Прямой метод Ляпунова

Иван Юрьевич Полехин

10 февраля 2021 г.

МФТИ, `http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/`

Устойчивость

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Пусть $x = 0$ его положение равновесия, т.е. $v(0) = 0$. Будем гоояврить, что это положение устойчиво по Ляпунову, если для любой ε-окрестности нуля существует такая δ-окрестность нуля, что любое решение, начинающееся в δ-окрестности останется в ε-окрестности при всех $t \geqslant 0$.

Устойчивость

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Пусть $x = 0$ его положение равновесия, т.е. $v(0) = 0$. Будем гоорить, что это положение устойчиво по Ляпунову, если для любой ε-окрестности нуля существует такая δ-окрестность нуля, что любое решение, начинающееся в δ-окрестности останется в ε-окрестности при всех $t \geqslant 0$.

Пример: гармонический осциллятор $\ddot{x} = -x$ (его легко переписать в виде $\dot{x} = v(x)$).
Пример неустойчивости: $\dot{x} = x$.

Устойчивость

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Пусть $x = 0$ его устойчивое положение равновесия. Оно называется асимптотически устойчивым, если существует такая Δ-окрестность нуля, что все решения, начинающиеся в ней, асимптотически стремятся к нулю, т.е. $x(t; x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$ и $x_0 \in O_\Delta(0)$.

Пример: $\dot{x} = -x$.

Производная функции по направлению

Пусть дана функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и некоторое векторное поле v на $\mathbb{R}^n$ (которое в каждой точке $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ есть n компонент $v_i(x_1, ..., x_n)$).

Производной функции f по направлению v в точке x называется величина

$$\partial_v f = (\mathrm{grad} f, v) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Если $\partial_v f = 0$, то локально в направлении v в точке x функция f не изменяется. Если $\partial_v f < 0$, то функция локально убывает в направлении v.

Функции Ляпунова

Пусть $x = 0$ — положение равновесия системы $\dot{x} = f(x)$.

Рассмотрим некоторую функцию V, определенную в окрестности точки $(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0)$ и удовлетворяющую условию

$$V(0) = 0.$$

Будем предполагать, что V положительно определенная, т.е. в некоторой проколотой окрестности нуля выполнено $V(x) > 0$.

Если в окрестности нуля выполнено условие $\dot{V}(x) = \partial_f V \leqslant 0$, то точка $x = 0$ — устойчивое положение равновесия.

Задача: доказать.

Функции Ляпунова

Пусть $x = 0$ — положение равновесия системы $\dot{x} = f(x)$.

Рассмотрим некоторую функцию V, определенную в окрестности точки $(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0)$ и удовлетворяющую условию

$$V(0) = 0.$$

Будем предполагать, что V положительно определенная, т.е. в некоторой проколотой окрестности нуля выполнено $V(x) > 0$.

Если в проколотой окрестности нуля выполнено условие $\dot{V}(x) = \partial_f V < 0$, то точка $x = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.

Задача: доказать.

Пример

Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = \sin x - x$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \frac{x^2}{2}$$

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(\sin x - x) < 0$$

при $x \neq 0$. Решение асимптотически устойчиво.

Устойчивость вращений твердого тела

Рассмотрим случай Эйлера движения твердого тела с неподвижной точкой:

$$A\dot{p} + (C - B)qr = 0$$
$$B\dot{q} + (A - C)pr = 0$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = 0$$

У этой системы есть решения следующего вида:

$$p = p_0, \quad q = 0, \quad r = 0$$
$$p = 0, \quad q = q_0, \quad r = 0$$
$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = r_0$$

Эти решения — вращения вокруг главных осей инерции. Изучим их устойчивость.

Устойчивость вращений твердого тела

Рассмотрим случай Эйлера движения твердого тела с неподвижной точкой:

$$A\dot{p} + (C - B)qr = 0$$
$$B\dot{q} + (A - C)pr = 0$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = 0$$

Сделаем замену $\tilde{p} = p - p_0$, тогда в новых координатах уравнения примут вид

$$A\dot{\tilde{p}} + (C - B)qr = 0$$
$$B\dot{q} + (A - C)(\tilde{p} + p_0)r = 0$$
$$C\dot{r} + (B - A)(\tilde{p} + p_0)q = 0$$

Далее будем опускать тильду, чтобы не перегружать записи.

У системы есть два первых интеграла:

$$T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Ap_0p, \quad K = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2A^2p_0p$$

Устойчивость вращений твердого тела

Сделаем замену $\tilde{p} = p - p_0$, тогда в новых координатах уравнения примут вид

$$A\dot{p} + (C - B)qr = 0$$
$$B\dot{q} + (A - C)(p + p_0)r = 0$$
$$C\dot{r} + (B - A)(p + p_0)q = 0$$

У системы есть два первых интеграла:

$$T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Ap_0p, \quad K = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2A^2p_0p$$

Построим функцию Ляпунова: $V = T^2 + K^2$. Она положительно определена и $\dot{V} = 0$. Покажем, что в окрестности нуля она равна нулю только в нуле. Ясно, что $V = 0$ тогда и только тогда, когда $T = 0$ и $K = 0$. Поэтому должно выполняться $AT - K = 0$ из чего следует, что $q = r = 0$ (при условии, что A — наибольший или наименьший момент инерции) из первого уравнения $T = 0$ получаем, что и $p = 0$, если мы рассматриваем достаточно малую окрестнсоть нуля.

Из теоремы Ляпунова получаем устойчивость.

Теоремы о неустойчивости

Теорема (Четаев). Пусть рассматривается система $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$ и в некотрой окрестности нуля существует область M с непустой границей ∂M, число k и функция $V(x)$ такие, что

1. $0 < V(x) \leqslant k$
2. $W(x) = \dot{V}(x) > 0$
3. На любом множестве, где $V(x) \geqslant V_0$, существует некоторое число $l > 0$ такое, что $W(x) \geqslant l > 0$
4. $x = 0$ принадлежит границе ∂M
5. $V = 0$ на границе ∂M

Тогда положение равновесия неустойчиво.

Неустойчивость вращений твердого тела

Покажем, что вращение вокруг средней оси инерции неусточиво. Пусть $C > A > B$. В качестве функции из теоремы Четаева рассмотрим функцию $V = qr$, а M — область, что $q > 0$, $r > 0$. Окрестность имеет радиус p_0.

$$\dot{V} = (p + p_0)((C - A)r^2 + (A - B)q^2)$$

Несложно проверить, что выполняются все условия теоремы Четаева.

Спасибо