Вынужденные колебания

Иван Юрьевич Полехин

11 февраля 2021 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Периодическое воздействие на линейную систему

Пусть дана линейная система с лагранжианом $L = T - \Pi$

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}), \quad \Pi = \frac{1}{2}(Bq, q)$$

A, B — постоянные матрицы, задающие положительно определенные квадратичные формы. Уравнения движения:

$$A\ddot{q} + Bq = 0.$$

Пусть теперь в правую часть добавлены функции F_i следующего вида

$$F_i = f_i \sin \Omega t,$$

где f_i — постоянные. Уравнение примет вид:

$$A\ddot{q} + Bq = F.$$

Периодическое воздействие на линейную систему

Пусть теперь в правую часть добавлены функции F_i следующего вида

$$F_i = f_i \sin \Omega t,$$

где f_i — постоянные. Уравнение примет вид:

$$A\ddot{q} + Bq = F.$$

Перейдем к нормальным координатам: $q = CQ$. Матрица C состоит из собственных векторов (нормированных в метрике, задаваемой матрицей A).

$$C^\top AC\ddot{Q} + C^\top BCQ = C^\top F$$

Получаем систему

$$\ddot{Q} + DQ = G,$$

где D — диагональная матрица, $G = C^\top F$.

Периодическое воздействие на линейную систему

Система опять разбивается на независимые уравнения.

$$\ddot{Q} + DQ = G,$$

где D — диагональная матрица, $G = C^\top F$.

Рассмотрим одно уравнение

$$\ddot{Q} + \omega^2 Q = g \sin \Omega t$$

Пусть $|\Omega| \neq |\omega|$. Тогда общее решение имеет вид

$$Q = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t + \gamma \sin \Omega t,$$

где α и β определяются через начальные условия. А γ удовлетворяет уравнению

$$\gamma(\omega^2 - \Omega^2) = g$$

Если $|\Omega| = |\omega|$, то частное решение нужно искать в виде

$$\gamma t \cos \omega t$$

Задача 18.37

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\dot{q}_1^2 + \frac{ml^2}{3}\dot{q}_2^2\right)$$

Потенциальная энергия:

$$\Pi = -\frac{l}{2}mg\cos q_1 - \frac{l}{2}\cos q_2 + \frac{a^2c}{2}((\sin q_1 - \sin q_2)^2 + (\cos q_1 - \cos q_2)^2)$$

Обобщенные силы, связанные с движением точек подвеса

$$F_i = m\cos q_i \frac{l}{2}Ap^2\sin pt$$

Задача 18.37

Линеаризуем систему с лагранжианом $L = T - \Pi$:

$$A\ddot{q} + Bq = F$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} lmg/2 + ca^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & lmg/2 + ca^2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} m\frac{l}{2}Ap^2 \sin pt \\ m\frac{l}{2}Ap^2 \sin pt \end{pmatrix}$$

Задача 18.37

Линеаризуем систему с лагранжианом $L = T - \Pi$:

$$A\ddot{q} + Bq = F$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} lmg/2 + ca^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & lmg/2 + ca^2 \end{pmatrix}$$

Собственные числа из уравнения $\det(B - \lambda A) = 0$:

$$\lambda = \frac{3}{2}\frac{g}{l}, \quad \lambda = \frac{6ca^2}{ml^2} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

Положим $g = l = c = a = m = 1$ (для некоторого упрощения записи)

Задача 18.37

Линеаризуем систему с лагранжианом $L = T - \Pi$:

$$A\ddot{q} + Bq = F$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = 6 + \frac{3}{2}$$

Задача 18.37

Переходим к нормальным координатам Q. Матрица перехода имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Получаем два независимых уравнения:

$$\ddot{Q}_1 + \lambda_1 Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A p^2 \sin pt$$

и

$$\ddot{Q}_2 + \lambda_2 Q_2 = 0$$

Общее записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1(t) + \tilde{Q}_1(t) \\ Q_2(t) \end{pmatrix}$$

здесь $Q_i(t)$ — решение соответствующего однородного уравнения; $\tilde{Q}_1(t)$ — решение неоднородного уравнения для переменной Q_1.

Задача 18.37

Переходим к нормальным координатам Q. Матрица перехода имеет вид:

$$\ddot{Q}_1 + \lambda_1 Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A p^2 \sin pt$$

Найдем $\tilde{Q}_1(t)$ в виде $\tilde{Q}_1(t) = \gamma \sin pt$, получаем

$$\gamma = \frac{\sqrt{3} A p^2}{3 - 2p^2}$$

Задача 18.33

Выпишем уравнения:

$$\frac{1}{2}\ddot{q}_1 + q_1 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2$$

$$8\ddot{q}_2 + q_2 = -\dot{q}_1 - 4\dot{q}_2$$

Задача 18.33

Выпишем уравнения:

$$\frac{1}{2}\ddot{q}_1 + q_1 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2$$
$$8\ddot{q}_2 + q_2 = -\dot{q}_1 - 4\dot{q}_2$$

Добавим в правую часть (только первого уравнения) периодическое возмущение $De^{i\Omega t}$:

$$\frac{1}{2}\ddot{q}_1 + q_1 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 + De^{i\Omega t}$$
$$8\ddot{q}_2 + q_2 = -\dot{q}_1 - 4\dot{q}_2$$

Задача 18.33

Выпишем уравнения:

$$\frac{1}{2}\ddot{q}_1 + q_1 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2$$
$$8\ddot{q}_2 + q_2 = -\dot{q}_1 - 4\dot{q}_2$$

Добавим в правую часть (только первого уравнения) периодическое возмущение $De^{i\Omega t}$:

$$\frac{1}{2}\ddot{q}_1 + q_1 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 + De^{i\Omega t}$$
$$8\ddot{q}_2 + q_2 = -\dot{q}_1 - 4\dot{q}_2$$

Общее решение такой системы складывается из обдего решения однородной системы (все такие решение экспоненциально быстро стремятся к нулю, потому что заданная система линейна и ее нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво) и частного решения неоднородной системы.

Задача 18.33

Выпишем уравнения:

$$\frac{1}{2}\ddot{q}_1 + q_1 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2$$
$$8\ddot{q}_2 + q_2 = -\dot{q}_1 - 4\dot{q}_2$$

Добавим в правую часть (только первого уравнения) периодическое возмущение $De^{i\Omega t}$:

$$\frac{1}{2}\ddot{q}_1 + q_1 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 + De^{i\Omega t}$$
$$8\ddot{q}_2 + q_2 = -\dot{q}_1 - 4\dot{q}_2$$

Общее решение такой системы складывается из обдего решения однородной системы (все такие решение экспоненциально быстро стремятся к нулю, потому что заданная система линейна и ее нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво) и частного решения неоднородной системы. Будем искать частное решение в виде $q_1 = Ae^{i\Omega t}$ и $q_2 = Be^{i\Omega t}$

Задача 18.33

Будем искать частное решение в виде $q_1 = Ae^{i\Omega t}$ и $q_2 = Be^{i\Omega t}$

Задача 18.33

Будем искать частное решение в виде $q_1 = Ae^{i\Omega t}$ и $q_2 = Be^{i\Omega t}$

Для этого надо подставить эти выражения в систему и найти A и B.

Спасибо