжианом $L = T - U$ надо

1. Вместо кин. энергии $T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ рассмотреть квадратичную форму $T_2 = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(0)\dot{q}_i\dot{q}_j$
2. Вместо потенциальной энергии U рассмотреть квадратичные члены ее разложения в ряд Тейлора в нуле:
$$U_2 = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j$$
3. Составить уравнения Лагранжа для системы с лагранжианом $L_2 = T_2 - U_2$

Линеаризация уравнений Лагранжа

Можно записать

$$T_2 = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}), \quad U_2 = \frac{1}{2}(Bq, q)$$

T_2 — положительно определенная форма. Существует линейная замена переменных $Q = Cq$ такая, что в новых координатах пара квадратичных форм принимает особенно простой вид:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum \dot{Q}_i^2, \quad U_2 = \frac{1}{2}\sum \lambda_i Q_i^2$$

Собственные числа λ_i удовлетворяют уравнению

$$\det(B - \lambda A) = 0$$

Малые колебания

Q — нормальные координаты. В них система распадается на независимые уравнения:

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i.$$

Малые колебания есть прямое произведение n одномерных систем. Каждая из этих систем движется по одну из следующих законов:

1. $\lambda = \omega^2 > 0$: решение $Q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$
2. $\lambda = 0$: решение $Q = C_1 + C_2 t$
3. $\lambda = -k^2$: решение $Q = C_1 ch(kt) + C_2 sh(kt)$

Малые колебания

Пусть одно из собственных чисел положительно $\lambda = \omega^2 > 0$. Тогда система может совершать периодические колебания вида

$$q(t) = (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)\xi$$

Здесь ξ — собственный вектор: $(B - \lambda A)\xi = 0$.

Примеры

Рассмотрим систему из двух маятников, соединенных пружиной.

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

$$U = \frac{k}{2}((\sin q_1 - \sin q_2)^2 + (\cos q_1 - \cos q_2)^2) + \cos q_1 + \cos q_2$$

Можно проверить, что $q_1 = q_2 = 0$ — положение равновесия.

Примеры

Рассмотрим систему из двух маятников, соединенных пружиной.

Линеаризуем нашу систему. Кинетическая энергия не изменится.

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

Потенциальную разложим в ряд:

$$U = \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2.$$

Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2.$$

Примеры

Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{k}{2}(q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix}$$

$$B - \lambda A = \begin{pmatrix} 1+k-\lambda & -k \\ -k & 1+k-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda A) = (1-\lambda)(1+2k-\lambda) = 0$$

Примеры

$$B - \lambda A = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

Собственный вектор $\xi_1 = (1, 1)$

$$B - \lambda A = \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix}$$

Собственный вектор $\xi_1 = (1, -1)$

После нормировки получаем следующие вектора:

$$q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} Q$$

Примеры

После нормировки получаем следующие вектора:

$$q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} Q$$

$$q_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}$$

$$Q_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \sqrt{1 + 2k}$$

Примеры

После нормировки получаем следующие вектора:

$$q_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}$$

$$Q_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \sqrt{1 + 2k}$$

Пусть в начальный момент $q_1 = 0 = q_2$, $\dot{q}_2 = 0$, $\dot{q}_1 = v$. Тогда $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$ и $Q_1 = c_1 \sin t$, $Q_2 = c_2 \sin \omega t$. Можно найти $c_1 = v/\sqrt{2}$, $c_2 = v/(\omega\sqrt{2})$

Решение:

$$q_1 = \frac{v}{2}(\sin t + \frac{1}{\omega}\sin \omega t), \quad q_2 = \frac{v}{2}(\sin t - \frac{1}{\omega}\sin \omega t)$$

Примеры

Решение:

$$q_1 = \frac{v}{2}(\sin t + \frac{1}{\omega}\sin \omega t), \quad q_2 = \frac{v}{2}(\sin t - \frac{1}{\omega}\sin \omega t)$$

$$q_1 \approx \frac{v}{2}(\sin t + \sin \omega t), \quad q_2 \approx \frac{v}{2}(\sin t - \sin \omega t)$$

$$q_1 \approx v\cos(\frac{\omega - 1}{2}t)\sin(\frac{\omega + 1}{2}t), \quad q_2 \approx -v\sin(\frac{\omega - 1}{2}t)\cos(\frac{\omega + 1}{2}t)$$

Примеры

Рассмотрим маятник, точка подвеса которого может двигаться вдоль горизонтальной прямой.

Выпишем кинетическую энергию:

$$x_1 = x, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = x + \sin\varphi, \quad y_2 = -\cos\varphi$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}, \quad \dot{y}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = \dot{x} + \dot{\varphi}\cos\varphi, \quad y_2 = \dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$L = \dot{x}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + \cos\varphi$$

$$B - \lambda A = \begin{pmatrix} -2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0, 2$$

Спасибо