Конспект лекций по курсу «Гамильтонова механика»

Иван Полехин

февраль–май 2017, МИАН

1 Динамика системы точек. Идеальные связи.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек в $\mathbb{R}^3$, на которые действуют некоторые силы. Пусть $r_i \in \mathbb{R}^3$ — радиус-вектор i-ой точки. Конфигурацию системы будем обозначать r: $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ — набор радиус-векторов всех точек. Предположим также, что движение точек не свободно, а подчинено некоторым условиям, которые имеют вид

$$f_j(r,t) = 0, \quad j = 1, ..., k.$$

Здесь и далее все функции считаются дифференцируемыми нужное число раз. Такие связи называются *голономными.* Стандартный пример — конфигурационное пространство маятника $\mathbb{S}^2$, т.е. система состоит из одной точки и уравнение связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, где ρ — длина маятника. Если ρ является функцией времени t, то получаем маятник переменной длины. В дальнейшем считаем, что при всех t уравнения связи задают гладкие многообразия M_t, причем топология этих многообразий не изменяется и они все диффеоморфны некоторому многоообразию M (как в примере с маятником переменной длины). Многообразие M — *конфигурационное пространство* системы.

Если все уравнения связей независимы, т.е.

$$rank \frac{\partial(f_1, ..., f_k)}{\partial(x_1, ..., z_n)} = k, \quad \text{в точках, где } f_1 = ... = f_k = 0,$$

то $dim(M) = 3n - k$, т.е. локально $3n$ величин $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ выражаются через $3n - k$ параметров, которые мы обозначим q_j и будем называть *локальными координатами.* Например, в случае маятника $dim(M) = 2$ и можно в качестве локальных координат выбрать стандартные сферические координаты или декартовы координаты одной из плоскостей, проходящей через точку подвеса маятника.

Для каждой точки рассмотрим следующие «величины»

$$\delta r_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_1}\delta q_1 + ... + \frac{\partial r_i}{\partial q_n}\delta q_n.$$

Если считать время t параметром, то δr_i — это просто дифференциал функции r_i в координатах q_j (символ δ используется по традиции вместо d, чтобы подчеркнуть, что время не рассматривается как еще одна координата). Говорят, что δr_i — *виртуальное перемещение* точки с номером i.

От кинематики перейдем к рассмотрению динамики системы. Предположим сначала, что рассматриваемые n точек свободны, т.е. забудем про уравнения связей. Движение точек тогда подчиняются дифференциальным уравнениям

$$m_j \ddot{r}_j = F_j(r, \dot{r}, t), \quad j = 1, ..., n.$$

В таком случае, конечно, r_j могут не удовлетворять уравнениям связи. Систему можно так видоизменить, добавив к заданным силам F_j некоторые заранее неизвестные силы R_j (которые также могут зависеть от r, $\dot{r}$ и t), что решения системы

$$m_j \ddot{r}_j = F_j(r, \dot{r}, t) + R_j(r, \dot{r}, t), \quad j = 1, ..., n,$$

будут удовлетворять уравнениям связи во все моменты времени (при условии, что начальные условия также согласованы со связями). Функции R_j называются *реакциями связей*. Можно показать, что все R_j могут быть выбраны такими, чтобы выполнялось условие «работа сил реакции на любых виртуальных перемещениях равна нулю»

$$\sum_{i=1}^{n} \langle R_i, \delta r_i \rangle \equiv 0.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение. В таком случае дополнительно говорят, что *связи идеальны*.

Замечание. О неидеальных связях говорят в том случае, когда помимо геометрических условий $f_j = 0$ под связью понимают еще и ее физическую реализацию. Например, точка движется по некоторой поверхности без трения — связь идеальна. Если же точка движется с трением — говорят, что связь не является идеальной, хотя формально можно силу трения отнести к заданным силам F и опять же говорить об идеальных связях, но для другой силы F.

Пример. Рассмотрим плоский математический маятник единичной длины. Уравнение связи $x^2 + y^2 = 1$. В качестве локальной координаты выберем угол $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Связь идеальна, когда для силы реакции R выполнено равенство $-\sin\varphi \cdot R_x + \cos\varphi \cdot R_y \equiv 0$, т.е. сила R параллельна радиус-вектору массивной точки маятника. Если маятник движется без трения, то это условие выполнено.

2 Уравнения Лагранжа.

Пусть, как и выше, $q_1, ..., q_l$ — функции локальных координат на конфигурационном пространстве, l здесь равно $3n - k$. Скорости точек $\dot{r}_j$ можно выразить через обобщенные скорости $\dot q_1, ..., \dot q_l$:

$$\dot r_j = \sum_i \frac{\partial r_j}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial r_j}{\partial t}.$$

Кинетическая энергия системы может быть выражена следующим образом

$$T = \frac{1}{2}\sum_j m_j \dot r_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(q,t)\dot q_i \dot q_j + \sum_i b_i(q,t)\dot q_i + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2.$$

Здесь

$$a_{ij} = \sum_k m_k \left\langle \frac{\partial r_k}{\partial q_i}, \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \right\rangle, \quad b_i = \sum_j m_j \left\langle \frac{\partial r_j}{\partial q_i}, \frac{\partial r_j}{\partial t} \right\rangle.$$

Утверждение. Функции q удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, ..., 3n-k.$$

Здесь

$$Q_i = \sum_j \left\langle F_j, \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \right\rangle$$

называются *обобщенными силами*.
Доказательство. Следует сразу из определения идеальных связей, если показать, что

$$\sum_j \left\langle m_j \ddot r_j, \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \right\rangle = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

В свою очередь, это равенство следует из того, что

$$\frac{\partial \dot r_j}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial r_j}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial r_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot r_j}{\partial q_i}.$$

Замечание. Q_i задают компоненты ковекторного поля (проверьте). Если записать уравнения Лагранжа как соотношения на вектора, то получим уравнение $\nabla_{\dot q}\dot q = Q$, где Q — вектор обобщенных сил, полученный из ковектора с компонентами Q_i с помощью «кинетической метрики» $ds^2 = \sum_{i,j} a_{ij} dq_i dq_j$. В частности, свободное движение ($Q \equiv 0$) — движение по геодезическим.

Если силы потенциальны, т.е. существует функция положения частиц $V(r,t)$ такая, что

$$F_j = \frac{\partial V}{\partial r_j},$$

то уравнения Лагранжа принимают еще более простой вид (здесь $L = T + V$ — функция Лагранжа или лагранжиан)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, ..., 3n-k.$$

Эти же уравнения можно получить и другим способом.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^l$ — область. $L\colon TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторый лагранжиан (произвольная функция на касательном пространстве TM, которая, возможно, зависит от времени). Пусть $q_0, q_1 \in M$, $t_0 < t_1$; Ω — множество гладких кривых $\gamma\colon [t_0, t_1] \to M$, $\gamma(t_0) = q_0$, $\gamma(t_1) = q_1$. *Действием* называется следующий функционал

$$\mathscr{L}(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot\gamma(t), t)\, dt.$$

Вариацией кривой γ с закрепленными концами называется гладкое (по t и по ε в окрестности нуля) семейство кривых $\gamma + \varepsilon\eta \in \Omega$ и $\eta(t_0) = 0$, $\eta(t_1) = 0$. Для заданной вариации $\gamma + \varepsilon\eta$ величина

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathscr{L}(\gamma + \varepsilon\eta)\big|_{\varepsilon=0} = \delta\mathscr{L}(\gamma)$$

называется *вариацией функционала.* Кривая γ называется экстремалью функционала $\mathscr{L}$, если $\delta\mathscr{L}(\gamma) = 0$ для любой вариации $\gamma + \varepsilon\eta \in \Omega$.

Утверждение. Кривая γ — экстремаль $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда $\gamma(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа.

Доказательство. Упражнение — используйте дифференцирование по частям и произвольность выбора η.

Замечание. Мы рассмотрели вывод уравнений «в локальных координатах», но он переносится и на случай, когда M — конфигурационное многообразие.

3 Уравнения Гамильтона.

Пусть нам дан лагранжиан L, значение которого в точке касательного пространства q, $\dot q$ в момент времени t есть $L(q, \dot q, t)$. Построим новую функцию H (на кокасательном пространстве) следующим образом

$$H(q, p, t) = (p\dot q - L)\big|_{\dot q = \dot q(q,p,t)},$$

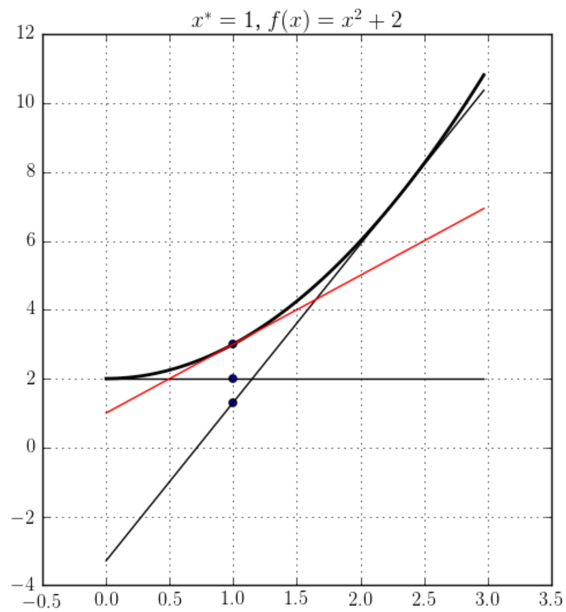
где

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}.$$

Такой переход от функции L к функции H называется *преобразованием Лежандра.*

Замечание. Преобразование Лежандра можно производить и для более широкого класса функций, чем лагранжианы механических систем. В задачах механики выразить $\dot q$ через q, p и t всегда возможно (ввиду положительной определенности кинетической метрики).

Замечание. Пусть $f(x)$ — некоторая выпуклая функция. Ее преобразованием Лежандра называется другая функция $h(y)$, которая строится следующим образом: для заданного y значение $h(y)$ есть максимум по x величины $xy - f(x)$. Чтобы показать инволютивность преобразования Лежандра рассмотрим функцию $F(x, y) = yx - h(y)$. Для заданного y эта функция линейна по x. Если в качестве x взять значение $x^* = x^*(y)$, при котором $xy - f(x)$ максимально, то получим $F(x^*, y) = f(x^*)$, т.е. получаем, что для заданного y прямая $F(x, y)$ проходит через точку $(x^*, f(x^*))$. Пусть теперь точка x^* фиксирована. Найдем y, при котором $yx^* - h(y)$ максимально и найдем это максимальное значение. Из выпуклости f следует, что максимальное значение — $f(x^*)$ и достигается оно при $y = y(x^*)$.



Поскольку преобразование Лежандра обладает свойством инволютивности, т.е. если его применить дважды, то получим тождественное преобразование, то

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Также из определения функции H видно, что

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\dot{p}.$$

Мы получили уравнения Гамильтона. При этом H — функция Гамильтона системы и T^*M — фазовое пространство.

Аналогично уравнениям Лагранжа, уравнения Гамильтона также могут быть сформулированы в вариационном виде.
Рассмотрим точки q_0 и q_1 пространства M и $t_0 < t_1$. Через Ω обозначим множество гладких кривых $\gamma\colon [t_0, t_1] \to T^*M$, $q(t_0) = q_0$ и $q(t_1) = q_1$. Определим функционал действия следующим образом

$$\mathscr{H}(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (p(t)\dot{q}(t) - H(q(t), p(t), t))\, dt.$$

Для заданной кривой γ рассмотрим ее вариацию $\gamma + \varepsilon\eta$, $\eta = (q_\eta, p_\eta)$, притом считаем, что $q_\eta(t_0) = 0$ и $q_\eta(t_1) = 0$, но, вообще говоря, $p_\eta(t_0)$ и $p_\eta(t_1)$ могут быть ненулевыми, т.е. при варьировании кривой мы фиксируем только часть переменных.
Утверждение. Кривая γ является решением уравнений Гамильтона тогда и только тогда, когда она является экстремалью функционала $\mathscr{H}$.
Доказательство.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathscr{H} = \frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t_1} ((p(t) + \varepsilon p_\eta(t))(\dot{q}(t) + \varepsilon\dot{q}_\eta(t)) - H(q(t) + \varepsilon q_\eta(t), p(t) + \varepsilon p_\eta(t), t))\, dt.$$

Если рассмотреть подынтегральное выражение с точностью до величин порядка $o(\varepsilon^2)$, то получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\mathscr{H}\Big|_{\varepsilon=0} &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(p_\eta\dot{q} + \dot{q}_\eta p - \frac{\partial H}{\partial q} q_\eta - \frac{\partial H}{\partial p} p_\eta \right) dt \\ &= q_\eta p\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(p_\eta\dot{q} - q_\eta\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial q} q_\eta - \frac{\partial H}{\partial p} p_\eta \right) dt. \end{aligned}$$

Учитывая краевые условия и произвольность вариации, получаем, что экстремаль функционала удовлетворяет уравнениям Гамильтона. Доказательство в обратную сторону аналогично.
Замечание. Отметим, что в сравнении с выриационным выводом уравнений Лагранжа, мы использовали более широкий класс кривых (поскольку мы не предполагали, что кривые имеют закрепленные концы).