Введение в теорию бифуркаций

Иван Юрьевич Полехин

18 февраля 2021 г.

МФТИ, http://mi-ras.ru/~ivanpolekhin/

Стандартный пример из механики

Пример: вращающееся кольцо + массивная точка на нем.

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2\varphi + \cos\varphi$$

$$\Pi = -(\frac{1}{2}\Omega^2 \sin^2\varphi + \cos\varphi)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \sin\varphi(-\Omega^2\cos\varphi + 1) = 0$$

Если $\Omega^2 > 1$, то есть два дополнительных положения равновесия.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \Omega^2 \sin^2\varphi > 0$$

Стандартный пример из механики

Разложение Π в окрестности нуля:

$$\Pi = -(\frac{1}{2}\Omega^2(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + ...)^2 + 1 - \frac{\varphi^2}{2} + ...) = -1 - \frac{1}{2}\Omega^2\varphi^2 + \frac{\varphi^2}{2} + ...$$

Устойчиво, когда $|\Omega| < 1$ и неустойчиво, когда $|\Omega| > 1$.

Рассмотрим критический случай:

$$|\Omega| = 1$$

По теореме Лагранжа-Дирихле положение равновесия устойчиво.

Итак, если $|\Omega| < 1$, то нижнее положение равновесия

Бифуркация Андронова-Хопфа

Рассмотрим дифференциальное уравнение на плоскости:

$$\dot{y}_1 = \beta y_1 - y_2 + \sigma y_1(y_1^2 + y_2^2)$$
$$\dot{y}_2 = y_1 + \beta y_2 + \sigma y_2(y_1^2 + y_2^2)$$

Переходим к полярным коориднатам:

$$\dot{r} = \beta r + \sigma r^3 = r(\beta + \sigma r^2)$$
$$\dot{\varphi} = 1$$

Пусть $\sigma = 1$. Тогда при $\beta < 0$ имеем асимптотически устойчивое положение равновесия; при $\beta > 0$ оно становится неустойчивым и решения уходят на бесконечность (жесткая потеря устойчивости).

Пусть $\sigma = -1$. Тогда при $\beta < 0$ также имеем асимптотически устойчивое положение равновесия; при $\beta > 0$ оно становится неустойчивым, но появляется предельный цикл радиуса $\sqrt{\beta}$ (мягкая потеря устойчивости).

Задача Т2

Рассмотрите дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = (x - a)(x^2 - a).$$

Найдите все возможные фазовые портреты, которые можно получить для этого уравнения, а также интервалы изменения параметра a, соответствующие каждому из портретов.

Решение: изобразить на плоскости (x, a) нули функции $(x - a)(x^2 - a)$. Им будут соответствовать положения равновесия. В тех областях, где функция $(x - a)(x^2 - a)$ не равна нулю, надо определить ее знак. Из этого сразу определяется устойчивость всех положений равновесия.

Задача T5

Для системы

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2)$$
$$\dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2)$$

определить все возможные типы фазовых портретов (при всех значениях μ). После перехода к полярным координатам задача сводится к T2 с той лишь разницей, что вместо положений равновесия мы будем иметь предельные циклы.

Спасибо