Устойчивость равновесий консервативных систем

Иван Юрьевич Полехин

17 февраля 2021 г.

МФТИ, `http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/`

Теорема Лагранжа-Дирихле

Рассмотрим натуральную систему с лагранжианом L

$$L = T - \Pi$$

Если в положении равновесия Π имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову. В качестве функции Ляпунова надо взять полную энергию.

Теорема Лагранжа-Дирихле

Рассмотрим натуральную систему с лагранжианом L

$$L = T - \Pi$$

Если в положении равновесия Π имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову. В качестве функции Ляпунова надо взять полную энергию.

Условие теоремы не является необходимым для устойчивости. Пример:

$$\Pi(q) = (\cos q^{-1})e^{-q^{-2}}, T = \frac{\dot{q}}{2}.$$

Неустойчивость

Разложим Π в ряд Тейлора:

$$\Pi = \Pi_2 + \Pi_k + \Pi_{k+1} + \ldots$$

здесь Π_k — однородная форма степени k. Если форма Π_2 не имеет минимума в положении равновесия, то оно неустойчиво.

Если $\Pi_2 \geqslant 0$, то можно определить подпространство

$$P = \{q\colon \Pi_2(q) = 0\}$$

Если P — точка, то Π_2 положительно определена и положение равновесия устойчиво. Пусть размерность P больше нуля. Тогда можно рассмотреть ограничение формы Π_k на P, которое мы обозначим W_k.

Если форма W_k не имеет локального минимума в положении равновесия, то оно неустойчиво.

В частности, если Π_k имеет строгий максимум, то положение равновесия неустойчиво.

Неустойчивость

Разложим Π в ряд Тейлора:

$$\Pi = \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \ldots$$

здесь Π_k — однородная форма степени k.

Пусть Π_k — форма наименьшей степени и по ней определяется строгий максимум Π. Тогда система неустойчива.

Гироскопические силы

Пусть лагранжиан имеет вид

$$L = T + \Lambda - \Pi$$

здесь Λ — линейные по скоростям слагаемые. Пусть A, B — квадратичные формы, соответствующие линеаризации системы с кинетической энергией T и потенциальной энергией Π.

Если определитель матрицы B строго меньше нуля, то положение равновесия невозможно стабилизировать гироскопическими силами.

Пусть $\det B \neq 0$. Степенью неустойчивости системы называется число отрицательных λ_i, когда система записана в нормальных координатах:

$$\ddot{\theta}_i = -\lambda_i \theta_i.$$

Если степень неустойчивости нечетная, то положение равновесия невозможно стабилизировать нироскопическими силами.

Примеры стабилизации

$$\ddot{q}_1 + \lambda_1 q_1 - \gamma \dot{q}_2 = 0$$
$$\ddot{q}_2 + \lambda_2 q_2 + \gamma \dot{q}_1 = 0$$

Здесь $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2$.

Определитель имеет вид:

$$\lambda^4 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \gamma^2)\lambda^2 + \lambda_1 \lambda_2$$

Корни уравнения

$$\lambda^4 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \gamma^2)\lambda^2 + \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

комплексные при условии, что γ велико.

Пример: вращающееся кольцо + массивная точка на нем.

$$z = -\cos\varphi, \quad x = \sin\varphi\cos\Omega t, \quad y = \sin\varphi\sin\Omega t$$

$$\dot z = \dot\varphi\sin\varphi$$

$$\dot x = \dot\varphi\cos\varphi\cos\Omega t - \Omega\sin\varphi\sin\Omega t$$

$$\dot y = \dot\varphi\cos\varphi\sin\Omega t + \Omega\sin\varphi\cos\Omega t$$

$$L = \dot\varphi^2 + \Omega^2\sin^2\varphi + \cos\varphi$$

Бифуркации

Пример: вращающееся кольцо + массивная точка на нем.

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2\varphi + \cos\varphi$$

$$\Pi = -(\frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2\varphi + \cos\varphi)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \sin\varphi(-\Omega^2\cos\varphi + 1) = 0$$

Если $\Omega^2 > 1$, то есть два дополнительных положения равновесия.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \Omega^2 \sin^2\varphi > 0$$

Разложение П в окрестности нуля:

$$\Pi = -(\frac{1}{2}\Omega^2(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + ...)^2 + 1 - \frac{\varphi^2}{2} + ...) = -1 - \frac{1}{2}\Omega^2\varphi^2 + \frac{\varphi^2}{2} + ...$$

Устойчиво, когда $|\Omega| < 1$ и неустойчиво, когда $|\Omega| > 1$.

Рассмотрим критический случай:

$$|\Omega| = 1$$

По теореме Лагранжа-Дирихле положение равновесия устойчиво.

Спасибо